

**Proposition 1.1 : ordre de convergence de la méthode de la corde**

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la méthode de la corde

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \text{ avec } x_0 \in [a, b]$$

Si cette suite converge vers $\alpha \in]a, b[$ alors la convergence est au moins d'ordre 1.

De plus, si f est de classe \mathcal{C}^2 sur un certain voisinage \mathcal{V} de α et si $f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ alors la convergence est au moins d'ordre 2.

Proof. • **Order 1 :** On note $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On a par définition $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}$ (ce qui suppose que $f(x_k)$ soit bien définie, i.e. $x_k \in [a, b]$). Comme $\lambda \neq 0$ et f continue, l'hypothèse (x_k) converge vers α entraîne que $f(\alpha) = 0$. Pour définir l'ordre de convergence, on suppose de plus que $\forall k \in \mathbb{N}, x_k \neq \alpha$. On peut alors appliquer la formule de Taylor-Lagrange : il existe ξ_k compris entre x_k et α tel que

$$f(x_k) = \underbrace{f(\alpha)}_{=0} + (x_k - \alpha)f'(\xi_k) = (x_k - \alpha)f'(\xi_k).$$

On a alors en utilisant cette expression dans la définition de la suite x_k

$$x_{k+1} = x_k - (x_k - \alpha) \frac{f'(\xi_k)}{\lambda}.$$

En soustrayant α à cette équation on obtient

$$x_{k+1} - \alpha = x_k - \alpha - (x_k - \alpha) \frac{f'(\xi_k)}{\lambda} = (x_k - \alpha) \left(1 - \frac{f'(\xi_k)}{\lambda}\right).$$

Comme $x_k \neq \alpha$, on a alors

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = 1 - \frac{f'(\xi_k)}{\lambda}.$$

Or x_k converge vers α et ξ_k compris entre x_k et α , ce qui entraîne que ξ_k converge vers α . La fonction f' étant continue, on en déduit que $f'(\xi_k)$ converge vers $f'(\alpha)$. Ceci donne donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = 1 - \frac{f'(\alpha)}{\lambda}.$$

La convergence est donc (au moins) d'ordre 1.

- **Order 2 :** La suite étant convergente, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0, x_k \in \mathcal{V}$. Soit $k \geq k_0$, comme $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{V})$, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange : il existe $\eta_k \in \mathcal{V}$ compris entre x_k et α que

$$f(x_k) = \underbrace{f(\alpha)}_{=0} + (x_k - \alpha)f'(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)^2}{2!}f^{(2)}(\eta_k).$$

On a alors en utilisant cette expression dans la définition de la suite x_k

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{\lambda} \left((x_k - \alpha)f'(\alpha) + \frac{(x_k - \alpha)^2}{2!}f^{(2)}(\eta_k) \right).$$

En soustrayant α à cette équation on obtient

$$x_{k+1} - \alpha = (x_k - \alpha) \left(\underbrace{1 - \frac{f'(\alpha)}{\lambda}}_{=0 \text{ par hyp.}} \right) + \frac{1}{\lambda} \frac{(x_k - \alpha)^2}{2!} f^{(2)}(\eta_k).$$

Comme $\eta_k \in \mathcal{V}$ converge vers α (car compris entre x_k et α) et $f^{(2)}$ continue sur \mathcal{V} , on en déduit

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^2} = \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2\lambda}.$$

La convergence est donc (au moins) d'ordre 2.

□

