# Exercices associés au cours d'*Analyse Numérique I*
## *Rappels d'Algèbre Linéaire*

## 1 Matrices Blocs

### Exercice 1

On considère les matrices blocs suivantes

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array}\right)$$

avec par identification

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Q. 1** *Calculer les matrices $\mathbb{A}\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}\mathbb{A}$ en utilisant l'écriture bloc.* □

---

**R. 1** On a

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C}\mathbb{I} + \mathbb{I}\mathbb{C} & \mathbb{C}\mathbb{O} + \mathbb{I}\mathbb{C} \\ \hline \mathbb{I}\mathbb{I} + \mathbb{O}\mathbb{C} & \mathbb{I}\mathbb{O} + \mathbb{O}\mathbb{C} \end{array}\right)$$

et donc

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c} 2\mathbb{C} & \mathbb{C} \\ \hline \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On a

$$\mathbb{B}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}\mathbb{C} + \mathbb{O}\mathbb{I} & \mathbb{I}\mathbb{I} + \mathbb{O}\mathbb{O} \\ \hline \mathbb{C}\mathbb{C} + \mathbb{C}\mathbb{I} & \mathbb{C}\mathbb{I} + \mathbb{C}\mathbb{O} \end{array}\right)$$

et donc

$$\mathbb{B}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{C}^2 + \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 8 & 12 & 1 & 2 \\ 18 & 26 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

---

**Q. 2** *Exprimer les matrices $\mathbb{A}(\mathbb{A}+\mathbb{B})$ et $(2\mathbb{B}-\mathbb{A})(\mathbb{B}+\mathbb{A})$ en fonction des matrices $\mathbb{C}$ et $\mathbb{I}$.* □

---

**R. 2** On a

$$\mathbb{A}+\mathbb{B}=\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{array}\right)+\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}+\mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{I}+\mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array}\right)$$

ce qui donne

$$\begin{array}{cc} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}+\mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{I}+\mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array}\right) \\ \mathbb{A}(\mathbb{A}+\mathbb{B})=\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array}\right) & =\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}(\mathbb{I}+\mathbb{C})+\mathbb{O}(\mathbb{I}+\mathbb{C}) & \mathbb{I}\mathbb{I}+\mathbb{O}\mathbb{C} \\ \hline \mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C})+\mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C}) & \mathbb{C}\mathbb{I}+\mathbb{C}\mathbb{C} \end{array}\right) \end{array}$$

c'est à dire

$$\mathbb{A}(\mathbb{A}+\mathbb{B})=\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}+\mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline 2\mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C}) & \mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C}) \end{array}\right)$$

On a

$$\begin{array}{cc} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}+\mathbb{C} & \mathbb{I} \\ \hline \mathbb{I}+\mathbb{C} & \mathbb{C} \end{array}\right) \\ (2\mathbb{B}-\mathbb{A})(\mathbb{B}+\mathbb{A})=\left(\begin{array}{c|c} 2\mathbb{I}-\mathbb{C} & -\mathbb{I} \\ \hline 2\mathbb{C}-\mathbb{I} & 2\mathbb{C} \end{array}\right) & =\left(\begin{array}{c|c} (2\mathbb{I}-\mathbb{C})(\mathbb{I}+\mathbb{C})-\mathbb{I}(\mathbb{I}+\mathbb{C}) & (2\mathbb{I}-\mathbb{C})\mathbb{I}-\mathbb{I}\mathbb{C} \\ \hline (2\mathbb{C}-\mathbb{I})(\mathbb{I}+\mathbb{C})+2\mathbb{C}(\mathbb{I}+\mathbb{C}) & (2\mathbb{C}-\mathbb{I})\mathbb{I}+\mathbb{C}+2\mathbb{C}\mathbb{C} \end{array}\right) \end{array}$$

ou encore

$$(2\mathbb{B}-\mathbb{A})(\mathbb{B}+\mathbb{A})=\left(\begin{array}{c|c} (\mathbb{I}-\mathbb{C})(\mathbb{I}+\mathbb{C}) & 2(\mathbb{I}-\mathbb{C}) \\ \hline (4\mathbb{C}-\mathbb{I})(\mathbb{I}+\mathbb{C}) & 2\mathbb{C}^2+2\mathbb{C}-\mathbb{I} \end{array}\right)$$

---

## Exercice 2

Soient

$$\mathbb{A}=\left(\begin{array}{c|cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{B}=\left(\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{array}\right)$$

Utiliser la multiplication par blocs pour calculer $\mathbb{A}\mathbb{B}$.

**Correction** La matrice $\mathbb{A}$ est une matrice bloc de $2\times 3$ blocs et $\mathbb{A}$ est une matrice bloc de $3\times 1$ blocs. Le nombre de blocs colonnes de $\mathbb{A}$ et le nombre de blocs lignes de $\mathbb{B}$ sont identiques (3). De plus, pour tout $j\in[\![1,3]\!]$, le nombre de colonnes du bloc $(1,j)$ de $\mathbb{A}$ est égale au nombre de lignes du bloc $(j,1)$ de $\mathbb{B}$. Le produit bloc de $\mathbb{A}$ par $\mathbb{B}$ est donc possible et le résultat est une matrice bloc de $2\times 1$ blocs, le bloc $(1,1)$ étant dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et le bloc $(2,1)$ étant dans $\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$.
En notant $\mathbb{A}_{i,j}$, $\forall(i,j)\in[\![1,2]\!]\times[\![1,3]\!]$ et $\mathbb{B}_{i,j}$, $\forall(i,j)\in[\![1,2]\!]\times[\![1,3]\!]$

$$\begin{array}{cc} & \left(\begin{array}{c} \mathbb{B}_{1,1} \\ \hline \mathbb{B}_{2,1} \\ \hline \mathbb{B}_{3,1} \end{array}\right) \\ \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{A}_{1,2} & \mathbb{A}_{1,3} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} & \mathbb{A}_{2,3} \end{array}\right) & =\left(\begin{array}{c} \mathbb{A}_{1,1}\mathbb{B}_{1,1}+\mathbb{A}_{1,2}\mathbb{B}_{2,1}+\mathbb{A}_{1,3}\mathbb{B}_{3,1} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1}\mathbb{B}_{1,1}+\mathbb{A}_{2,2}\mathbb{B}_{2,1}+\mathbb{A}_{2,3}\mathbb{B}_{3,1} \end{array}\right) \end{array}$$

On a

$$\mathbb{A}_{1,1}\mathbb{B}_{1,1}=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\quad \mathbb{A}_{1,2}\mathbb{B}_{2,1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathbb{A}_{1,3}\mathbb{B}_{3,1}=\begin{pmatrix} -9 & -18 \\ -9 & -18 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbb{A}_{2,1}\mathbb{B}_{1,1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_{2,2}\mathbb{B}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_{2,3}\mathbb{B}_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \left(\begin{array}{cc} -10 & -19 \\ -10 & -19 \\ \hline -1 & -1 \end{array}\right)$$

◇

## Exercice 3

Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, bloc-carrés de $2 \times 2$ blocs dont le bloc $(1,1)$ est dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

**Q. 1** *a. Justifiez de la faisabilité du produit matriciel par blocs de $\mathbb{A}\mathbb{B}$.*

*b. Utiliser la multiplication par blocs pour calculer $\mathbb{A}\mathbb{B}$.*

□

---

**R. 1** En spécifiant les dimensions, on note

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ n-1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & n-1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{A}_{1,2} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} \end{array}\right) \end{array} \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ n-1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & n-1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbb{B}_{2,1} & \mathbb{B}_{2,2} \end{array}\right) \end{array}$$

a.
- Le nombre de blocs colonnes de $\mathbb{A}$ et le nombre de blocs lignes de $\mathbb{B}$ sont identiques $(= 2)$.
- Le nombre de colonnes du premier bloc colonne de $\mathbb{A}$ est égale au nombre de lignes du premier bloc ligne de $\mathbb{B}$, c'est à dire 1.
- Le nombre de colonnes du deuxième bloc colonne de $\mathbb{A}$ est égale au nombre de lignes du deuxième bloc ligne de $\mathbb{B}$, c'est à dire $n-1$.

