Analyse Numérique I

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année / L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications
Institut Galilée
Université Paris XIII.

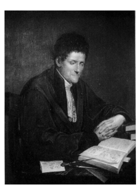
2024/10/08

Plan du cours

Racines/zéros d'un polynôme

- **degré 2** : Babyloniens en 1600 avant J.-C.
- **degré 3** : *Scipio del Ferro* (1465-1526, mathématicien italien) et *Niccolo Fontana* (1499-1557, mathématicien italien)
- **degré 4** : *Ludovico Ferrari* (1522-1565, mathématicien italien)
- **degré 5** : *Paolo Ruffini* (1765-1822, mathématicien italien) en 1799, *Niels Henrick Abel* (1802-1829, mathématicien norvégien) en 1824, montrent qu'il n'existe **pas de solution analytique**.

(a) *Niccolo Fontana* 1499-1557, mathématicien italien



(b) *Paolo Ruffini* 1765-1822, mathématicien italien

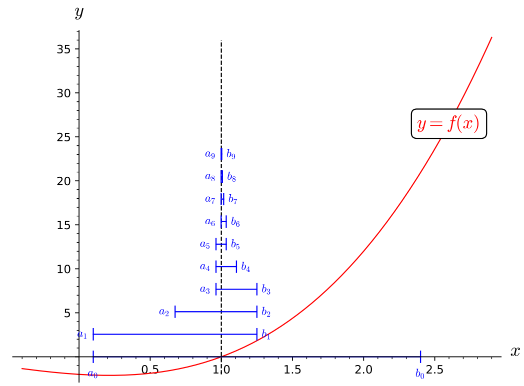
(c) *Niels Henrick Abel* 1802-1829, mathématicien norvégien

Plan

Plan

Note

principe de la méthode de dichotomie : Soit I un intervalle contenant un **unique zéro** de la fonction f, on le divise par son milieu en deux intervalles et on détermine lequel des deux contient le zéro. On itére ce processus sur le nouvel intervalle.



Note

principe de la méthode de dichotomie : Soit I un intervalle contenant un **unique zéro** de la fonction f, on le divise par son milieu en deux intervalles et on détermine lequel des deux contient le zéro. On itére ce processus sur le nouvel intervalle.

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k,\ b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = x_k & \text{sinon (i.e. } f(a_k)f(x_k) < 0.) \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2.$$

Recherche des zéros d'une fonction | Méthode de dichotomie ou de bissection | 2024/10/08 | 6 / 85

Exercice 1

On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, vérifie $f(a)f(b) < 0$ et qu'il existe un unique $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Q. 1

1. Montrer que les suites (a_k) et (b_k) convergent vers α.
2. En déduire que la suite (x_k) converge vers α.

Q. 2

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}$.
2. Soit $\epsilon > 0$. En déduire que si $k \geqslant \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$ alors $|x_k - \alpha| \leqslant \epsilon$.

Proposition

Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a)f(b) < 0$ et admettant $\alpha \in]a,b[$ comme **unique** solution de $f(x) = 0$. Alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de dichotomie converge vers α et

$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On a alors $\forall \epsilon > 0$, $\forall k \geqslant \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$

$$|x_k - \alpha| \leqslant \epsilon.$$

Algorithme

- Que cherche-t'on?
- Quelles sont les données du problèmes?

Algorithme

- Que cherche-t'on?
  Résultat :
  α_ϵ : un réel tel que $|\alpha_\epsilon - \alpha| \leqslant \epsilon$.
- Quelles sont les données du problèmes?

Algorithme

- Que cherche-t'on?
  Résultat :
  α_ϵ : un réel tel que $|\alpha_\epsilon - \alpha| \leqslant \epsilon$.
- Quelles sont les données du problèmes?
  Données : a, b : deux réels $a < b$,
  f : $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de la proposition ,
  ϵ : un réel strictement positif.

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_0}$

$k_{\min} \leftarrow \mathrm{E}\left(\frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)}\right)$ ▷ E, partie entière

$\boxed{\text{Calcul de la suite } (x_k)_{k=0}^{k_{\min}} \text{ par dichotomie}}$

$\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

$k_{\min} \leftarrow \mathrm{E}\left(\frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)}\right)$ ▷ E, partie entière

Initialisation de x_0

Pour $k \leftarrow 0$ **à** $k_{\min} - 1$ **faire**

  Calcul de la suite (x_{k+1}) par dichotomie

Fin Pour

$\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

$k_{\min} \leftarrow \mathrm{E}\left(\frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)}\right)$ ▷ E, partie entière

$\boxed{\text{Initialisation de } x_0}$

Pour $k \leftarrow 0$ **à** $k_{\min} - 1$ **faire**

  $\boxed{\text{Calcul de la suite } (x_{k+1}) \text{ par dichotomie}}$

Fin Pour

$\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

$k_{\min} \leftarrow \mathrm{E}\left(\frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)}\right)$

$a_0 \leftarrow a,\ b_0 \leftarrow b$

$x_0 \leftarrow \frac{a_0+b_0}{2}$

Pour $k \leftarrow 0$ **à** $k_{\min} - 1$ **faire**

  Si $f(x_k) == 0$ **alors**

    $a_{k+1} \leftarrow x_k,\ b_{k+1} \leftarrow x_k$

  Sinon Si $f(x_k)f(b_k) < 0)$ **alors**

    $a_{k+1} \leftarrow x_k,\ b_{k+1} \leftarrow b_k$

  Sinon

    $a_{k+1} \leftarrow a_k,\ b_{k+1} \leftarrow x_k$

  Fin Si

  $x_{k+1} \leftarrow \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$

Fin Pour

$\alpha_\epsilon \leftarrow x_{k_{\min}}$

Algorithme Méthode de dichotomie : version 1

Données : $a,\ b$: deux réels $a < b$,
f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de la proposition 8,
eps : un réel strictement positif.

Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leqslant \mathrm{eps}$.

Fonction $x \leftarrow$ Dichotomie1(f, a, b, eps)
  $\mathrm{kmin} \leftarrow \mathrm{E}(\log((b-a)/\mathrm{eps})/\log(2))$
  $\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{\mathrm{kmin}+1}$ ▷ $\boldsymbol{A}(k+1)$ contiendra a_k, ...
  $\boldsymbol{A}(1) \leftarrow a,\ \boldsymbol{B}(1) \leftarrow b,\ \boldsymbol{X}(1) \leftarrow (a+b)/2$
  Pour $k \leftarrow 1$ **à** kmin **faire**
    Si $f(\boldsymbol{X}(k)) == 0$ **alors**
      $\boldsymbol{A}(k+1) \leftarrow \boldsymbol{X}(k),\ \boldsymbol{B}(k+1) \leftarrow \boldsymbol{X}(k)$
    Sinon Si $f(\boldsymbol{B}(k))f(\boldsymbol{X}(k)) < 0$ **alors**
      $\boldsymbol{A}(k+1) \leftarrow \boldsymbol{X}(k),\ \boldsymbol{B}(k+1) \leftarrow \boldsymbol{B}(k)$
    Sinon
      $\boldsymbol{A}(k+1) \leftarrow \boldsymbol{A}(k),\ \boldsymbol{B}(k+1) \leftarrow \boldsymbol{X}(k)$
    Fin Si
    $\boldsymbol{X}(k+1) \leftarrow (\boldsymbol{A}(k+1) + \boldsymbol{B}(k+1))/2$
  Fin Pour
  $x \leftarrow \boldsymbol{X}(\mathrm{kmin}+1)$
Fin Fonction

Algorithme : versions 2, 3 et + si affinités

- $A = a,\ B = b$ et $x_0 = \frac{A+B}{2}$,
- $\forall k \in [\![0, k_{\min} - 1]\!]$,

$$\begin{cases} A = B = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ A = x_k,\ B \text{ inchangé} & \text{si } f(B)f(x_k) < 0, \\ B = x_k,\ A \text{ inchangé} & \text{sinon (i.e. } f(A)f(x_k) < 0.) \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = \frac{A+B}{2}$$

Algorithme Méthode de dichotomie : version 2

Données : $a,\ b$: deux réels $a < b$,
f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de la proposition 8,
eps : un réel strictement positif.
Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leqslant \text{eps}$.

Fonction $x \leftarrow$ Dichotomie2(f, a, b, eps)
  $\text{kmin} \leftarrow \text{E}(\log((b-a)/\text{eps})/\log(2))$
  $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{\text{kmin}+1}$ ▷ $\boldsymbol{X}(k+1)$ contiendra x_k, ...
  $\text{A} \leftarrow a,\ \text{B} \leftarrow b,\ \boldsymbol{X}(1) \leftarrow (\text{A}+\text{B})/2$
  Pour $k \leftarrow 1$ **à** kmin **faire**
    Si $f(\boldsymbol{X}(k)) == 0$ **alors**
      $\text{A} \leftarrow \boldsymbol{X}(k),\ \text{B} \leftarrow \boldsymbol{X}(k)$
    Sinon Si $f(\text{B})f(\boldsymbol{X}(k)) < 0$ **alors**
      $\text{A} \leftarrow \boldsymbol{X}(k)$ ▷ B inchangé
    Sinon
      $\text{B} \leftarrow \boldsymbol{X}(k)$ ▷ A inchangé
    Fin Si
    $\boldsymbol{X}(k+1) \leftarrow (\text{A}+\text{B})/2$
  Fin Pour
  $x \leftarrow \boldsymbol{X}(\text{kmin}+1)$
Fin Fonction

Algorithme Méthode de dichotomie : version 3

Données : $a,\ b$: deux réels $a < b$,
f : $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de la proposition 8,
eps : un réel strictement positif.
Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leqslant \text{eps}$.

Fonction $x \leftarrow$ Dichotomie3(f, a, b, eps)
  $\text{kmin} \leftarrow \text{E}(\log((b-a)/\text{eps})/\log(2))$
  $A,\ B \in \mathbb{R}$
  $A \leftarrow a,\ B \leftarrow b,\ x \leftarrow (a+b)/2$
  Pour $k \leftarrow 1$ **à** kmin **faire**
    Si $f(x) == 0$ **alors**
      $A \leftarrow x,\ B \leftarrow x$
    Sinon Si $f(B)f(x) < 0$ **alors**
      $A \leftarrow x$ ▷ B inchangé
    Sinon
      $B \leftarrow x$ ▷ A inchangé
    Fin Si
    $x \leftarrow (A+B)/2$
  Fin Pour
Fin Fonction

Algorithme Méthode de dichotomie : version 4

Données : $a,\ b$: deux réels $a < b$,
f : $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $f(a)f(b) < 0$
eps : un réel strictement positif.
Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leqslant \text{eps}$.

