Exercices associés au cours d'*Analyse Numérique I*
Rappels d'Algèbre Linéaire

1 Matrices Blocs

Exercice 1

On considère les matrices blocs suivantes

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array}\right)$$

avec par identification

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Q. 1 *Calculer les matrices* $\mathbb{AB}$ *et* $\mathbb{BA}$ *en utilisant l'écriture bloc.* □

Q. 2 *Exprimer les matrices* $\mathbb{A}(\mathbb{A}+\mathbb{B})$ *et* $(2\mathbb{B}-\mathbb{A})(\mathbb{B}+\mathbb{A})$ *en fonction des matrices* $\mathbb{C}$ *et* $\mathbb{I}$. □

Exercice 2

Soient

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{array}\right)$$

Utiliser la multiplication par blocs pour calculer $\mathbb{AB}$.

Exercice 3

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, bloc-carrés de 2×2 blocs dont le bloc $(1,1)$ est dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

Q. 1 a. *Justifiez de la faisabilité du produit matriciel par blocs de* $\mathbb{AB}$.

b. *Utiliser la multiplication par blocs pour calculer* $\mathbb{AB}$.

□

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, bloc-carrés de 2×2 blocs dont le bloc $(2,2)$ est dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

Q. 2 a. *Justifiez de la faisabilité du produit matriciel par blocs de* $\mathbb{EF}$.

b. *Utiliser la multiplication par blocs pour calculer* $\mathbb{EF}$.

□

Soient n un entier, $n \geqslant 2$, α_1, α_2, deux réels, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{v}_2$, quatre vecteurs (colonne) de $\mathbb{R}^n$, et $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note

$$\forall i \in [\![1, 2]\!], \quad \mathbb{B}_i = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_i & \boldsymbol{v}_i \\ \hline \boldsymbol{u}_i^{\mathsf{t}} & \alpha_i \end{array}\right) \text{ et } \mathbb{C}_i = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_i & \boldsymbol{u}_i^{\mathsf{t}} \\ \hline \boldsymbol{v}_i & \mathbb{A}_i \end{array}\right)$$

Q. 3 a. *Quel est l'ensemble des produits matriciels par blocs possible entre les matrices* $\mathbb{B}_1$, $\mathbb{B}_2$, $\mathbb{C}_1$ *et* $\mathbb{C}_2$.

b. *En utilisant, si possible, la multiplication par blocs, calculer* $\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2$, $\mathbb{B}_1\mathbb{C}_1$ *et* $\mathbb{C}_1\mathbb{C}_2$.

□

Exercice 4

Soient $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $\mathbb{F} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q. 1 *Démontrer par récurrence sur n que*

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_n & \mathbb{O}_{n,m} \\ \hline \mathbb{O}_{m,n} & \mathbb{E} \end{array}\right) = \det \mathbb{E}.$$

□

Q. 2 a. *Donner les dimensions des blocs pour que le produit suivant soit possible et effectuer le calcul:*

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{J}_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array}\right)$$

où $\mathbb{J}_1$ *et* $\mathbb{J}_2$ *sont des matrices identités.*

b. *En déduire le déterminant de* $\mathbb{A}$ *en fonction des déterminants de* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$.

□

Soient $(\mathbb{A}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de matrices carrées (pouvant être de dimensions différentes). Soit $\mathbb{B}_n$ la matrice bloc-carrée diagonale décomposée en $n \times n$ blocs, $n \geqslant 2$, définie par

$$\mathbb{B}_n = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_1 & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{A}_n \end{pmatrix}$$

Q. 3 *Démontrer par récurrence sur n que*

$$\det \mathbb{B}_n = \prod_{i=1}^{n} \det \mathbb{A}_i.$$

□

Exercice 5

Soient $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $\mathbb{F} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q. 1 a. *Démontrer par récurrence sur n que*