Le produit matriciel bloc $\mathbb{A}\mathbb{B}$ est donc possible. Le résultat est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, bloc-carrés de $2 \times 2$ blocs dont le bloc $(1,1)$ est dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et le bloc $(2,2)$ dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

b. On a

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ n-1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & n-1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{B}_{1,2} \\ \hline \mathbb{B}_{2,1} & \mathbb{B}_{2,2} \end{array}\right) \end{array}$$

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ n-1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & n-1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{A}_{1,2} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} \end{array}\right) \end{array} \quad = \begin{array}{c} \\ 1 \\ n-1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & n-1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{1,1}\mathbb{B}_{1,1} + \mathbb{A}_{1,2}\mathbb{B}_{2,1} & \mathbb{A}_{1,1}\mathbb{B}_{1,2} + \mathbb{A}_{1,2}\mathbb{B}_{2,2} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1}\mathbb{B}_{1,1} + \mathbb{A}_{2,2}\mathbb{B}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,1}\mathbb{B}_{1,2} + \mathbb{A}_{2,2}\mathbb{B}_{2,2} \end{array}\right) \end{array}$$

---

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, bloc-carrés de $2 \times 2$ blocs dont le bloc $(2,2)$ est dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

**Q. 2** *a. Justifiez de la faisabilité du produit matriciel par blocs de $\mathbb{E}\mathbb{F}$.*

*b. Utiliser la multiplication par blocs pour calculer $\mathbb{E}\mathbb{F}$.*

□

---

**R. 2** En spécifiant les dimensions, on note

$$\mathbb{E} = \begin{array}{c} \\ n-1 \\ n \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} n-1 & 1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E}_{1,1} & \mathbb{E}_{1,2} \\ \hline \mathbb{E}_{2,1} & \mathbb{E}_{2,2} \end{array}\right) \end{array} \quad \text{et} \quad \mathbb{F} = \begin{array}{c} \\ n-1 \\ 1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} n-1 & 1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{F}_{1,1} & \mathbb{F}_{1,2} \\ \hline \mathbb{F}_{2,1} & \mathbb{F}_{2,2} \end{array}\right) \end{array}$$

a. 
- Le nombre de blocs colonnes de $\mathbb{E}$ et le nombre de blocs lignes de $\mathbb{F}$ sont identiques ($= 2$).
- Le nombre de colonnes du premier bloc colonne de $\mathbb{E}$ est égale au nombre de lignes du premier bloc ligne de $\mathbb{F}$, c'est à dire $n-1$.
- Le nombre de colonnes du deuxième bloc colonne de $\mathbb{E}$ est égale au nombre de lignes du deuxième bloc ligne de $\mathbb{F}$, c'est à dire 1.

Le produit matriciel bloc $\mathbb{E}\mathbb{F}$ est donc possible. Le résultat est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, bloc-carrés de $2 \times 2$ blocs dont le bloc $(1,1)$ est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et le bloc $(2,2)$ dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$

b. On a

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n-1 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} n-1 \\ 1 \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{F}_{1,1} & \mathbb{F}_{1,2} \\ \hline \mathbb{F}_{2,1} & \mathbb{F}_{2,2} \end{array}\right) \end{array}$$

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n-1 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} n-1 \\ 1 \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E}_{1,1} & \mathbb{E}_{1,2} \\ \hline \mathbb{E}_{2,1} & \mathbb{E}_{2,2} \end{array}\right) \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n-1 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} n-1 \\ 1 \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E}_{1,1}\mathbb{F}_{1,1} + \mathbb{E}_{1,2}\mathbb{F}_{2,1} & \mathbb{E}_{1,1}\mathbb{F}_{1,2} + \mathbb{E}_{1,2}\mathbb{F}_{2,2} \\ \hline \mathbb{E}_{2,1}\mathbb{F}_{1,1} + \mathbb{E}_{2,2}\mathbb{F}_{2,1} & \mathbb{E}_{2,1}\mathbb{F}_{1,2} + \mathbb{E}_{2,2}\mathbb{F}_{2,2} \end{array}\right) \end{array}$$

---

Soient $n$ un entier, $n \geqslant 2$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, deux réels, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{v}_2$, quatre vecteurs (colonne) de $\mathbb{R}^n$, et $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note

$$\forall i \in [\![1, 2]\!], \quad \mathbb{B}_i = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_i & \boldsymbol{v}_i \\ \hline \boldsymbol{u}_i^{\mathsf{t}} & \alpha_i \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{C}_i = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_i & \boldsymbol{u}_i^{\mathsf{t}} \\ \hline \boldsymbol{v}_i & \mathbb{A}_i \end{array}\right)$$

**Q. 3** a. *Quel est l'ensemble des produits matriciels par blocs possible entre les matrices* $\mathbb{B}_1$, $\mathbb{B}_2$, $\mathbb{C}_1$ *et* $\mathbb{C}_2$.

b. *En utilisant, si possible, la multiplication par blocs, calculer* $\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2$, $\mathbb{B}_1\mathbb{C}_1$ *et* $\mathbb{C}_1\mathbb{C}_2$.

□

---

**R. 3** a. On peut effectuer les produits matriciels blocs $\mathbb{B}_1\mathbb{B}_1$, $\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2$, $\mathbb{B}_2\mathbb{B}_1$, $\mathbb{B}_2\mathbb{B}_2$, $\mathbb{C}_1\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_1\mathbb{C}_2$, $\mathbb{C}_2\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2\mathbb{C}_2$.

b. Le calcul matriciel bloc de $\mathbb{B}_1$ par $\mathbb{C}_1$ n'est pas possible (incomptabilité des dimensions des blocs). On a