Fonction $x \leftarrow$ Dichotomie4(f, a, b, eps)
  $A,\ B \in \mathbb{R}$
  $A \leftarrow a,\ B \leftarrow b,\ x \leftarrow (a+b)/2$
  Tantque $|x - A| > \text{eps}$ **faire**
    Si $f(x) == 0$ **alors**
      $A \leftarrow x,\ B \leftarrow x$
    Sinon Si $f(B)f(x) < 0$ **alors**
      $A \leftarrow x$ ▷ B inchangé
    Sinon
      $B \leftarrow x$ ▷ A inchangé
    Fin Si
    $x \leftarrow (A+B)/2$
  Fin Tantque
Fin Fonction

Que pensez vous de cet algorithme?

Algorithme Méthode de dichotomie : version 5

Données : $a,\ b$: deux réels $a < b$,
f : $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $f(a)f(b) < 0$.
Résultat : x : un réel tel que $f(x) = 0$.

Fonction $x \leftarrow$ Dichotomie5(f, a, b)
  $A,\ B \in \mathbb{R}$
  $A \leftarrow a,\ B \leftarrow b,\ x \leftarrow (a+b)/2,\ \text{xp} \leftarrow a$
  Tantque $x \sim= \text{xp}$ **faire**
    Si $f(B)f(x) < 0$ **alors**
      $A \leftarrow x$ ▷ B inchangé
    Sinon
      $B \leftarrow x$ ▷ A inchangé
    Fin Si
    $\text{xp} \leftarrow x$
    $x \leftarrow (A+B)/2$
  Fin Tantque
Fin Fonction

Plan

Proposition: Formule de Taylor-Lagrange d'ordre n

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$ dont la dérivée n-ième est dérivable sur $]a,b[$. Alors

- pour tout x, y dans $[a,b]$, $x \neq y$, il existe $\xi \in]\min(x,y), \max(x,y)[$ tel que

$$f(x) = f(y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k)}(y) + \frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{1}$$

- $\forall t \in [a,b]$, $\forall h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $(t+h) \in [a,b]$, il existe $\xi \in]\min(t,t+h), \max(t,t+h)[$ tel quel

$$f(t+h) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(t) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{2}$$

Definition

Soient (E,d) et (F,d) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction.

- On dit que f est **Lipschitzienne** de rapport $K \in \mathbb{R}_+$ ou K-**lipschitzienne** sur $A \subset E$ si

$$\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in A^2, \ \mathrm{d}(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) \leqslant K \,\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

- On dit que f est **contractante** sur $A \subset E$ si elle est **lipschitzienne** de rapport $K \in [0,1[$ sur $A \subset E$.

- Toute application lipschitzienne est uniformément continue.
- Toute application uniformément continue est continue.

Les réciproques sont fausses.

Exercice 2

Q. 1 Montrer que les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues.

Soient I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^1(I;R)$

Q. 2 On suppose que f' est bornée, i.e.

$$\exists L \in \mathbb{R}_+, \ \text{tel que } \forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant L.$$

Montrer que f est lipschitzienne de rapport L.

Q. 3 Soit $L \in \mathbb{R}_+$. On suppose f lipschitzienne de rapport L.
Montrer que f' est bornée.

Definition

Soient (E, d) un **espace métrique** et $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E **convergeant vers** $\boldsymbol{\alpha} \in E$ avec, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u}^{[k]} \neq \alpha$.
Soit $p \in [1, +\infty[$. On dit que cette suite **converge vers** $\boldsymbol{\alpha}$ **avec un ordre** p **au moins** si

$$\exists C > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\quad \text{tels que}\quad \forall k \geqslant k_0,\quad \mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k+1]}, \boldsymbol{\alpha}) \leqslant C\,\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha})^p. \tag{3}$$

où $C < 1$ si $p = 1$.
On dit que cette suite **converge vers** $\boldsymbol{\alpha}$ **avec un ordre** p (exactement) si elle converge à l'ordre p au moins et si

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k+1]}, \boldsymbol{\alpha})}{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha})^{p+\varepsilon}} = +\infty. \tag{4}$$

Exemples de distances:

- $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$
- $\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ dans $\mathbb{R}^n$, où $\|.\|$ est l'une quelconque des normes habituelles.

Ordre 1 : convergence **linéaire**, ordre 2 : convergence **quadratique**

Soient (E, d) un **espace métrique** et $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E **convergeant** vers $\boldsymbol{\alpha} \in E$ avec, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u}^{[k]} \neq \alpha$.
Soit $p \in [1, +\infty[$.
La suite **converge vers** $\boldsymbol{\alpha}$ **à l'ordre** 1 (exactement) si

$$\exists \mu \in]0, 1[,\quad \text{tel que}\quad \lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k+1]}, \boldsymbol{\alpha})}{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha})} = \mu. \tag{5}$$

Dans ce cas la convergence est dite **linéaire**.

- Si (5) est vérifiée pour $\mu = 0$, alors la convergence est dites **super-linéaire** .
- Si (5) n'est vérifiée pour aucun $\mu \in]0, 1[$, alors la convergence est dites **sous-linéaire**.

La suite **converge vers** $\boldsymbol{\alpha}$ **à l'ordre** $p > 1$ (exactement) si

$$\exists \mu > 0,\quad \text{tel que}\quad \lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k+1]}, \boldsymbol{\alpha})}{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha})^p} = \mu. \tag{6}$$

et dans ce cas la convergence est **super-linéaire**.
La convergence d'ordre 2 (resp. 3) est dite **quadratique** (resp. **cubique**).
Plus l'ordre est élevé, plus la convergence est rapide

Exercice 3

Soient $I = [0, \pi/2]$ et $\left\{ \begin{array}{rcll} \Phi & : & I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto \sin(x) \end{array} \right.$. Soit $x_0 \in I\backslash\{0\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$x_{k+1} = \Phi(x_k).$$

Q. 1

① Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
② Montrer que la suite converge vers $\alpha \in I$ que l'on déterminera.

Q. 2

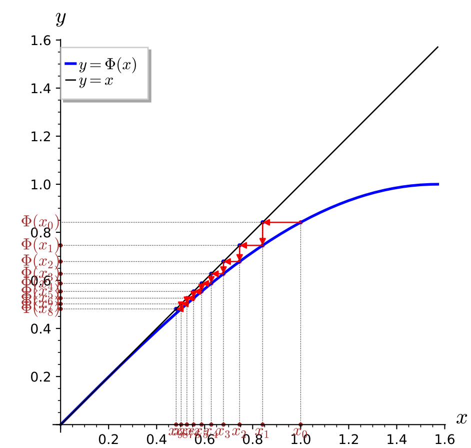
① Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = 1.$$

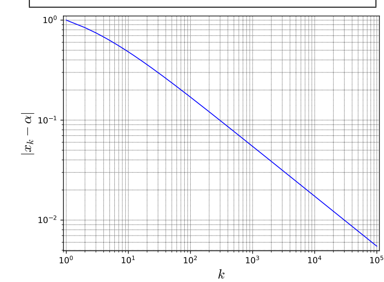
② La convergence est-elle linéaire? Justifier.

$\Phi(x) = \sin(x) \implies$ point fixe: $\alpha = 0$ $(\Phi(\alpha) = \alpha)$.

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)$$



k	x_k	$\lvert x_k - \alpha\rvert$
0	1.0000e+00	1.0000e+00
10	4.6296e-01	4.6296e-01
10^2	1.6885e-01	1.6885e-01
10^3	5.4593e-02	5.4593e-02
10^4	1.7314e-02	1.7314e-02
10^5	5.4770e-03	5.4770e-03



Convergence **sous-linéaire** $\rightarrow$ très leeeeent !!!

Plan

Points fixes

Soit $\Phi : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée. Rechercher un **point fixe** de Φ revient à

> Trouver $\alpha \in [a, b]$ tel que
> $$\alpha = \Phi(\alpha).$$

L'algorithme de la **méthode du point fixe** consiste en la construction, si elle existe, de la suite

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{7}$$

avec $x_0 \in [a, b]$ donné.
Supposons que la suite soit bien définie et qu'elle converge vers un point fixe α de Φ.

- Que peut-on dire si $x_0 = \alpha$?
- Que peut-on dire si $x_0 \neq \alpha$?

Exercice 4

Soient $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et ϕ une fonction continue de $[a, b]$ dans lui même ($\phi([a, b]) \subset [a, b]$). Soit $x_0 \in [a, b]$. On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Q. 1 Montrer que la suite (1) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).

Q. 2 Montrer que si la suite (1) converge, alors elle converge vers un point fixe de ϕ.

Q. 3 Existence du point fixe : montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $\phi(\alpha) = \alpha$.

On suppose de plus que ϕ est contractante, c'est à dire que

$$\exists\, L \in [0, 1[, \text{tel que}, \ \forall (x, y) \in [a, b]^2, \ |\phi(x) - \phi(y)| \leqslant L|x - y|.$$

Q. 4
1. Montrer que ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$.
2. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers α, pour toute donnée initiale x_0 dans $[a, b]$.

Q. 5 **[Algo]** Écrire l'algorithme du point fixe (fonction PointFixe) permettant de résoudre l'équation $\phi(x) = x$.

Théorème : *Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$ (application continue)*

Soient $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et Φ une application continue de $[a, b]$ dans lui-même. Alors, il existe **au moins** un point $\alpha \in [a, b]$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction** Φ.
De plus, si Φ est contractante (lipschitzienne de rapport $L \in [0, 1[$), c'est à dire

$$\exists L < 1 \text{ t.q. } |\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant L|x - y| \ \forall (x, y) \in [a, b]^2, \tag{8}$$

alors Φ admet un **unique** point fixe $\alpha \in [a, b]$.
Pour tout $x_0 \in [a, b]$, la suite

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{9}$$

est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.
On a les deux estimations suivantes :

$$|x_k - \alpha| \leqslant L^k |x_0 - \alpha|, \ \forall k \geqslant 0, \tag{10}$$

$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{L}{1 - L} |x_k - x_{k-1}|, \ \forall k \geqslant 0, \tag{11}$$

Exercice 5

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, (par ex., avec $a < b$, $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,a]$ ou $\mathbb{R}$) et $\Phi : I \longrightarrow I$ une application contractante. Soit $x_0 \in I$. On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Q. 1 Montrer que la suite (1) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).