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \bullet & \mathbb{I}_n \end{array}\right) = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_n & \bullet \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{E} \end{array}\right) = \det \mathbb{E}.$$

où $\bullet$ note des éléments quelconques *b. Que peut-on dire de*

$$\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \bullet \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_n & \mathbb{O} \\ \hline \bullet & \mathbb{E} \end{array}\right)?$$

□

Q. 2 *a. Donner les dimensions des blocs pour que le produit suivant soit possible et effectuer le calcul:*

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{J}_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array}\right)$$

où $\mathbb{J}_1$ et $\mathbb{J}_2$ sont des matrices identités et $\mathbb{H}$ une matrice.

b. En déduire le déterminant de $\mathbb{A}$ en fonction des déterminants de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$.

□

Soit $\mathbb{B}_n$ la matrice bloc-carrée triangulaire inférieure décomposée en $n \times n$ blocs, $n \geqslant 2$, définie par

$$\mathbb{B}_n = \begin{pmatrix} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \mathbb{O} \\ \mathbb{B}_{n,1} & \cdots & & \mathbb{B}_{n,n} \end{pmatrix}$$

Q. 3 *Démontrer par récurrence sur n que*

$$\det \mathbb{B}_n = \prod_{i=1}^{n} \det \mathbb{B}_{i,i}.$$

□

2 Matrices

Exercice 6

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice et $(\lambda, \boldsymbol{u})$ un élément propre de $\mathbb{A}$ avec $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$.

Q. 1 *En s'aidant de la base canonique $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, construire une base orthonormée $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ telle que $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{u}$.* □

Notons $\mathbb{P}$ la matrice de changement de base canonique $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ dans la base $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$:

$$\mathbb{P} = \left(\begin{array}{c:c:c} \boldsymbol{x}_1 & \ldots & \boldsymbol{x}_n \end{array}\right)$$

Soit $\mathbb{B}$ la matrice définie par $\mathbb{B} = \mathbb{P}^*\mathbb{A}\mathbb{P}$.

Q. 2 *a. Exprimer les coefficients de la matrice $\mathbb{B}$ en fonction de la matrice $\mathbb{A}$ et des vecteurs $\boldsymbol{x}_i$, $i \in [\![1, n]\!]$.*

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^*\mathbb{A}\mathbb{P}.$$

b. En déduire que la première colonne de $\mathbb{B}$ est $(\lambda, 0, \ldots, 0)^t$.

□

Q. 3 *Par récurrence sur l'ordre de la matrice, montrer que la matrice $\mathbb{A}$ peut s'écrire sous la forme*

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$$

où $\mathbb{U}$ est une matrice unitaire et $\mathbb{T}$ une matrice triangulaire supérieure. □

Q. 4 *En supposant $\mathbb{A}$ inversible et la décomposition $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$ connue, expliquer comment résoudre "simplement" le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.* □

3 Normes

Exercice 7

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$.

Q. 1 *Trouver $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\langle \alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle = 0$.* □

Q. 2 *En calculant $\|\alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2$, montrer que*

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2 . \tag{1}$$

□

Q. 3 *Soit $\boldsymbol{x} \neq 0$. Montrer alors que l'inégalité (1) est une égalité si et seulement si $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$.* □

Exercice 8

Q. 1 *Soit la fonction $f(t) = (1-\lambda) + \lambda t - t^\lambda$ avec $0 < \lambda < 1$. Montrer que pour tous $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$ on a*

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leqslant \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta. \tag{2}$$

□

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{C}^n$. Soient $p > 1$ et $q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Q. 2 *On pose $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_p}$ et $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|_q}$. En utilisant l'inégalite (2), montrer que l'on a l'inégalité*

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leqslant \frac{1}{p}\sum_{i=1}^n |u_i|^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^n |v_i|^q = 1. \tag{3}$$

□

Q. 3 *En déduire l'inégalité de Holder suivante*

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q . \tag{4}$$

Quel est le lien entre l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Cauchy-Schwarz? □

Exercice 9

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{K}^n$, on définit l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ par

$$\|\mathbb{A}\|_s \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \tag{5}$$

Q. 1 *Montrer que $\|\mathbb{I}\|_s = 1$.* □

On note $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \ ; \ \|\boldsymbol{v}\| \leqslant 1\}$ la boule unitée de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \ ; \ \|\boldsymbol{v}\| = 1\}$ la sphère unitée de $\mathbb{K}^n$.