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_2 & \boldsymbol{v}_2 \\ \hline \boldsymbol{u}_2^{\mathsf{t}} & \alpha_2 \end{array}\right)$$

$$\mathbb{B}_1\mathbb{B}_2 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_1 & \boldsymbol{v}_1 \\ \hline \boldsymbol{u}_1^{\mathsf{t}} & \alpha_1 \end{array}\right) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 + \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{u}_2^{\mathsf{t}} & \mathbb{A}_1\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1\alpha_2 \\ \hline \boldsymbol{u}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{A}_2 + \alpha_1\boldsymbol{u}_2^{\mathsf{t}} & \boldsymbol{u}_1^{\mathsf{t}}\boldsymbol{v}_2 + \alpha_1\alpha_2 \end{array}\right) \end{array}$$

et

$$\left(\begin{array}{c|c} \alpha_2 & \boldsymbol{u}_2^{\mathsf{t}} \\ \hline \boldsymbol{v}_2 & \mathbb{A}_2 \end{array}\right)$$

$$\mathbb{C}_1\mathbb{C}_2 = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \boldsymbol{u}_1^{\mathsf{t}} \\ \hline \boldsymbol{v}_1 & \mathbb{A}_1 \end{array}\right) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1\alpha_2 + \boldsymbol{u}_1^{\mathsf{t}}\boldsymbol{v}_2 & \alpha_1\boldsymbol{u}_2^{\mathsf{t}} + \boldsymbol{u}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{A}_2 \\ \hline \boldsymbol{v}_1\alpha_2 + \mathbb{A}_1\boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_1\boldsymbol{u}_2^{\mathsf{t}} + \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 \end{array}\right) \end{array}$$

## Exercice 4

Soient $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $\mathbb{F} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Q. 1** *Démontrer par récurrence sur $n$ que*

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_n & \mathbb{O}_{n,m} \\ \hline \mathbb{O}_{m,n} & \mathbb{E} \end{array}\right) = \det \mathbb{E}.$$

□

---

**R. 1** On note $\mathbb{A}_n$ la matrice de $\mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{K})$ définie par

$$\mathbb{A}_n = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \qquad n \qquad & \qquad m \qquad \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{matrix} & \mathbb{O}_{n,m} \\ \hline \mathbb{O}_{m,n} & \mathbb{E} \end{array}\right) & \begin{array}{c} n \\ \\ m \end{array} \end{array}$$

On va alors démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition suivante

$$(\mathcal{P}_n) \ : \ \det \mathbb{A}_n = \det \mathbb{E}.$$

- **Initialisation:** montrons que $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.
  On a
  $$\mathbb{A}_1 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{E} \\ 0 & \end{array}\right)$$
  Pour le calcul du déterminant, on utilise la méthode des coffacteurs en développant par rapport à la première ligne (on aurait pu aussi développer par rapport à la première colonne) pour obtenir
  $$\det \mathbb{A}_1 = \sum_{j=1}^{1+m} (-1)^{1+j} (\mathbb{A}_1)_{1,j} \det \mathbb{A}_1^{[1,j]}$$
  où $\mathbb{A}_1^{[1,j]} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ est la matrice obtenue en supprimant la ligne 1 et la colonne $j$ de $\mathbb{A}_1$. On a alors
  $$\det \mathbb{A}_1 = (-1)^{1+1} \underbrace{(\mathbb{A}_1)_{1,1}}_{=1} \det \mathbb{A}_1^{[1,1]} + \sum_{j=2}^{1+m} (-1)^{1+j} \underbrace{(\mathbb{A}_1)_{1,j}}_{=0} \det \mathbb{A}_1^{[1,j]}$$
  Comme $\mathbb{A}_1^{[1,1]} = \mathbb{E}$, on en déduit que $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.
- **Hérédité:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $(\mathcal{P}_n)$ vraie et on va établir que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vérifiée. On peut noter que
  $$\mathbb{A}_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{A}_n \\ 0 & \end{array}\right)$$

et donc $\det \mathbb{A}_{n+1} = \det \mathbb{A}_n$ (voir initialisation). En utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit

$$\det \mathbb{A}_{n+1} = \det \mathbb{E}$$

c'est à dire que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

- **Conclusion:** La proposition $(\mathcal{P}_n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La démonstration de

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) = \det \mathbb{E}.$$

est similaire en développant le déterminant par rapport à la dernière ligne ou la dernière colonne.

---

**Q. 2** a. *Donner les dimensions des blocs pour que le produit suivant soit possible et effectuer le calcul:*

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{J}_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array}\right)$$

*où $\mathbb{J}_1$ et $\mathbb{J}_2$ sont des matrices identités.*

b. *En déduire le déterminant de $\mathbb{A}$ en fonction des déterminants de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$.*

□

---

**R. 2** a. On rappelle le définition du produit matricielle blocs avec des matrices de $2 \times 2$ blocs. Soient $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_{m_1+m_2,n_1+n_2}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{Y} \in \mathcal{M}_{p_1+p_2,q_1+q_2}(\mathbb{K})$ les deux matrices blocs

$$\mathbb{X} = \begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{1,1} & \mathbb{X}_{1,2} \\ \hline \mathbb{X}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,2} \end{array}\right) \end{array} \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} q_1 & q_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{Y}_{1,1} & \mathbb{Y}_{1,2} \\ \hline \mathbb{Y}_{2,1} & \mathbb{Y}_{2,2} \end{array}\right) \end{array}$$

Le produit matricielle bloc $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ est possible si, le nombre de blocs colonne de $\mathbb{X}$ est égale au nombre de blocs lignes de $\mathbb{X}$ (ce qui est la cas ici) et si, les nombres de colonnes des blocs de $\mathbb{X}$ sont compatibles avec les nombres de lignes des blocs de $\mathbb{Y}$, c'est à dire,

$$n_1 = p_1 \quad \text{et} \quad n_2 = p_2.$$

Dans ce cas, la matrice $\mathbb{Z} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$ est une matrice de $m_1 + m_2$ lignes et $q_1 + q_2$ colonnes et on a

$$\begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} q_1 & q_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{Y}_{1,1} & \mathbb{Y}_{1,2} \\ \hline \mathbb{Y}_{2,1} & \mathbb{Y}_{2,2} \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} n_1 & n_1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{1,1} & \mathbb{X}_{1,2} \\ \hline \mathbb{X}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,2} \end{array}\right) \end{array} = \begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} q_1 & q_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{1,1}\mathbb{Y}_{1,1} + \mathbb{X}_{1,2}\mathbb{Y}_{2,1} & \mathbb{X}_{1,1}\mathbb{Y}_{1,2} + \mathbb{X}_{1,2}\mathbb{Y}_{2,2} \\ \hline \mathbb{X}_{2,1}\mathbb{Y}_{1,1} + \mathbb{X}_{2,2}\mathbb{Y}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,1}\mathbb{Y}_{1,2} + \mathbb{X}_{2,2}\mathbb{Y}_{2,2} \end{array}\right) \end{array}$$

On va donc appliquer cela à cet exercice en posant

$$\mathbb{X} = \begin{array}{c} \\ m \\ ? \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & ? \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{J}_2 \end{array}\right) \end{array} \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} = \begin{array}{c} \\ ? \\ n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} ? & n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array}\right) \end{array}$$

Pour déterminer les dimensions manquantes, on utilise la définition du produit matriciel blocs pour obtenir

$$\mathbb{X} = \begin{array}{c} \\ m \\ ? \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{J}_2 \end{array}\right) \end{array} \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} = \begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} ? & n \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array}\right) \end{array}$$