On va démontrer que la suite (1) est une suite de Cauchy.

Q. 2

1. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N},\quad |x_{k+1} - x_k| \leqslant L^k|x_1 - x_0|. \tag{2}$$
2. Montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall l \geqslant 0,\quad |x_{k+l} - x_{k+l-1}| \leqslant L^l|x_k - x_{k-1}|. \tag{3}$$
3. En déduire que,
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant 2,\quad |x_{k+p} - x_k| \leqslant \frac{1-L^p}{1-L}L^k|x_1 - x_0|. \tag{4}$$

Q. 3

1. Déduire de la question précédente que la suite (1) est une suite de Cauchy.
2. Montrer que la suite (1) converge vers un point fixe de Φ à l'ordre 1 au moins.
3. Montrer l'unicité du point fixe.

Théorème : *Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$ (application contractante)*

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, et Φ une application contractante de I dans lui-même. Alors, il existe un unique point $\alpha \in I$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction** Φ. Pour tout $x_0 \in I$, la suite

$$x_{k+1} = \Phi(x_k),\ \forall k \in \mathbb{N} \tag{12}$$

est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.

Théorème : *Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$ (application $\mathcal{C}^1$)*

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, et $\Phi \in \mathcal{C}^1(I)$ vérifiant $\Phi(I) \subset I$ et

$$\exists L < 1 \text{ tel que } \forall x \in I,\ |\Phi'(x)| \leqslant L, \tag{13}$$

Soit $x_0 \in I$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. On a alors

1. la fonction Φ admet un unique point fixe $\alpha \in I$,
2. $\forall k \in \mathbb{N},\ x_k \in I$,
3. la suite (x_k) converge vers α avec un ordre 1 au moins.
4. Si $x_0 \neq \alpha$, alors
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \tag{14}$$
et, si $\Phi'(\alpha) \neq 0$, la convergence est d'ordre 1 (exactement).

Théorème : *Convergence locale du point fixe*

Soit α un point fixe d'une fonction Φ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de α.
Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$, alors il existe $\delta > 0$ pour lequel x_k converge vers α pour tout x_0 tel que $|x_0 - \alpha| \leqslant \delta$.
De plus, si $x_0 \neq \alpha$, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \tag{15}$$

si $\Phi'(\alpha) \neq 0$, la convergence est d'ordre 1 (exactement).

Points fixes attractifs et répulsifs

Soit $\Phi : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ admettant un point fixe $\alpha \in [a, b]$.

- Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$ alors α est un point fixe attractif,
- Si $|\Phi'(\alpha)| > 1$ alors α est un point fixe répulsif.

On s'interesse ici au point fixe $\alpha = 1$ de la fonction $\Phi \; : \; x \mapsto x^2$.

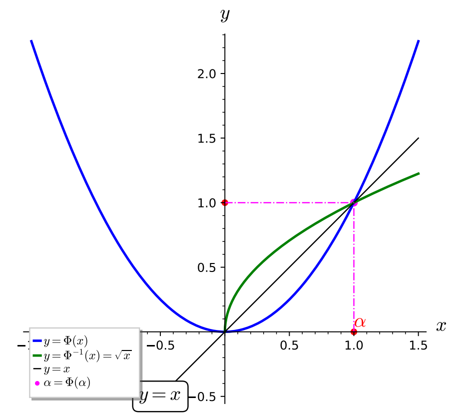
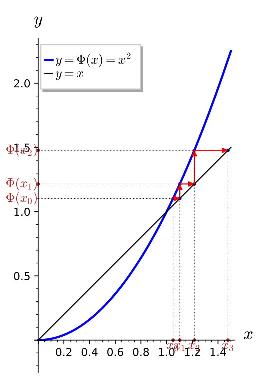
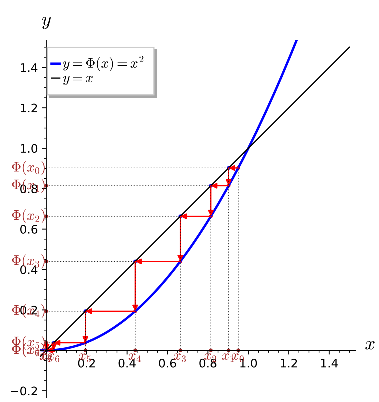


Figure: fonction x^2 et sa fonction réciproque $\sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$

$\Phi'(\alpha) = 2$: **point fixe répulsif**



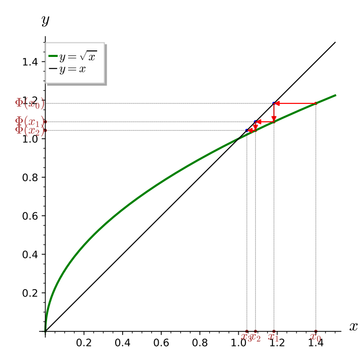
(a) $x_0 = 1.05$



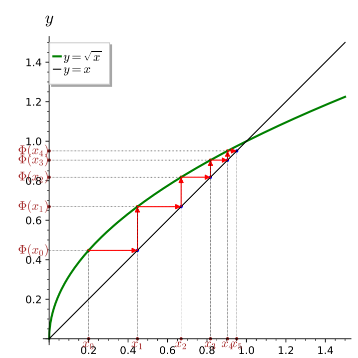
(b) $x_0 = 0.950$

Figure: $\alpha = 1$, point fixe répulsif de $x \mapsto x^2$

$(\Phi^{-1})'(1) = 1/2 < 1,$: **point fixe attractif**



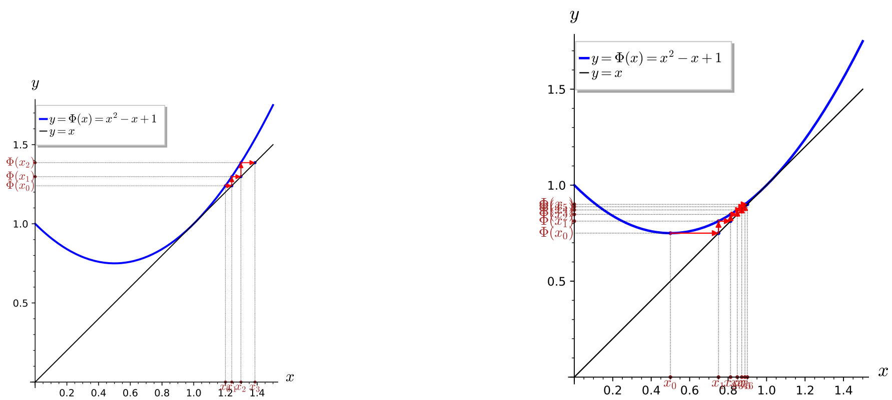
(a) $x_0 = 1.40$



(b) $x_0 = 0.200$

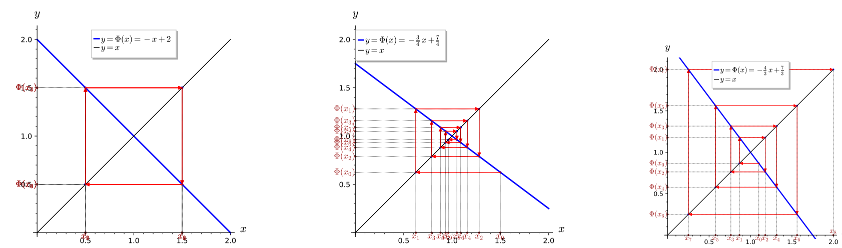
Figure: $\alpha = 1$, point fixe attractif de $\Phi^{-1} : x \mapsto \sqrt{x}$

fonction $\Phi : x \mapsto x^2 - x + 1$: **point fixe $\alpha = 1$, $\Phi'(\alpha) = 1$.**



(a) $x_0 = 1.2$, α point répulsif (b) $x_0 = 0.50$, α point attractif

Figure: $\alpha = 1$, point fixe attractif ou répulsif de $x \mapsto x^2 - x + 1$



(a) $x_0 = 1.50$ (b) $x_0 = 1.50$ (c) $x_0 = 1.10$

Figure: $\alpha = 1$, point fixe de fonctions affines particulières

Ordres

Proposition:

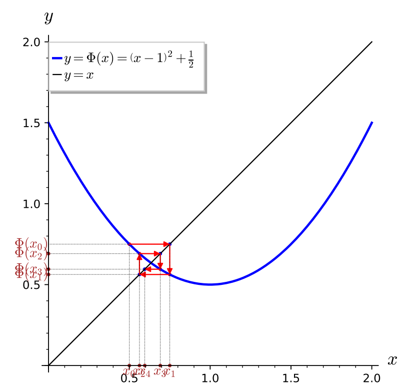
Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $\Phi \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{V})$ pour un certain voisinage $\mathcal{V}$ de α point fixe de Φ. Si $\Phi^{(i)}(\alpha) = 0$, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, alors la méthode de point fixe associée à la fonction Φ est d'ordre $(p+1)$ au moins et

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\Phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \tag{16}$$

Elle est d'ordre $(p+1)$ (exactement) si $\Phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$.

voir exercice :