Q. 2 *a. Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{S}$ sont des compacts.*

b. Montrer que

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \tag{6}$$

c. En déduire que

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \tag{7}$$

d. En déduire que l'application $\|\bullet\|_s$ est bien définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i.e. $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|\mathbb{A}\|_s < +\infty$.

□

Q. 3 *a. Montrer*

$$\|\mathbb{A}\|_s \leqslant \inf \{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\}.$$

b. Montrer qu'il existe $\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|$.

c. En déduire que

$$\|\mathbb{A}\|_s = \inf \{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\}. \tag{8}$$

□

Q. 4 *a. Montrer que $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$, $\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\|$.*

b. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Montrer qu'il existe $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|\boldsymbol{u}\| = |\lambda|$ vérifiant

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{u}\|.$$

□

Q. 5 *Montrer que $\|\bullet\|_s$ est une norme matricielle.* □

Exercice 10

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\|\mathbb{A}\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1}$$

la norme matricielle suboordonnée à la norme vectorielle $\|\bullet\|_1$.

Q. 1 *Montrer que*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_1=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|.$$

□

Q. 2 *a. Déterminer un $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{y}\|_1 = 1$ tel que*

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_1 = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|.$$

b. Conclure.

□

Q. 3 *`[Algo]` Ecrire une fonction algorithmique, nommée `Norm1`, calculant $\|\mathbb{A}\|_1$.* □

Exercice 11

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}$$

la norme matricielle suboordonnée à la norme vectorielle $\|\bullet\|_\infty$.

Q. 1 *Montrer que*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_\infty=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

□

Q. 2 *a. Déterminer un $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$ tel que*

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

b. Conclure.

□

Q. 3 *`[Algo]` Ecrire une fonction algorithmique, nommée `NormInf`, calculant $\|\mathbb{A}\|_\infty$.* □

Exercice 12

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbb{B} = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$.

Q. 1 *Soit $(\lambda, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ un élément propre de $\mathbb{B}$.*

a. Montrer que la matrice $\mathbb{B}$ est hermitienne.

b. Montrer que les valeurs propres de $\mathbb{B}$ sont réelles.

c. En déduire que

$$\lambda = \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|_2^2}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}.$$

□

La matrice $\mathbb{B}$ étant hermitienne (elle est donc normale), d'après le Théorème de réduction 3.2 page 63, il existe alors une matrice $\mathbb{U}$ unitaire et une matrice $\mathbb{D}$ diagonale telle que

$$\mathbb{B} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*.$$

On note $(\lambda_i, \boldsymbol{e}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ les éléments propres de $\mathbb{D}$. Les vecteurs $\boldsymbol{e}_i$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $\lambda_i = \mathbb{D}_{ii}$.

Q. 2 *a. Démontrer que les $(\lambda_i, \boldsymbol{v}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont les éléments propres de $\mathbb{B}$ où $\boldsymbol{v}_i$ est le i-ème vecteur colonne de $\mathbb{U}$.*

b. En déduire que $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.

□

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$ décomposée dans la base $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$:

$$\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \text{tels que } \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{v}_i.$$

Q. 3 *a. Montrer que*

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = 1.$$

b. Montrer que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|_2=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_2^2 \leqslant \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}).$$

c. Déterminer un vecteur $\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$, tel que

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|_2^2 = \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}).$$

d. En déduire que

$$\|\mathbb{A}\|_2 \stackrel{\mathsf{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})}.$$

□

Q. 4 *a. Montrer que la norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :*

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \Longrightarrow \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 .$$

b. Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne alors

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}).$$

□