On finalise en notant que les matrices identités sont des matrices carrées et donc

$$\mathbb{X} = \begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{J}_2 \end{array}\right) \end{array} \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} = \begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{F} \end{array}\right) \end{array}$$

Sous ces conditions de dimensions le produit matriciel bloc $\mathbb{XY}$ est possible et on a

$$\begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{F} \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{XY} = \begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) \end{array} &= \begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E}\mathbb{I}_m + \mathbb{O}_{m,n}\mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{E}\mathbb{O}_{m,n} + \mathbb{O}_{m,n}\mathbb{F} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m}\mathbb{I}_m + \mathbb{I}_n\mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{O}_{n,m}\mathbb{O}_{m,n} + \mathbb{I}_n\mathbb{F} \end{array}\right) \end{array} \\ &= \begin{array}{c@{}c} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{F} \end{array}\right) \end{array}. \end{aligned}$$

b. Comme le déterminant d'un produit de matrices carrées est le produit des déterminants des matrices carrées, on a

$$\det \mathbb{A} = \det\left(\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{J}_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array}\right)\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{J}_2 \end{array}\right) \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{G} & \mathbb{F} \end{array}\right).$$

En utilisant les résultats de la question 1, on en déduit

$$\det \mathbb{A} = \det \mathbb{E} \det \mathbb{F}.$$

---

Soient $(\mathbb{A}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de matrices carrées (pouvant être de dimensions différentes). Soit $\mathbb{B}_n$ la matrice bloc-carrée diagonale décomposée en $n \times n$ blocs, $n \geqslant 2$, définie par

$$\mathbb{B}_n = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_1 & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{A}_n \end{pmatrix}$$

**Q. 3** *Démontrer par récurrence sur $n$ que*

$$\det \mathbb{B}_n = \prod_{i=1}^{n} \det \mathbb{A}_i.$$

□

---

**R. 3** On va alors démontrer par récurrence sur $n \geqslant 2$ la proposition suivante

$$(\mathcal{Q}_n) \; : \; \det \mathbb{B}_n = \prod_{i=1}^{n} \det \mathbb{A}_i.$$

- **Initialisation:** pour $n = 2$, celà a été fait en question 2.
- **Hérédité:** Soit $n \geqslant 2$, on suppose $(\mathcal{Q}_n)$ vraie et on va établir que $(\mathcal{Q}_{n+1})$ est vérifiée.
  On a

$$\mathbb{B}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_1 & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{O} & \vdots \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{A}_n & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \cdots & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{A}_{n+1} \end{pmatrix}$$

On note que les $n$ premiers blocs lignes et colonnes de $\mathbb{B}_{n+1}$ correspondent à $\mathbb{B}_n$, et donc, on peut aussi écrire

$$\mathbb{B}_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_n & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{A}_{n+1} \end{array}\right)$$

D'après la question 2, on a

$$\det \mathbb{B}_{n+1} = \det \mathbb{B}_n \det \mathbb{A}_{n+1}.$$

Or, par hypothèse de récurrence, $(\mathcal{Q}_n)$ est vérifiée. On en déduit alors que

$$\det \mathbb{B}_{n+1} = \prod_{i=1}^{n} \det \mathbb{A}_i \det \mathbb{A}_{n+1},$$

et donc $(\mathcal{Q}_{n+1})$ est vraie.

- **Conclusion:** La proposition $(\mathcal{Q}_n)$ est vraie, pour tout $n \geqslant 2$.

---

## Exercice 5

Soient $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $\mathbb{F} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{I}_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Q. 1** a. *Démontrer par récurrence sur $n$ que*

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \bullet & \mathbb{I}_n \end{array}\right) = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_n & \bullet \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{E} \end{array}\right) = \det \mathbb{E}.$$

*où $\bullet$ note des éléments quelconques*

b. *Que peut-on dire de*

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \bullet \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) \quad \textit{et} \quad \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_n & \mathbb{O} \\ \hline \bullet & \mathbb{E} \end{array}\right)?$$

$\square$

---

**R. 1** a. On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{K})$ définies par

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \qquad\qquad n \qquad\qquad & \qquad m \qquad \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \\ \hline & & \mathbb{O}_{m,n} & & \mathbb{E} \end{array}\right) & \begin{array}{c} n \\ \\ \\ m \end{array} \end{array}$$

On va alors démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition suivante

$$(\mathcal{P}_n) \ : \ \forall \mathbb{A}_n \in \mathcal{E}_n, \quad \det \mathbb{A}_n = \det \mathbb{E}.$$

- **Initialisation:** montrons que $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.
Soit $A_1 \in \mathcal{E}_1$. On a

$$\mathbb{A}_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{E} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Pour le calcul du déterminant, on utilise la méthode des coffacteurs en développant par rapport à la première colonne pour obtenir

$$\det \mathbb{A}_1 = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} (\mathbb{A}_1)_{i,1} \det \mathbb{A}_1^{[i,1]}$$

où $\mathbb{A}_1^{[i,1]} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ est la matrice obtenue en supprimant la ligne $i$ et la colonne 1 de $\mathbb{A}_1$. On a alors

$$\det \mathbb{A}_1 = (-1)^{1+1} \underbrace{(\mathbb{A}_1)_{1,1}}_{=1} \det \mathbb{A}_1^{[1,1]} + \sum_{i=2}^{m+1} (-1)^{i+1} \underbrace{(\mathbb{A}_1)_{i,1}}_{=0} \det \mathbb{A}_1^{[i,1]}$$

Comme $\mathbb{A}_1^{[1,1]} = \mathbb{E}$, on en déduit que $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.
- **Hérédité:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $(\mathcal{P}_n)$ vraie et on va établir que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vérifiée. Soit $\mathbb{A}_{n+1} \in \mathcal{E}_{n+1}$. On peut noter que

$$\mathbb{A}_{n+1} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \scriptstyle n+1 & \scriptstyle m \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{n+1} & \mathbb{O}_{n+1,m} \\ \hline \mathbb{O}_{m,n+1} & \mathbb{E} \end{array}\right) & \begin{array}{c} \scriptstyle n+1 \\ \scriptstyle m \end{array} \end{array} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \scriptstyle 1 & \scriptstyle n & \scriptstyle m \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & \mathbb{O} & \bullet \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{I}_n & \bullet \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{E} \end{array}\right) & \begin{array}{c} \scriptstyle 1 \\ \scriptstyle n \\ \scriptstyle m \end{array} \end{array} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \scriptstyle 1 & \scriptstyle n+m \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{u}^* \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{A}_n \end{array}\right) & \begin{array}{c} \scriptstyle 1 \\ \scriptstyle n+m \end{array} \end{array}$$

avec $\mathbb{A}_n \in \mathcal{E}_n$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^{n+m}$, $\boldsymbol{u}_i = 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$. On a donc $\det \mathbb{A}_{n+1} = \det \mathbb{A}_n$ (voir initialisation). En utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit

$$\det \mathbb{A}_{n+1} = \det \mathbb{E}$$

c'est à dire que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.
- **Conclusion:** La proposition $(\mathcal{P}_n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

La démonstration de

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \bullet & \mathbb{I}_n \end{array}\right) = \det \mathbb{E}.$$

est similaire en développant le déterminant par rapport à la dernière colonne (à faire en exercice).