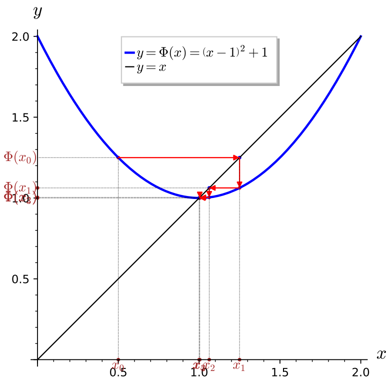
$$\Phi(x) = (x-1)^2 + \frac{1}{2} \Longrightarrow \text{ points fixes: } x = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2},\ x = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}$$



k	x_k	$\tilde{x}_k$	$\lvert x_k - \alpha\rvert$	$\lvert \tilde{x}_k - \alpha\rvert$
0	$\frac{1}{2}$	5.0000e-01	1.3397e-01	1.3397e-01
1	$\frac{3}{4}$	7.5000e-01	1.1603e-01	1.1603e-01
2	$\frac{9}{16}$	5.6250e-01	7.1475e-02	7.1475e-02
3	$\frac{177}{256}$	6.9141e-01	5.7432e-02	5.7432e-02
4	$\vdots$	5.9523e-01	3.8744e-02	3.8744e-02
5	$\vdots$	6.6384e-01	2.9864e-02	2.9864e-02
$\vdots$				
10	$\vdots$	6.2789e-01	6.0842e-03	6.0842e-03
$\vdots$				
20	$\vdots$	6.3370e-01	2.7011e-04	2.7011e-04

$\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}$, $\Phi(\alpha) = \alpha$, $\Phi'(\alpha) = -\sqrt{3} + 1 \neq 0$ et $|\Phi'(\alpha)| < 1$ $\Rightarrow$ convergence d'ordre 1

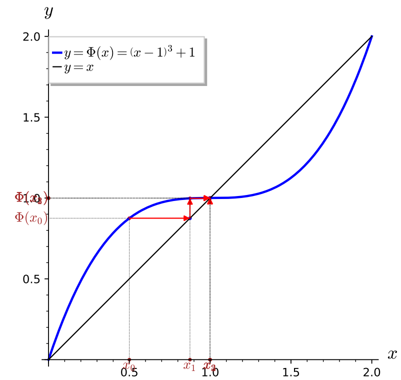
$$\Phi(x) = (x-1)^2 + 1 \Longrightarrow \text{ points fixes: } x = 1,\ x = 2$$



k	x_k	$\widetilde{x}_k$	$\lvert x_k - \alpha\rvert$	$\lvert\widetilde{x}_k - \alpha\rvert$
0	$\frac{1}{2}$	5.0000e-01	5.0000e-01	5.0000e-01
1	$\frac{5}{4}$	1.2500e+00	2.5000e-01	2.5000e-01
2	$\frac{17}{16}$	1.0625e+00	6.2500e-02	6.2500e-02
3	$\frac{257}{256}$	1.0039e+00	3.9062e-03	3.9062e-03
4	$\vdots$	1.0000e+00	1.5259e-05	1.5259e-05
5	$\vdots$	1.0000e+00	2.3283e-10	2.3283e-10
6	$\vdots$	1.0000e+00	5.4210e-20	0.0000e+00
7	$\vdots$	1.0000e+00	2.9387e-39	0.0000e+00

$\alpha = 1,\ \Phi(\alpha) = \alpha,\ \Phi'(\alpha) = 0$ et $\Phi''(\alpha) = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow$ convergence d'ordre 2

$$\Phi(x) = (x-1)^3 + 1 \Longrightarrow \text{ points fixes: } x = 1,\ x = 2,,\ x = 0$$



k	x_k	$\widetilde{x}_k$	$\lvert x_k - \alpha\rvert$	$\lvert\widetilde{x}_k - \alpha\rvert$
0	$\frac{1}{2}$	5.0000e-01	5.0000e-01	5.0000e-01
1	$\frac{7}{8}$	8.7500e-01	1.2500e-01	1.2500e-01
2	$\frac{511}{512}$	9.9805e-01	1.9531e-03	1.9531e-03
3	$\frac{134217727}{134217728}$	1.0000e+00	7.4506e-09	7.4506e-09
4	$\vdots$	1.0000e+00	4.1359e-25	0.0000e+00
5	$\vdots$	1.0000e+00	7.0747e-74	0.0000e+00
6	$\vdots$	1.0000e+00	3.5411e-220	0.0000e+00

$\alpha = 1,\ \Phi(\alpha) = \alpha,\ \Phi'(\alpha) = 0,\ \Phi''(\alpha) = 0$ et $\Phi'''(\alpha) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow$ convergence d'ordre 3

Algorithme générique du point fixe

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}),\ \forall k \in \mathbb{N},\ \text{avec } x^{(0)} \in [a, b] \text{ donné.}$$

Algorithme Méthode de point fixe : version **Tantque** *formel*

$k \leftarrow 0$
Tantque non convergence **faire**
  $x_{k+1} \leftarrow \Phi(x_k)$
  $k \leftarrow k + 1$
Fin Tantque
$\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x_k$ ▷ le dernier calculé.

Algorithme Méthode de point fixe : version **Répéter** *formel*

$k \leftarrow 0$
Répéter
  $k \leftarrow k + 1$
  $x_k \leftarrow \Phi(x_{k-1})$
jusqu'à convergence
$\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x_k$ ▷ le dernier calculé.

Critères d'arrêt?

- On n'est pas sûr de converger $\Longrightarrow$ kmax: nb maximum d'itérations,
- Si on converge, on s'arrête dès que $|\Phi(x_k) - x_k| = |x_{k+1} - x_k| \leqslant \text{tol}$.

Algorithme Méthode de point fixe : version **Tantque** *formel* avec critères d'arrêt

$k \leftarrow 0$
$\text{err} \leftarrow |\Phi(x_0) - x_0|$ ▷ ou $\frac{|\Phi(x_0)-x_0|}{|x_0|+1}$
Tantque $\text{err} > \epsilon$ et $k \leqslant \text{kmax}$ **faire**
  $k \leftarrow k + 1$
  $x_k \leftarrow \Phi(x_{k-1})$
  $\text{err} \leftarrow |\Phi(x_k) - x_k|$ ▷ ou $\frac{|\Phi(x_k)-x_k|}{|x_k|+1}$
Fin Tantque
Si $\text{err} \leqslant \text{tol}$ **alors** ▷ Convergence
  $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x_k$ ▷ $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leqslant \text{tol}$
Fin Si

Algorithme Méthode de point fixe : version **Répéter** *formel* avec critères d'arrêt

$k \leftarrow 0$
Répéter
  $\text{err} \leftarrow |\Phi(x_k) - x_k|$ ▷ ou $\frac{|\Phi(x_k)-x_k|}{|x_k|+1}$
  $x_{k+1} \leftarrow \Phi(x_k)$
  $k \leftarrow k + 1$
jusqu'à $\text{err} \leqslant \text{tol}$ ou $k > \text{kmax}$
Si $\text{err} \leqslant \text{tol}$ **alors** ▷ Convergence
  $\alpha_{\text{tol}} \leftarrow x_k$ ▷ $|\Phi(\alpha_{\text{tol}}) - \alpha_{\text{tol}}| \leqslant \text{tol}$
Fin Si

Algorithme Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$ (ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

```
Fonction α_tol ← PtFixe( Φ, x0, tol, kmax )
  k ← 0, α_tol ← ∅
  x ← x0, fx ← Φ(x0),
  err ← |fx − x|                              ▷ ou |fx−x|/(|x|+1)
  Tantque err > tol et k ⩽ kmax faire
    k ← k + 1
    x ← fx
    fx ← Φ(x)
    err ← |fx − x|                            ▷ ou |fx−x|/(|x|+1)
  Fin Tantque
  Si err ⩽ tol alors                          ▷ Convergence
    α_tol ← x
  Fin Si
Fin Fonction
```

Algorithme Méthode de point fixe : version **Répéter** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$ (ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

```
Fonction α_tol ← PtFixe( Φ, x0, tol, kmax )
  k ← 0, α_tol ← ∅
  x ← x0
  Répéter
    xp ← x
    x ← Φ(xp)
    err ← |x − xp|                            ▷ ou |x−xp|/(|xp|+1)
    k ← k + 1
  jusqu'à err ⩽ tol ou k > kmax
  Si err ⩽ tol alors                          ▷ Convergence
    α_tol ← x
  Fin Si
Fin Fonction
```


Points fixes pour la recherche de racines

$$f(x) = 0 \iff \Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + f(x) = x.$$

si $\mathcal{F} \in \mathcal{C}^0$ tel que $\mathcal{F}(0) = 0$ alors

$$f(x) = 0 \iff \Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + \mathcal{F}(f(x)) = x.$$

Objectif : Construire une suite x_{k+1} tel que $|x_{k+1} - \alpha| \leqslant |x_k - \alpha|$.

formule de taylor :

$$f(\alpha) = 0 = f(x_k) + hf'(\xi) \text{ avec } h = \alpha - x_k.$$

Soit $q_k \approx f'(\xi)$ et $\tilde{h}$ solution de

$$f(x_k) + \tilde{h} q_k = 0$$

Si $q_k \neq 0$, on obtient la suite itérative $x_{k+1} = x_k + \tilde{h}$ i.e.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}, \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{17}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{q_k}, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

x_{k+1} : intersection droite de pente q_k passant par $((x_k), f(x_k))$ avec (Ox)

- **Méthode de la corde** :
$$q_k = q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
- **Méthode de la sécante** :
$$q_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$
  où x_{-1} et x_0 sont données,
- **Méthode de Newton** : en supposant f' connu, on prend
$$q_k = f'(x_k).$$

Méthode de la corde

Exercice 6

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ vérifiant $f(a)f(b) < 0.$ et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On note $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}$.

Q. 1 Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leqslant f(x) \leqslant \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \tag{1}$$

alors $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$.

Q. 2 Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \tag{2}$$

alors $|\Phi'(x)| < 1$.

On se place sous les conditions (1) et (2).
Soit $x_0 \in [a, b]$ donné et on note

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Q. 3 Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle converge vers l'unique solution $\alpha \in [a, b]$ de $f(x) = 0$.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

On pose $\Phi(x) = x - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x)$, alors $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.

Proposition: convergence, méthode de la corde

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$ et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On suppose de plus que $\forall x \in [a,b]$

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leqslant f(x) \leqslant \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (18)$$

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (19)$$

On note $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par $x_0 \in [a,b]$ et pour tout $k \geqslant 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}. \quad (20)$$

alors la suite (x_k) est bien définie et converge vers l'unique racine $\alpha \in [a,b]$ de f.