b. On a

$$\forall \mathbb{A} \in \mathbb{K}^n, \ \det(\mathbb{A}^*) = \overline{\det \mathbb{A}}$$

On en déduit donc

$$\det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \bullet \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) = \det \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_n & \mathbb{O} \\ \hline \bullet & \mathbb{E} \end{array}\right) = \det \mathbb{E}.$$

---

**Q. 2** *a. Donner les dimensions des blocs pour que le produit suivant soit possible et effectuer le calcul:*

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{J}_2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array}\right)$$

*où $\mathbb{J}_1$ et $\mathbb{J}_2$ sont des matrices identités et $\mathbb{H}$ une matrice.*

*b. En déduire le déterminant de $\mathbb{A}$ en fonction des déterminants de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$.*

□

**R. 2** a. On rappelle le définition du produit matricielle blocs avec des matrices de $2 \times 2$ blocs. Soient $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_{m_1+m_2,n_1+n_2}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{Y} \in \mathcal{M}_{p_1+p_2,q_1+q_2}(\mathbb{K})$ les deux matrices blocs

$$\mathbb{X} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{1,1} & \mathbb{X}_{1,2} \\ \hline \mathbb{X}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,2} \end{array}\right) \end{array} \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q_1 & q_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{Y}_{1,1} & \mathbb{Y}_{1,2} \\ \hline \mathbb{Y}_{2,1} & \mathbb{Y}_{2,2} \end{array}\right) \end{array}$$

Le produit matricielle bloc $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ est possible si, le nombre de blocs colonne de $\mathbb{X}$ est égale au nombre de blocs lignes de $\mathbb{X}$ (ce qui est la cas ici) et si, les nombres de colonnes des blocs de $\mathbb{X}$ sont compatibles avec les nombres de lignes des blocs de $\mathbb{Y}$, c'est à dire,

$$n_1 = p_1 \quad \text{et} \quad n_2 = p_2.$$

Dans ce cas, la matrice $\mathbb{Z} = \mathbb{X}\mathbb{Y}$ est une matrice de $m_1 + m_2$ lignes et $q_1 + q_2$ colonnes et on a

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q_1 & q_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{Y}_{1,1} & \mathbb{Y}_{1,2} \\ \hline \mathbb{Y}_{2,1} & \mathbb{Y}_{2,2} \end{array}\right) \end{array} \\ \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{1,1} & \mathbb{X}_{1,2} \\ \hline \mathbb{X}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,2} \end{array}\right) \end{array} & = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q_1 & q_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{1,1}\mathbb{Y}_{1,1} + \mathbb{X}_{1,2}\mathbb{Y}_{2,1} & \mathbb{X}_{1,1}\mathbb{Y}_{1,2} + \mathbb{X}_{1,2}\mathbb{Y}_{2,2} \\ \hline \mathbb{X}_{2,1}\mathbb{Y}_{1,1} + \mathbb{X}_{2,2}\mathbb{Y}_{2,1} & \mathbb{X}_{2,1}\mathbb{Y}_{1,2} + \mathbb{X}_{2,2}\mathbb{Y}_{2,2} \end{array}\right) \end{array} \end{array}$$

On va donc appliquer cela à cet exercice en posant

$$\mathbb{X} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & ? \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ ? \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{J}_2 \end{array}\right) \end{array} \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} ? & n \end{array} \\ \begin{array}{c} ? \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array}\right) \end{array}$$

Pour déterminer les dimensions manquantes, on utilise la définition du produit matriciel blocs pour obtenir

$$\mathbb{X} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ ? \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{J}_2 \end{array}\right) \end{array} \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} ? & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array}\right) \end{array}$$

On finalise en notant que les matrices identités sont des matrices carrées et donc

$$\mathbb{X} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{J}_2 \end{array}\right) \end{array} \quad \text{et} \quad \mathbb{Y} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{F} \end{array}\right) \end{array}$$

et donc $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.

Sous ces conditions de dimensions le produit matriciel bloc $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ est possible et on a

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{F} \end{array}\right) \end{array} \\ \mathbb{A} = \mathbb{X}\mathbb{Y} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) \end{array} & = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E}\mathbb{I}_m + \mathbb{O}_{m,n}\mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{E}\mathbb{O}_{m,n} + \mathbb{O}_{m,n}\mathbb{F} \\ \hline \mathbb{H}\mathbb{I}_m + \mathbb{I}_n\mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{H}\mathbb{O}_{m,n} + \mathbb{I}_n\mathbb{F} \end{array}\right) \end{array} \\ & = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{F} \end{array}\right) \end{array}. \end{array}$$

b. Comme le déterminant d'un produit de matrices carrées est le produit des déterminants des matrices carrées, on a

$$\det \mathbb{A} = \det\left(\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{J}_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array}\right)\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{E} & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{H} & \mathbb{J}_2 \end{array}\right) \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{J}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{F} \end{array}\right).$$

En utilisant les résultats de la question 1, on en déduit

$$\det \mathbb{A} = \det \mathbb{E} \det \mathbb{F}.$$

Soit $\mathbb{B}_n$ la matrice bloc-carrée triangulaire inférieure décomposée en $n \times n$ blocs, $n \geqslant 2$, définie par

$$\mathbb{B}_n = \begin{pmatrix} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathbb{0} \\ \mathbb{B}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{B}_{n,n} \end{pmatrix}$$

**Q. 3** *Démontrer par récurrence sur $n$ que*

$$\det \mathbb{B}_n = \prod_{i=1}^{n} \det \mathbb{B}_{i,i}.$$

□

---

**R. 3** On va alors démontrer par récurrence sur $n \geqslant 2$ la proposition suivante

$$(\mathcal{Q}_n) \ : \ \det \mathbb{B}_n = \prod_{i=1}^{n} \det \mathbb{B}_{i,i}.$$

- **Initialisation:** pour $n = 2$, celà a été fait en question 2.
- **Hérédité:** Soit $n \geqslant 2$, on suppose $(\mathcal{Q}_n)$ vraie et on va établir que $(\mathcal{Q}_{n+1})$ est vérifiée.
  On a

$$\mathbb{B}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{B}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{0} \\ \mathbb{B}_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} & \vdots \\ \mathbb{B}_{n,1} & \cdots & \mathbb{B}_{n,n-1} & \mathbb{B}_{n,n} & \mathbb{0} \\ \mathbb{B}_{n+1,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{B}_{n+1,n} & \mathbb{B}_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

  On note que les $n$ premiers blocs lignes et colonnes de $\mathbb{B}_{n+1}$ correspondent à $\mathbb{B}_n$, et donc, on peut aussi écrire

$$\mathbb{B}_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{B}_n & \mathbb{0} \\ \hline \bullet & \mathbb{B}_{n+1,n+1} \end{array}\right)$$

  D'après la question 2, on a

$$\det \mathbb{B}_{n+1} = \det \mathbb{B}_n \det \mathbb{B}_{n+1,n+1}.$$

  Or, par hypothèse de récurrence, $(\mathcal{Q}_n)$ est vérifiée. On en déduit alors que

$$\det \mathbb{B}_{n+1} = \prod_{i=1}^{n} \det \mathbb{B}_{i,i} \det \mathbb{B}_{n+1,n+1},$$

  et donc $(\mathcal{Q}_{n+1})$ est vraie.
- **Conclusion:** La proposition $(\mathcal{Q}_n)$ est vraie, pour tout $n \geqslant 2$.