Proposition: ordre de convergence de la méthode de la corde

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la méthode de la corde

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N} \text{ avec } x_0 \in [a,b]$$

Si cette suite converge vers $\alpha \in]a,b[$ alors la convergence est au moins d'ordre 1.
De plus, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un certain voisinage $\mathcal{V}$ de α et si $f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ alors la convergence est au moins d'ordre 2.

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :
- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :
- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$ (ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

```
Fonction α_tol ← PtFixe( Φ, x_0, tol, kmax )
    k ← 0, α_tol ← ∅
    x ← x_0,
    err ← tol + 1
    Tantque err > tol et k ⩽ kmax faire
        k ← k + 1
        xp ← x
        x ← Φ(xp)
        err ← |x − xp|                          ▷ ou |xp−x|/(|x|+1)
    Fin Tantque
    Si err ⩽ tol alors                          ▷ Convergence
        α_tol ← x
    Fin Si
Fin Fonction
```

Méthode de la corde :

$$\Phi(x) = x - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x)$$

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :
- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :
- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$ (ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

```
Fonction α_tol ← PtFixe( Φ, x_0, tol, kmax )
    k ← 0, α_tol ← ∅
    x ← x_0,
    err ← tol + 1
    Tantque err > tol et k ⩽ kmax faire
        k ← k + 1
        xp ← x
        x ← Φ(xp)
        err ← |x − xp|                          ▷ ou |xp−x|/(|x|+1)
    Fin Tantque
    Si err ⩽ tol alors                          ▷ Convergence
        α_tol ← x
    Fin Si
Fin Fonction
```


Algorithme Méthode de la corde

Données :
- f : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- $a, \ b$: deux réels tels que $f(a) \neq f(b)$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :
- α_{tol} : un réel tel que $|f(\alpha_{\mathrm{tol}})| \leqslant \mathrm{tol}$

```
Fonction α_tol ← Corde( f, a, b, x_0, tol, kmax )
    k ← 0, α_tol ← ∅
    q ← (b−a)/(f(b)−f(a))
    x ← x_0,
    err ← tol + 1
    Tantque err > tol et k ⩽ kmax faire
        k ← k + 1
        xp ← x
        x ← xp − q ∗ f(xp)
        err ← |x − xp|
    Fin Tantque
    Si err ⩽ tol alors                          ▷ Convergence
        α_tol ← x
    Fin Si
Fin Fonction
```

Plus simple, plus court ... ???

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :

- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$ (ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

```
Fonction α_tol ← PtFixe( Φ, x0, tol, kmax )
  k ← 0, α_tol ← ∅
  x ← x0,
  err ← tol + 1
  Tantque err > tol et k ⩽ kmax faire
    k ← k + 1
    xp ← x
    x ← Φ(xp)
    err ← |x − xp|                          ▷ ou |xp−x|/(|x|+1)
  Fin Tantque
  Si err ⩽ tol alors                        ▷ Convergence
    α_tol ← x
  Fin Si
Fin Fonction
```

Algorithme Méthode de la corde utilisant la fonction PtFixe

Données :

- f : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- $a,\ b$: deux réels tels que $f(a) \neq f(b)$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

- α_{tol} : un réel tel que $|f(\alpha_{\mathrm{tol}})| \leqslant \mathrm{tol}$

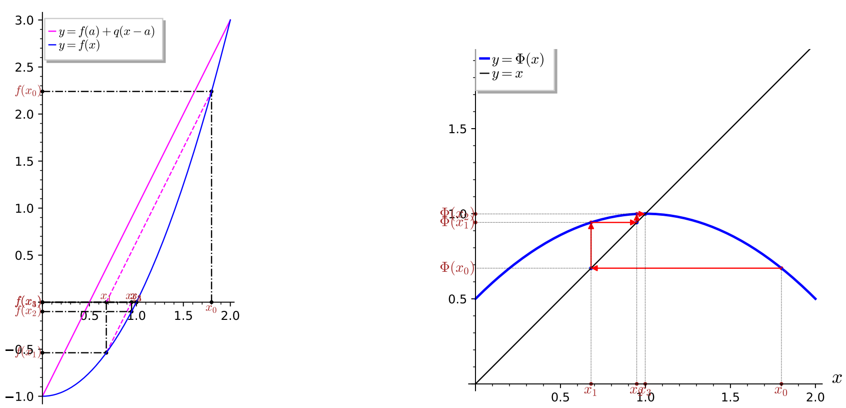
```
Fonction α_tol ← Corde( f, a, b, x0, tol, kmax )
  q ← (b−a)/(f(b)−f(a))
  Φ ← (x ↦ x − q ∗ f(x))                    ▷ définition de fonction
  α_tol ← PtFixe(Φ, x0, tol, kmax)
Fin Fonction
```


$\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$

- exemple 1 : $a = 0.000$, $b = 2.000$, $x_0 = 1.800$,
- exemple 2 : $a = 0.5000$, $b = 1.900$, $x_0 = 1.800$.

	exemple 1			exemple 2		
k	x_k	$\|x_k - \alpha\|$	$\|\tilde{x}_k - \alpha\|$	x_k	$\|x_k - \alpha\|$	$\|\tilde{x}_k - \alpha\|$
0	$\frac{9}{5}$	8.0000e-01	8.0000e-01	$\frac{9}{5}$	8.0000e-01	8.0000e-01
1	$\frac{17}{25}$	3.2000e-01	3.2000e-01	$\frac{13}{15}$	1.3333e-01	1.3333e-01
2	$\frac{593}{625}$	5.1200e-02	5.1200e-02	$\frac{131}{135}$	2.9630e-02	2.9630e-02
3	$\frac{390113}{390625}$	1.3107e-03	1.3107e-03	$\frac{10877}{10935}$	5.3041e-03	5.3041e-03
4	$\vdots$	8.5899e-07	8.5899e-07	$\vdots$	8.9573e-04	8.9573e-04
5	$\vdots$	3.6893e-13	3.6893e-13	$\vdots$	1.4962e-04	1.4962e-04
6	$\vdots$	6.8056e-26	0.0000e+00	$\vdots$	2.4947e-05	2.4947e-05
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10	$\vdots$	6.463e-408		$\vdots$	1.9250e-08	1.9250e-08

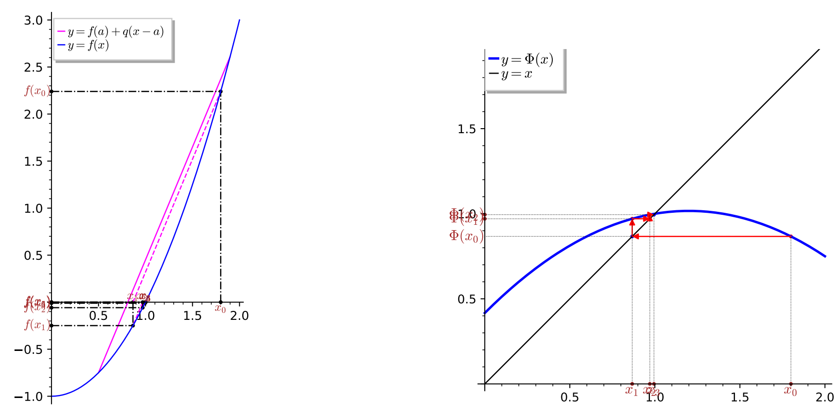
L'exemple 1 converge beaucoup plus rapidement



(a) représentation usuelle

(b) Représentation point fixe

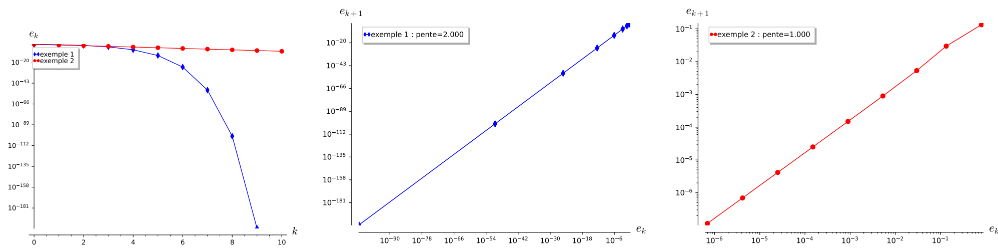
Figure: Exemple 1, méthode de la corde, $\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$ avec $a = 0.00$, $b = 2.00$, $x_0 = 1.80$,



(a) représentation usuelle

(b) Représentation point fixe

Figure: Exemple 2, méthode de la corde, $\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$ avec $a = 0.50$, $b = 1.90$, $x_0 = 1.80$,



(a) Erreurs en fonctions des itérations

(b) Représentation en échelle logarithmique de e_{k+1} en fonction de e_k. Les pentes sont calculées numériquement

Figure: Exemples 1 et 2, méthode de la corde, $\alpha = 1$, racine de $f \ : \ x \mapsto x^2 - 1$

Exemple 1 : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2$ et $f'(\alpha) = 2 \Rightarrow$ convergence ordre 2.

Exemple 2 : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 2.400 \neq f'(\alpha) = 2 \Rightarrow$ convergence ordre 1.

Méthode de Newton

Proposition: convergence de la méthode de Newton

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un certain voisinage d'une racine simple α de f. Soit x_0 donné dans ce voisinage, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

est localement convergente d'ordre 2.

Exercice 7

En -1700 av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur $\sqrt{2}$, ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e-7$.

Q. 1 Comment feriez-vous pour trouver **à la main** une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant $\sqrt{2}$.

Q. 2 Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt{a}$ où a est un réel positif.

Q. 3 Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt[n]{a}$ où a est un réel positif et $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :
- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :
- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$ (ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}})-\alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PtFixe($\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$)
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \Phi(\mathrm{xp})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{xp}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Méthode de Newton :

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :
- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :
- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$ (ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{PtFixe}(\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax})$
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \Phi(\mathrm{xp})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{xp}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Algorithme Méthode de Newton

Données :
- f : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- df : la dérivée de f,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :
- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{Newton}(f, \mathrm{df}, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax})$
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \mathrm{xp} - f(\mathrm{xp})/\mathrm{df}(\mathrm{xp})$ ▷ $\mathrm{df}(\mathrm{xp}) \neq 0$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Plus simple, plus court ... ???