---

## 2 Matrices

**EXERCICE 6**

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice et $(\lambda, \boldsymbol{u})$ un élément propre de $\mathbb{A}$ avec $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$.

**Q. 1** *En s'aidant de la base canonique* $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, *construire une base orthonormée* $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ *telle que* $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{u}$. □

---

**R. 1** La première chose à faire est de construire une base contenant $\boldsymbol{u}$ à partir de la base canonique $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$. Comme le vecteur propre $\boldsymbol{u}$ est non nul, il existe $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_j \rangle \neq 0$. La famille $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{j-1}, \boldsymbol{e}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ forme alors une base de $\mathbb{C}^n$ car $\boldsymbol{u}$ n'est pas combinaison linéaire des $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{j-1}, \boldsymbol{e}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$.
On note $\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n\}$ la base dont le premier élément est $\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{u}$ :

$$\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n\} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{j-1}, \boldsymbol{e}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}.$$

On peut ensuite utiliser le **procédé de Gram-Schmidt**, rappelé en Proposition B.20, pour construire une base orthonormée à partir de cette base.
On calcule successivement les vecteurs $\boldsymbol{x}_i$ à partir de la base $\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n\}$ en construisant un vecteur $\boldsymbol{w}_i$ orthogonal aux vecteurs $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}$.

$$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{z}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{z}_i \rangle \boldsymbol{x}_k$$

puis on obtient le vecteur $\boldsymbol{x}_i$ en normalisant

$$\boldsymbol{x}_i = \frac{\boldsymbol{w}_i}{\|\boldsymbol{w}_i\|}$$

---

Notons $\mathbb{P}$ la matrice de changement de base canonique $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ dans la base $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ :

$$\mathbb{P} = \left( \begin{array}{c:c:c} \boldsymbol{x}_1 & \ldots & \boldsymbol{x}_n \end{array} \right)$$

Soit $\mathbb{B}$ la matrice définie par $\mathbb{B} = \mathbb{P}^*\mathbb{A}\mathbb{P}$.

**Q. 2** a. *Exprimer les coefficients de la matrice* $\mathbb{B}$ *en fonction de la matrice* $\mathbb{A}$ *et des vecteurs* $\boldsymbol{x}_i$, $i \in [\![1, n]\!]$.

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^*\mathbb{A}\mathbb{P}.$$

b. *En déduire que la première colonne de* $\mathbb{B}$ *est* $(\lambda, 0, \ldots, 0)^t$.

□

---

**R. 2** a. En conservant l'écriture colonne de la matrice $\mathbb{P}$ on obtient

$$\mathbb{B} = \left( \begin{array}{c} \boldsymbol{x}_1^* \\ \hdashline \boldsymbol{x}_2^* \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \boldsymbol{x}_n^* \end{array} \right) \mathbb{A} \left( \begin{array}{c:c:c:c} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_n \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \boldsymbol{x}_1^* \\ \hdashline \boldsymbol{x}_2^* \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \boldsymbol{x}_n^* \end{array} \right) \left( \begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}\boldsymbol{x}_1 & \mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \ldots & \mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \end{array} \right)$$

Ce qui donne

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_1{}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_1{}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \\ \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \end{pmatrix}$$

On a donc

$$B_{i,j} = \boldsymbol{x}_i^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_j, \quad \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$$

.

b. On a $\mathbb{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$, $\|\boldsymbol{u}\| = 1$, la base $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ est orthonormée et $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{u}$. on obtient alors

$$\mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{u}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \\ \hline \lambda\boldsymbol{x}_2^*\boldsymbol{u} & \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\boldsymbol{x}_n^*\boldsymbol{u} & \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & \boldsymbol{u}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{u}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \\ \hline 0 & \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_2^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_2 & \ldots & \boldsymbol{x}_n^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}_n \end{array}\right)$$

---

**Q. 3** *Par récurrence sur l'ordre de la matrice, montrer que la matrice $\mathbb{A}$ peut s'écrire sous la forme*

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$$

*où $\mathbb{U}$ est une matrice unitaire et $\mathbb{T}$ une matrice triangulaire supérieure.* □

---

**R. 3** On veut démontrer, par récurrence faible, la proposition suivante pour $n \geqslant 2$

$$(\mathcal{P}_n) \quad \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \exists \mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ unitaire},\ \exists \mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ triangulaire supérieure},\ \text{telles que } \mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*.$$

**Initialisation :** Montrons que $(\mathcal{P}_2)$ est vérifié.

Soit $\mathbb{A}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Elle admet au moins un élément propre $(\lambda, \boldsymbol{u})$ (voir Proposition B.41 par ex.) avec $\|\boldsymbol{u}\| = 1$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente : il existe une matrice unitaire $\mathbb{P}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que la matrice $\mathbb{B}_2 = \mathbb{P}_2\mathbb{A}_2\mathbb{P}_2^*$ ait comme premier vecteur colonne $(\lambda, 0)^t$. La matrice $\mathbb{B}_2$ est donc triangulaire supérieure et comme $\mathbb{P}_2$ est unitaire on en déduit

$$\mathbb{A}_2 = \mathbb{P}_2^*\mathbb{B}_2\mathbb{P}_2.$$

On pose $\mathbb{U}_2 = \mathbb{P}_2^*$ matrice unitaire et $\mathbb{T}_2 = \mathbb{B}_2$ matrice triangulaire supérieure pour conclure que la propostion $(\mathcal{P}_2)$ est vraie.

**Hérédité :** Supposons que $(\mathcal{P}_{n-1})$ soit vérifiée. Montrons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Elle admet au moins un élément propre $(\lambda, \boldsymbol{u})$ (voir Proposition B.41 par ex.) avec $\|\boldsymbol{u}\| = 1$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente : il existe une matrice unitaire $\mathbb{P}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $\mathbb{B}_n = \mathbb{P}_n\mathbb{A}_n\mathbb{P}_n^*$ s'écrivent

$$\mathbb{B}_n = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{A}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right)$$

où $\boldsymbol{c}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{A}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Par hypothèse de récurrence, $\exists \mathbb{U}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ unitaire et $\mathbb{T}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que

$$\mathbb{A}_{n-1} = \mathbb{U}_{n-1}\mathbb{T}_{n-1}\mathbb{U}_{n-1}^*$$

ou encore

$$\mathbb{T}_{n-1} = \mathbb{U}_{n-1}^*\mathbb{A}_{n-1}\mathbb{U}_{n-1}.$$

Soit $\mathbb{Q}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{Q}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

La matrice $\mathbb{Q}_n$ est unitaire. En effet on a

$$\mathbb{Q}_n\mathbb{Q}_n^* = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}^* & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \underbrace{\mathbb{U}_{n-1}\mathbb{U}_{n-1}^*}_{=\mathbb{I}_{n-1}} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \mathbb{I}_n.$$