Méthode de point fixe : version **Tantque** avec critères d'arrêt

Données :
- Φ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :
- α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$ (ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{PtFixe}(\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax})$
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \Phi(\mathrm{xp})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{xp}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors** ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Algorithme Méthode de Newton scalaire

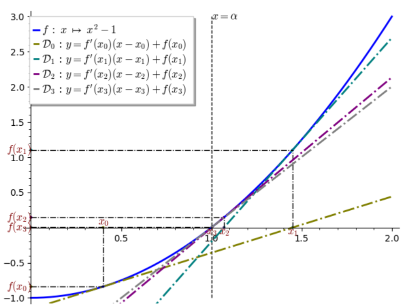
Données :
- f : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- df : la dérivée de f,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :
- α_{tol} : un réel tel que

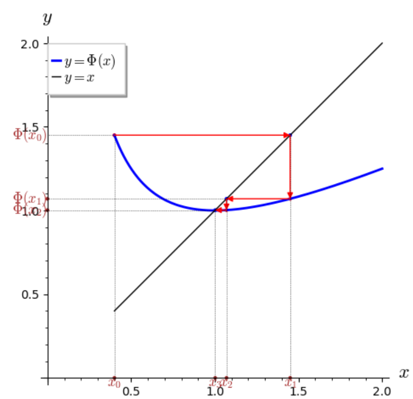
Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{Newton}(f, \mathrm{df}, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax})$
  $\Phi \leftarrow (x \mapsto x - f(x)/\mathrm{df}(x))$
  $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{PtFixe}(\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax})$
Fin Fonction

Plus simple, plus court ... ???

Recherche des zéros d'une fonction | Points fixes d'une fonction (dimension 1) | 2024/10/08 | 59 / 85

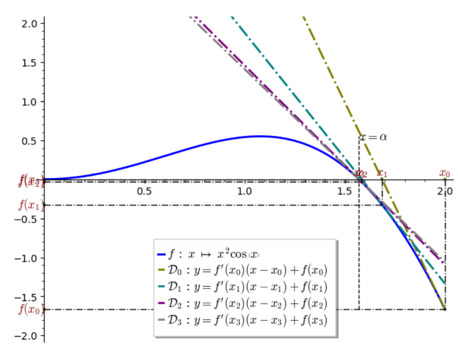


(a) représentation usuelle

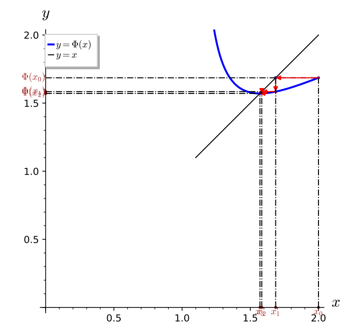


(b) Représentation point fixe avec $\Phi : x \mapsto x - \frac{x^2 - 1}{2x}$

Figure: Exemple 1, méthode de Newton, $\alpha = 1$, racine de $f : x \mapsto x^2 - 1$ avec $x_0 = 0.40$,

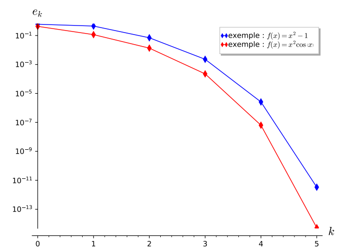


(a) représentation usuelle

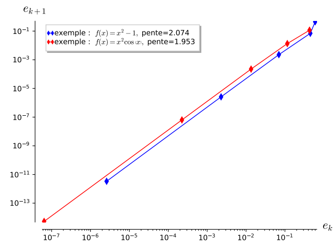


(b) Représentation point fixe avec $\Phi : x \mapsto \frac{x^2 \cos(x)}{x^2 \sin(x) - 2x\cos(x)} + x$

Figure: Exemple 2, méthode de Newton, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, racine de $f : x \mapsto x^2 \cos(x)$ avec $x_0 = 2.00$,



(a) Représentation de la convergence, e_k en fonction de k



(b) Représentation de l'ordre de convergence en échelle logarithmique, e_{k+1} en fonction de e_k . Ordre théorique 2

Figure: Méthode de Newton, convergence et ordre

Méthode de la sécante

Alternative à la méthode de Newton lorsque l'on ne connait pas la dérivée de la fonction f :

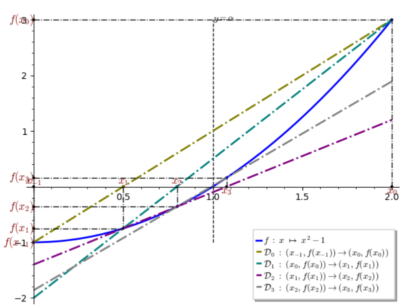
$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Proposition: Convergence méthode de la sécante (Admis)

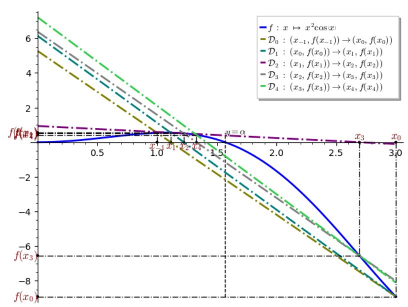
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un certain voisinage d'une racine simple α de f. Soient x_{-1} et x_0 donnés dans ce voisinage tels que $f(x_{-1}) \neq f(x_0)$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de la sécante

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

est localement convergente d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

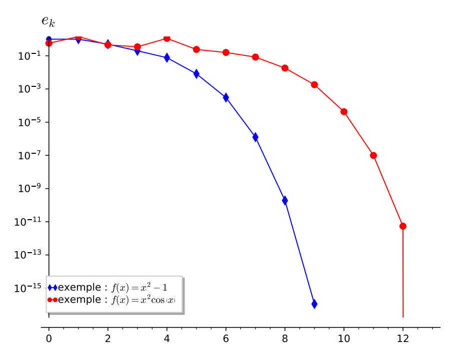


(a) $f(x) = x^2 - 1$, $x_{-1} = 0.000$ et $x_0 = 2.000$

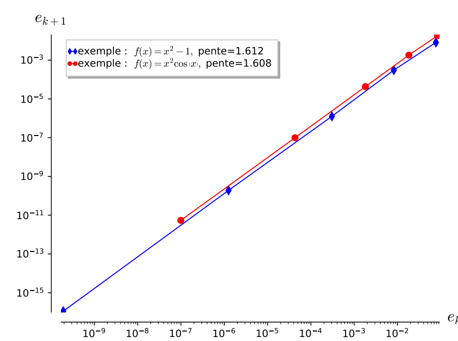


(b) $f(x) = x^2\cos(x)$, $x_{-1} = 1.000$ et $x_0 = 3.000$

Figure: Méthode de la sécante



(a) Représentation de la convergence, e_k en fonction de k



(b) Représentation de l'ordre de convergence en échelle logarithmique, e_{k+1} en fonction de e_k . Ordre théorique $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

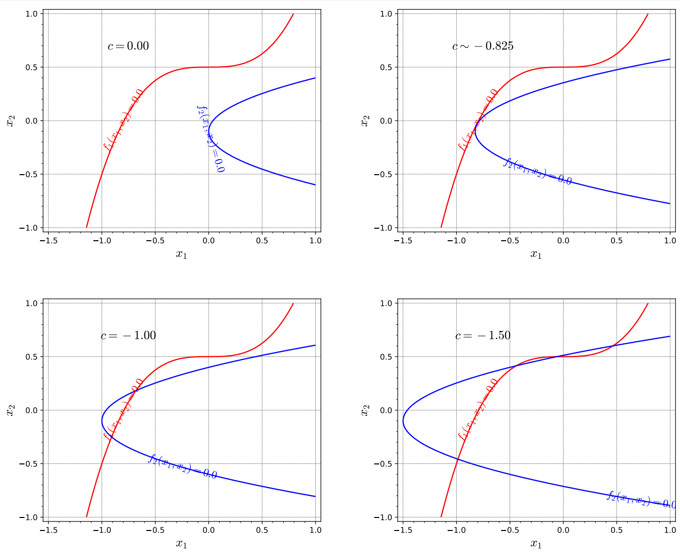
Figure: Méthode de la sécante, convergence et ordre

Plan

Résolution de systèmes non linéaires

Soit $c \in \mathbb{R}$ donné.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 - \frac{1}{2} & = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{25}\,(10\,x_2 + 1)^2 + c - x_1 & = 0. \end{cases} \tag{23}$$



Soient $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^0(U; \mathbb{R}^N)$

Trouver $\boldsymbol{\alpha} \in U \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0 \iff \begin{cases} \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & 0 \\ \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & 0 \\ \vdots & & \\ \boldsymbol{f}_N(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & 0 \end{cases}$$

On pose, par ex., $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, : $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ Point fixe

Trouver $\boldsymbol{\alpha} \in U \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} \iff \begin{cases} \boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\Phi}_2(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots & & \\ \boldsymbol{\Phi}_N(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_N) & = & \boldsymbol{\alpha}_N \end{cases}$$

Plan

Théorème : *Point fixe de Banach* ☆☆☆☆☆

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $U \subset \mathcal{B}$ un sous-ensemble fermé. On suppose que $\boldsymbol{\Phi} : U \longrightarrow U$ est une application strictement contractante, i.e.

$$\exists L \in [0,1[, \quad \|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y})\| \leqslant L \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|, \quad \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in U \times U. \tag{24}$$

Alors

1. $\boldsymbol{\Phi}$ admet un unique point fixe $\boldsymbol{\alpha} \in U$ (i.e. unique solution de $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$).
2. La suite des itérés $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]})$ converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ pour toute valeur initiale $\boldsymbol{x}^{[0]} \in U$.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\left\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| \leqslant \frac{L^{k-l}}{1-L} \left\|\boldsymbol{x}^{[l+1]} - \boldsymbol{x}^{[l]}\right\|, \quad 0 \leqslant l \leqslant k \tag{25}$$

Plan

$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction suffisament régulière. On défini la **matrice Jacobienne de $\boldsymbol{f}$**, notée $\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}$, par

$$\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

On a alors $\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$ à l'ordre 1

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{h}. \tag{26}$$

On a $\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$ à l'ordre 1

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}).\boldsymbol{h}. \tag{27}$$

trouver $\boldsymbol{\alpha}$ tel que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$.