On note $\mathbb{T}_n$ la matrice définie par $\mathbb{T}_n = \mathbb{Q}_n^* \mathbb{B}_n \mathbb{Q}_n$. On a alors

$$\mathbb{T}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}^* & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{A}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{U}_{n-1}^* \mathbb{A}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \mathbb{U}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \\ \vdots & \underbrace{\mathbb{U}_{n-1}^* \mathbb{A}_{n-1} \mathbb{U}_{n-1}}_{=\mathbb{T}_{n-1}} = \\ & \\ 0 & \end{array}\right)$$

La matrice $\mathbb{T}_n$ est donc triangulaire supérieure et on a par définition de $\mathbb{B}_n$

$$\mathbb{T}_n = \mathbb{Q}_n^* \mathbb{P}_n \mathbb{A}_n \mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n.$$

On note $\mathbb{U}_n = \mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n$. Cette matrice est unitaire car les matrices $\mathbb{Q}_n$ et $\mathbb{P}_n$ le sont. En effet, on a

$$\mathbb{U}_n \mathbb{U}_n^* = \mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n (\mathbb{P}_n^* \mathbb{Q}_n)^* = \mathbb{P}_n^* \underbrace{\mathbb{Q}_n \mathbb{Q}_n^*}_{=\mathbb{I}_n} \mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n^* \mathbb{P}_n = \mathbb{I}_n.$$

On a $\mathbb{T}_n = \mathbb{U}_n^* \mathbb{A}_n \mathbb{U}_n$ et en multipliant cette équation à gauche par $\mathbb{U}_n$ et à droite par $\mathbb{U}_n^*$ on obtient l'équation équivalente $\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n \mathbb{T}_n \mathbb{U}_n^*$. La propriété $(\mathcal{P}_n)$ est donc vérifiée. Ce qui achève la démonstration.

---

**Q. 4** *En supposant $\mathbb{A}$ inversible et la décomposition $\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*$ connue, expliquer comment résoudre "simplement" le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.* □

---

**R. 4** Résoudre $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ est équivalent à résoudre

$$\mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^* \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{1}$$

Comme $\mathbb{U}$ est unitaire, on a $\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I}$ et $\mathbb{U}^*$ inversible. Donc en multipliant (1) par $\mathbb{U}^*$ on obtient le système équivalent

$$\underbrace{\mathbb{U}^*\mathbb{U}}_{=\mathbb{I}} \mathbb{T}\mathbb{U}^* \boldsymbol{x} = \mathbb{U}^* \boldsymbol{b} \iff \mathbb{T}\mathbb{U}^* \boldsymbol{x} = \mathbb{U}^* \boldsymbol{b}.$$

On pose $\boldsymbol{y} = \mathbb{U}^* \boldsymbol{x}$. Le système précédent se résoud en deux étapes

a. on cherche $\boldsymbol{y}$ solution de $\mathbb{T}\boldsymbol{y} = \mathbb{U}^* \boldsymbol{b}$. Comme $\mathbb{U}$ est unitaire on a $\det(\mathbb{U})\det(\mathbb{U}^*) = \det(\mathbb{I}) = 1$ et donc

$$\begin{aligned} \det(\mathbb{A}) &= \det(\mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^*) = \det(\mathbb{U})\det(\mathbb{T})\det(\mathbb{U}^*) \\ &= \det(\mathbb{T}) \end{aligned}$$

Or $\mathbb{A}$ inversible équivalent à $\det(\mathbb{A}) \neq 0$ et donc la matrice $\mathbb{T}$ est inversible. La matrice $\mathbb{T}$ étant triangulaire supérieure on peut résoudre facilement le système par la *méthode de remontée*.

b. une fois $\boldsymbol{y}$ déterminé, on résoud $\mathbb{U}^* \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Comme $\mathbb{U}$ est unitaire, on obtient directement $\boldsymbol{x} = \mathbb{U}\boldsymbol{y}$.

---

## 3 Normes

### Exercice 7

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$.

**Q. 1** *Trouver* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tel que* $\langle \alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$. □

---

**R. 1**
- Si $\boldsymbol{x} = 0$, alors $\alpha$ quelconque.
- Si $\boldsymbol{x} \neq 0$, alors

$$\langle \alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{\alpha} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$$

Or $\boldsymbol{x} \neq 0$, ce qui donne

$$\overline{\alpha} = \frac{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}.$$

et , comme $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \in \mathbb{R}$ et $\overline{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$, on obtient

$$\alpha = \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}. \tag{2}$$

---

**Q. 2** *En calculant* $\|\alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2$, *montrer que*

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2 . \tag{3}$$

□

---

**R. 2** On a

$$\begin{aligned}
\|\alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2 &= \langle \alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \rangle \\
&= \alpha \langle \alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\
&= -\langle \alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle, \quad \text{car } \langle \alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle = 0 \\
&= -\overline{\alpha} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle
\end{aligned}$$

En utilisant (2), on obtient alors

$$\begin{aligned}
\|\alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2 &= -\frac{\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \\
&= \frac{-\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}
\end{aligned}$$

Comme $\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}$, on a $\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle|^2$ et donc

$$\begin{aligned}
\|\alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2 &= \frac{1}{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} \left( -|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle|^2 + \|\boldsymbol{x}\|_2^2 \|\boldsymbol{y}\|_2^2 \right) \\
&\geqslant 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

On a alors

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle|^2 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2^2 \|\boldsymbol{y}\|_2^2$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant croissante sur $[0; +\infty[$, on obtient (3).

**Q. 3** *Soit $\boldsymbol{x} \neq 0$. Montrer alors que l'inégalité (3) est une égalité si et seulement si $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$.* □

**R. 3** Soit $\boldsymbol{x} \neq 0$. On veut montrer que

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| = \|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2 \iff \boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$. On a alors

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \alpha \|\boldsymbol{x}\|_2^2 \implies |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\|_2^2 .$$

Comme $\|\boldsymbol{y}\|_2 = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\|_2$, on a aussi

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2 = |\alpha| \|\boldsymbol{x}\|_2^2 .$$

On en déduit alors

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| = \|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2 .$$

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| = \|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2$. Avec cette hypothèse, l'équation (4) devient

$$\|\alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2^2 = 0$$

et donc $\alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = 0$, c'est à dire $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$.

## Exercice 8

**Q. 1** *Soit la fonction $f(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda$ avec $0 < \lambda < 1$. Montrer que pour tous $\alpha \geqslant 0$ et $\beta \geqslant 0$ on a*

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leqslant \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta. \tag{5}$$

□

**R. 1** L'inégalité (5) est vérifiée si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Il nous reste donc à la vérifier pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Dans ce cas (5) s'écrit

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\lambda \leqslant \lambda\frac{\alpha}{\beta} + (1 - \lambda)$$

c'est à dire

$$f(\frac{\alpha}{\beta}) \geqslant 0.$$

Montrons que $f(t) \geqslant 0$, $\forall t \in ]0, +\infty[$.
On a $f'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda-1})$ et

$$f'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - t^{\lambda-1} = 0, \text{car } \lambda \neq 0$$

De plus, on a $t^{\lambda-1} = e^{(\lambda-1)\ln(t)}$ et comme $\lambda - 1 \neq 0$, on obtient

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

- Etudions la fonction sur $]0,1[$. On a pour $t\in]0,1[$, $\ln(t)<0$ et donc $(\lambda-1)\ln(t)>0$. Comme la fonction exp est croissante, on en déduit $\exp((\lambda-1)\ln(t))>1$ et alors $f'(t)<0$.