Si $\boldsymbol{x}^{[k]}$ est proche de $\boldsymbol{\alpha}$, alors avec $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{[k]}$ et $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{h}$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) \approx \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]}) + \mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]}).\boldsymbol{h}$$

On résoud le système linéarisé

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]}) + \mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]}).\tilde{\boldsymbol{h}} = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]}).\tilde{\boldsymbol{h}} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]}).$$

On pose $\Phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - ((\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}))^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. la méthode de Newton s'écrit alors

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \Phi(\boldsymbol{x}^{[k]}) = \boldsymbol{x}^{[k]} - \left((\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]})\right)^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]}) \tag{28}$$

Théorème : *(Admis)*

Soit $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. On suppose que la matrice Jacobienne appliquée en $\boldsymbol{x}$, $\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})$ est inversible dans un voisinage de $\boldsymbol{\alpha}$, avec $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$. Alors pour tout $\boldsymbol{x}^{[0]}$ suffisament proche de $\boldsymbol{\alpha}$ la suite définie par

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}^{[k]} - \left((\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]})\right)^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$$

converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ et la convergence est d'ordre 2.

Comment fait-on pour calculer $-\left((\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]})\right)^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$?

Théorème : *(Admis)*

Soit $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. On suppose que la matrice Jacobienne appliquée en $\boldsymbol{x}$, $\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})$ est inversible dans un voisinage de $\boldsymbol{\alpha}$, avec $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$. Alors pour tout $\boldsymbol{x}^{[0]}$ suffisament proche de $\boldsymbol{\alpha}$ la suite définie par

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}^{[k]} - \left((\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]})\right)^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$$

converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ et la convergence est d'ordre 2.

Comment fait-on pour calculer $-\left((\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]})\right)^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$?

On résoud le système linéaire

$$\left((\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]})\right)\boldsymbol{h} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$$

Remarque : Si l'on ne connait pas explicitement la Jacobienne de f, il est possible de calculer une approximation de celle-ci en utilisant des formules de dérivation numérique.

Méthode de Newton scalaire

Données :
- f : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
- df : la dérivée de f,
- x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
- tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
- kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :
- α_{tol} : un réel tel que

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ Newton($f, \mathrm{df}, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$)
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \mathrm{xp} - f(\mathrm{xp})/\mathrm{df}(\mathrm{xp})$ $\triangleright$ $\mathrm{x} \leftarrow \Phi(\mathrm{xp})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors**
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Méthode de Newton *vectorielle* :

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - ((\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}))^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

Méthode de Newton scalaire

Données :

f : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
df : la dérivée de f,
x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ Newton$(\, f, \mathrm{df}, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}\,)$
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{xp} \leftarrow \mathrm{x}$
    $\mathrm{x} \leftarrow \mathrm{xp} - f(\mathrm{xp})/\mathrm{df}(\mathrm{xp})$ ▷ $\mathrm{x} \leftarrow \Phi(\mathrm{xp})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{x} - \mathrm{xp}|$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors**
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Algorithme Méthode de Newton vectorielle

Données :

$\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$,
Jf : la matrice Jacobienne de $\boldsymbol{f}$,
$\boldsymbol{x0}$: donnée initiale, $\boldsymbol{x0} \in \mathbb{R}^N$,
tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}$: un élément de $\mathbb{R}^N$ proche de $\boldsymbol{\alpha}$.

Fonction $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ Newton$(\, \boldsymbol{f}, \mathrm{Jf}, \boldsymbol{x0}, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}\,)$
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{x0}$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{tol} + 1$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\boldsymbol{xp} \leftarrow \boldsymbol{x}$
    $\boldsymbol{h} \leftarrow \mathrm{Solve}(\mathrm{Jf}(\boldsymbol{xp}), -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{xp}))$
    $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{xp} + \boldsymbol{h}$
    $\mathrm{err} \leftarrow \mathrm{Norm}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{xp})$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors**   ▷ Convergence
    $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow \boldsymbol{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Rappel : Point fixe scalaire. Et le cas vectoriel ... ???

Méthode de point fixe scalaire

Données :

Φ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$ (ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PtFixe$(\, \Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}\,)$
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$, $\mathrm{fx} \leftarrow \Phi(x_0)$,
  $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{fx} - \mathrm{x}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{fx}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{x} \leftarrow \mathrm{fx}$
    $\mathrm{fx} \leftarrow \Phi(\mathrm{x})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{fx} - \mathrm{x}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{fx}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors**   ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Algorithme Méthode de Newton scalaire

Données :

f : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
df : la dérivée de f,
x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ Newton$(\, f, \mathrm{df}, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}\,)$
  $\Phi \leftarrow (x \mapsto x - f(x)/\mathrm{df}(x))$
  $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{PtFixe}(\Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax})$
Fin Fonction

Rappel : Point fixe scalaire. Et le cas vectoriel ... ???

Méthode de point fixe scalaire

Données :

Φ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

α_{tol} : un réel tel que $|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}| \leqslant \mathrm{tol}$ (ou $\frac{|\Phi(\alpha_{\mathrm{tol}}) - \alpha_{\mathrm{tol}}|}{|\alpha_{\mathrm{tol}}|+1} \leqslant \mathrm{tol}$)

Fonction $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PtFixe$(\, \Phi, x_0, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}\,)$
  $k \leftarrow 0$, $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\mathrm{x} \leftarrow x_0$, $\mathrm{fx} \leftarrow \Phi(x_0)$,
  $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{fx} - \mathrm{x}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{fx}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\mathrm{x} \leftarrow \mathrm{fx}$
    $\mathrm{fx} \leftarrow \Phi(\mathrm{x})$
    $\mathrm{err} \leftarrow |\mathrm{fx} - \mathrm{x}|$ ▷ ou $\frac{|\mathrm{fx}-\mathrm{x}|}{|\mathrm{x}|+1}$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors**   ▷ Convergence
    $\alpha_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Algorithme Méthode de point fixe vectorielle

Données :

$\boldsymbol{\Phi}$: $\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{K}^N \longrightarrow \mathbb{K}^N$,
$\boldsymbol{x0}$: donnée initiale, $\boldsymbol{x0} \in \mathbb{K}^N$,
tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}$: un réel tel que $\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}) - \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}\| \leqslant \mathrm{tol}$

Fonction $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PtFixeVec$(\, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{x0}, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}\,)$
  $k \leftarrow 0$, $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{x0}$, $\boldsymbol{fx} \leftarrow \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x0})$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \|\boldsymbol{fx} - \boldsymbol{x}\|$ ▷ ou $\frac{\|\boldsymbol{fx}-\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|+1}$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{fx}$
    $\boldsymbol{fx} \leftarrow \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$
    $\mathrm{err} \leftarrow \|\boldsymbol{fx} - \boldsymbol{x}\|$ ▷ ou $\frac{\|\boldsymbol{fx}-\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|+1}$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors**
    $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow \boldsymbol{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Rappel : Point fixe scalaire. Et le cas vectoriel ... ???

Méthode de Newton vectorielle

Données :

$\boldsymbol{f}$: $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$,
Jf : la matrice Jacobienne de $\boldsymbol{f}$,
$\boldsymbol{x0}$: donnée initiale, $\boldsymbol{x0} \in \mathbb{R}^N$,
tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}$: un élément de $\mathbb{R}^N$ proche de $\boldsymbol{\alpha}$.

Fonction $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ NewtonVec$(\, \boldsymbol{f}, \mathrm{Jf}, \boldsymbol{x0}, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}\,)$
  $\boldsymbol{\Phi} \leftarrow (\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} - \mathrm{Solve}(\mathrm{Jf}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})))$
  $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow \mathrm{PtFixeVec}(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{x0}, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax})$
Fin Fonction

Algorithme Méthode de point fixe vectorielle

Données :

$\boldsymbol{\Phi}$: $\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{K}^N \longrightarrow \mathbb{K}^N$,
$\boldsymbol{x0}$: donnée initiale, $\boldsymbol{x0} \in \mathbb{K}^N$,
tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}$: un réel tel que $\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}) - \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}\| \leqslant \mathrm{tol}$

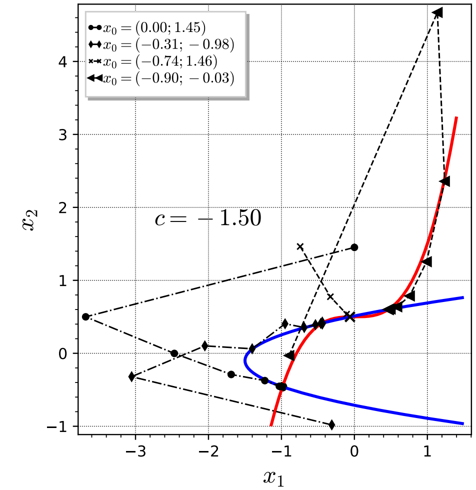
Fonction $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PtFixeVec$(\, \boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{x0}, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}\,)$
  $k \leftarrow 0$, $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{x0}$, $\boldsymbol{fx} \leftarrow \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x0})$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \|\boldsymbol{fx} - \boldsymbol{x}\|$ ▷ ou $\frac{\|\boldsymbol{fx}-\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|+1}$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{fx}$
    $\boldsymbol{fx} \leftarrow \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$
    $\mathrm{err} \leftarrow \|\boldsymbol{fx} - \boldsymbol{x}\|$ ▷ ou $\frac{\|\boldsymbol{fx}-\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|+1}$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors**
    $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow \boldsymbol{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Plan

Représentation de 4 suites de Newton avec $c = -3/2$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 - \frac{1}{2} & = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{25}\left(10\,x_2 + 1\right)^2 + c - x_1 & = 0. \end{cases}$$

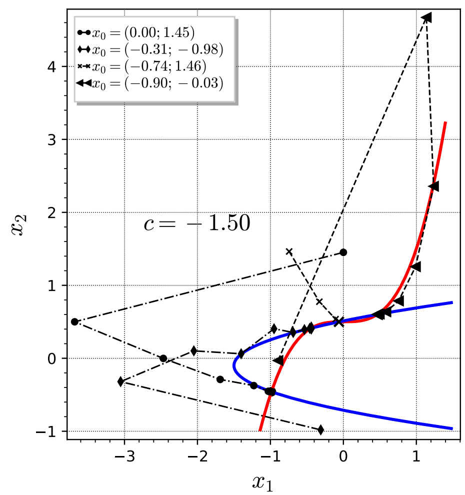
Conclusion?



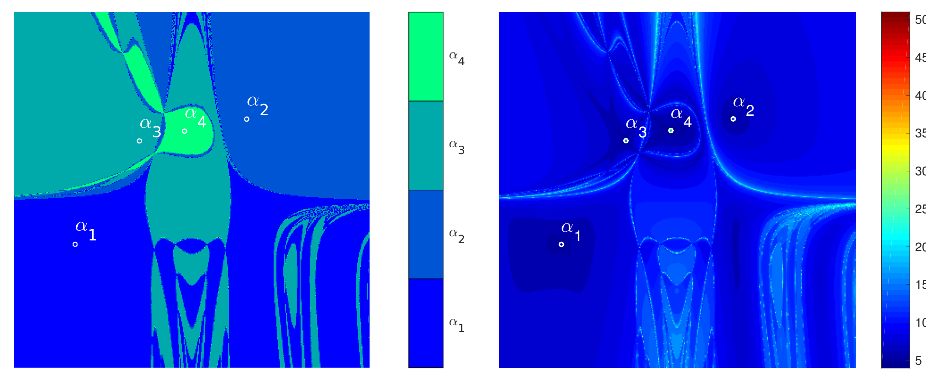
Représentation de 4 suites de Newton avec $c = -3/2$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = -x_1^3 + x_2 - \frac{1}{2} & = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{25}\left(10\,x_2 + 1\right)^2 + c - x_1 & = 0. \end{cases}$$

Conclusion?



Très difficile, si l'on n'est pas suffisament proche d'un point fixe, de prédire vers lequel on converge.



(a) Bassin d'attraction des racines

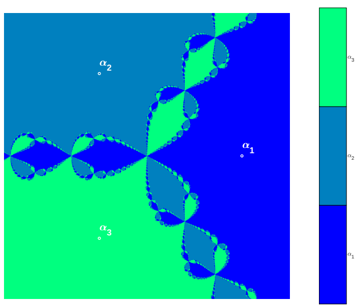
(b) Nombre d'itérations de convergence

Figure: Méthode de Newton

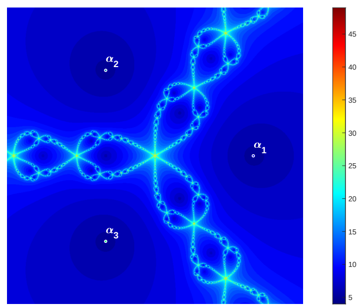
Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton

on peut poser $z = x + \imath y$, et le système équivalent devient

$$\begin{cases} f_1(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 1 & = 0 \\ f_2(x,y) = 3x^2y - y^3 & = 0. \end{cases}$$

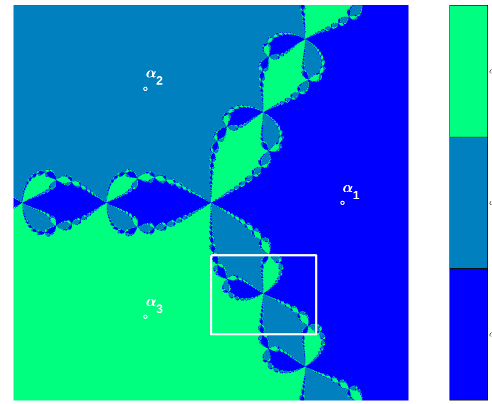


(a) Bassin d'attraction des racines



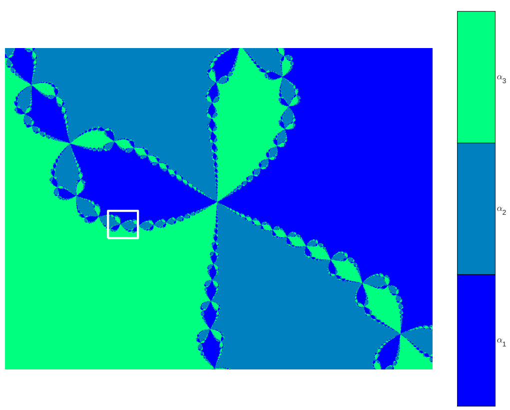
(b) Nombre d'itérations de convergence

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



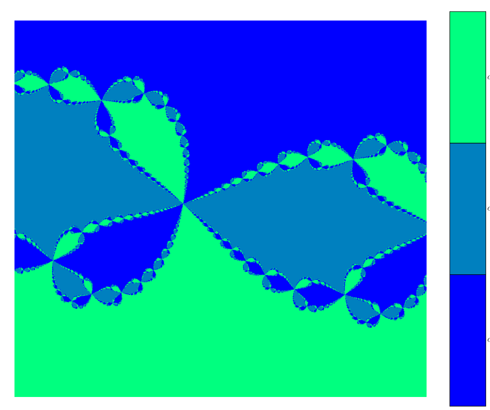
Méthode de Newton, zoom 1 sur les bassins d'attraction

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



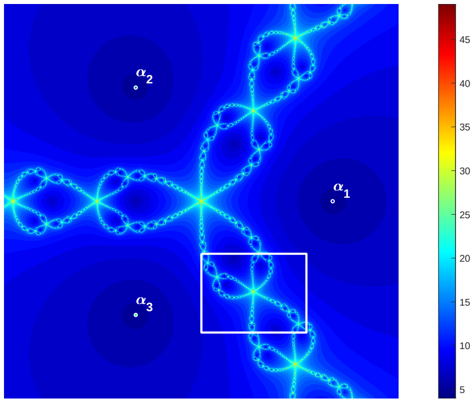
Méthode de Newton, zoom 2 sur les bassins d'attraction

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



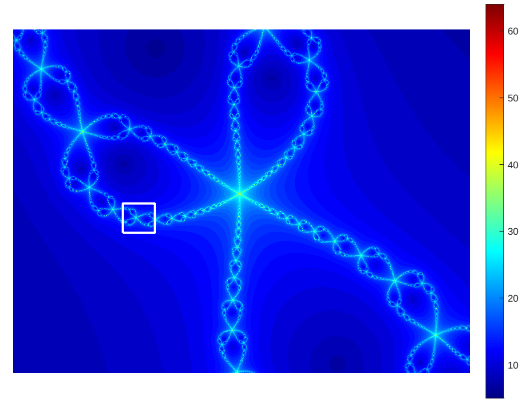
Méthode de Newton, zoom 3 sur les bassins d'attraction

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



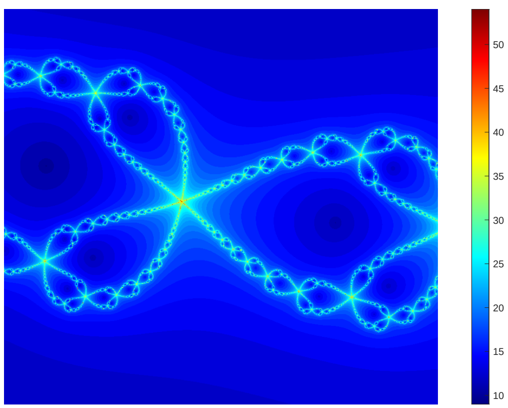
Méthode de Newton, zoom 1 sur les nombres d'itérations

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



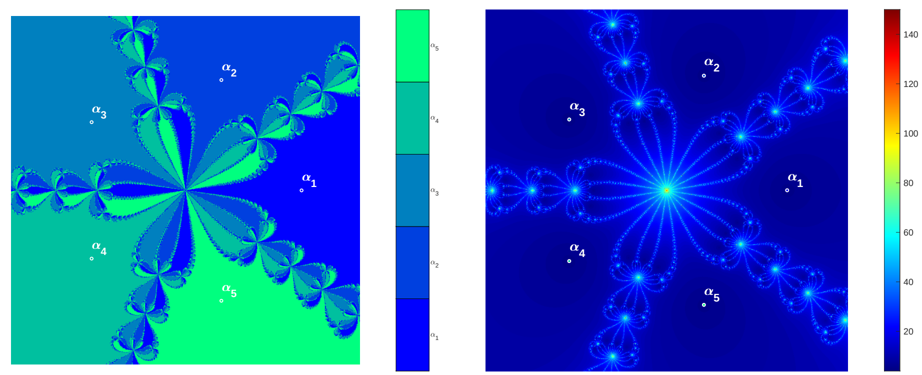
Méthode de Newton, zoom 2 sur les nombres d'itérations

Exemple complexe : $z^3 - 1 = 0$, fractale de Newton



Méthode de Newton, zoom 3 sur les nombres d'itérations

Exemple complexe : $z^5 - 1 = 0$, fractale de Newton

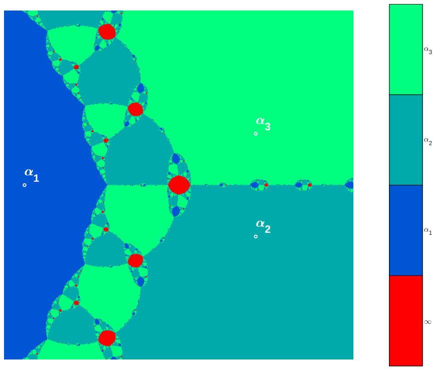


(a) Bassin d'attraction des racines

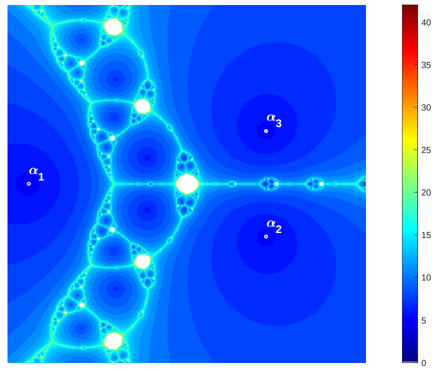
(b) Nombre d'itérations de convergence

$[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$

Exemple complexe : $z^3 - 2z + 2 = 0$, fractale de Newton



(a) Bassin d'attraction des racines. En rouge zône de divergence



(b) Nombre d'itérations de convergence. En blanc zône de divergence

$$[-2, 2] \times [-2, 2]$$