- Etudions la fonction sur $]1,+\infty[$. On a pour $t\in]1,+\infty[$, $\ln(t)>0$ et donc $(\lambda-1)\ln(t)<0$. Comme la fonction exp est croissante, on en déduit $0<\exp((\lambda-1)\ln(t))<1$ et alors $f'(t)>0$.

Le minimum de $f$ est donc atteint en $t=1$ et on a

$$\forall t\in]0,+\infty[,\ \ f(x)\geqslant f(1)=0.$$

L'inégalité (5) est donc vérifiée $\forall\alpha\geqslant 0$, $\forall\beta\geqslant 0$ et $\forall\lambda\in]0,1[$.

---

Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{C}^n$. Soient $p>1$ et $q>1$ vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

**Q. 2** *On pose $\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_p}$ et $\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|_q}$. En utilisant l'inégalite (5), montrer que l'on a l'inégalité*

$$\sum_{i=1}^n |u_iv_i|\leqslant\frac{1}{p}\sum_{i=1}^n |u_i|^p+\frac{1}{q}\sum_{i=1}^n |v_i|^q=1. \tag{6}$$

□

---

**R. 2** On pose $\lambda=\frac{1}{p}\in]0,1[$. on a alors $1-\lambda=\frac{1}{q}$. On pose

$$\alpha=|u_i|^p\geqslant 0,\quad \beta=|v_i|^q\geqslant 0.$$

En utilisant (5), on obtient directement

$$|u_i||v_i|\leqslant\frac{1}{p}|u_i|^p+\frac{1}{q}|v_i|^q,\ \ \forall i\in[\![1,n]\!].$$

En sommant sur $i$ on obtient:

$$\sum_{i=1}^n |u_iv_i|\leqslant\frac{1}{p}\sum_{i=1}^n |u_i|^p+\frac{1}{q}\sum_{i=1}^n |v_i|^q=\frac{1}{p}\,\|\boldsymbol{u}\|_p^p+\frac{1}{q}\,\|\boldsymbol{v}\|_q^q$$

Comme par construction $\|\boldsymbol{u}\|_p=\|\boldsymbol{v}\|_q=1$, on obtient

$$\sum_{i=1}^n |u_iv_i|\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

---

**Q. 3** *En déduire l'inégalité de Holder suivante*

$$|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle|\leqslant\sum_{i=1}^n |x_iy_i|\leqslant\|\boldsymbol{x}\|_p\,\|\boldsymbol{y}\|_q\,. \tag{7}$$

*Quel est le lien entre l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Cauchy-Schwarz?* □

---

**R. 3** Par construction, on a

$$\sum_{i=1}^n |u_iv_i|=\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_p\,\|\boldsymbol{y}\|_q}\sum_{i=1}^n |x_iy_i|$$

et donc en utilisant l'inégalité (7) on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q .$$

De plus

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| = |\sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\overline{x}_i y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_p \|\boldsymbol{y}\|_q .$$

Pour $p = q = 2$, l'inégalité de Hölder entraine l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

---

## Exercice 9

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{K}^n$, on définit l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ par

$$\|\mathbb{A}\|_s \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \tag{8}$$

**Q. 1** *Montrer que* $\|\mathbb{I}\|_s = 1$. □

---

**R. 1** On a immédiatement

$$\|\mathbb{I}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{I}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} \neq 0}} \frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = 1.$$

---

On note $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \ ; \ \|\boldsymbol{v}\| \leqslant 1\}$ la boule unitée de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \ ; \ \|\boldsymbol{v}\| = 1\}$ la sphère unitée de $\mathbb{K}^n$.

**Q. 2** a. *Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{S}$ sont des compacts.*

b. *Montrer que*

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\boldsymbol{v} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \tag{9}$$

c. *En déduire que*

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\boldsymbol{v} \in \mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \tag{10}$$

d. *En déduire que l'application $\|\bullet\|_s$ est bien définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i.e. $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|\mathbb{A}\|_s < +\infty$.*

□

---

**R. 2** a. Les ensembles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{S}$ sont des compacts car image réciproque de l'application continue $\boldsymbol{v} \mapsto \|\boldsymbol{v}\|$ par le fermé borné $[0, 1]$ (pour la boule) et le singleton $\{1\}$ (pour la sphère).

b. On a

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v} \neq 0}} \left\| \mathbb{A} \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \right\| = \sup_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|$$

c. Comme $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ on a aussi

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \geqslant \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| . \tag{11}$$

On peut aussi remarquer que

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \tag{12}$$

De plus, $\forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{B}\backslash\{0\}$, en posant $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|} \in \mathcal{S}$. on a $\boldsymbol{w} = \|\boldsymbol{w}\|\, \boldsymbol{u}$ et

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{w}\|\, \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \text{ car } \|\boldsymbol{w}\| \leqslant 1.$$

Or on a

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \leqslant \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| .$$

et on obtient alors

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{w}\in\mathcal{B}\\ \boldsymbol{w}\neq 0}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| \leqslant \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| .$$

En utilisant (11) et (12), on en déduit

$$\sup_{\boldsymbol{w}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| = \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| .$$

d. L'application $\boldsymbol{v} \mapsto \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|$ est continue donc son sup sur la sphère unitée qui est compacte est atteint.

---

**Q. 3** *a. Montrer*

$$\|\mathbb{A}\|_s \leqslant \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\right\}.$$

*b. Montrer qu'il existe* $\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}$ *tel que* $\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|$.

*c. En déduire que*

$$\|\mathbb{A}\|_s = \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\right\}. \tag{13}$$

□

---

**R. 3** a. Comme $\|\bullet\|_s$ est bien définie il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s \leqslant \alpha$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s \leqslant \alpha$. On a

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\|_s \leqslant \alpha &\Leftrightarrow \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \leqslant \alpha \\
&\Leftrightarrow \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \leqslant \alpha,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\} \\
&\Leftrightarrow \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\} \\
&\Leftrightarrow \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|\mathbb{A}\|_s \leqslant \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \ :\ \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\} \tag{14}$$

b. Comme $\mathcal{S}$ est compact et l'application $\boldsymbol{v} \mapsto \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|$ est continue, il existe $\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}$ tel que

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| .$$

c. On en déduit $\|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{w}\| = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|$ car $\|\boldsymbol{w}\| = 1$. On a alors

$$\|\mathbb{A}\|_s \in \{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\}$$

et donc

$$\inf\{\alpha \in \mathbb{R} \ :\ \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\} \leqslant \|\mathbb{A}\|_s .$$

On conclut en utilisant (14).

**Q. 4** a. *Montrer que* $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$, $\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\|$.

b. *Soit* $\lambda \in \mathbb{K}^*$. *Montrer qu'il existe* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$ *tel que* $\|\boldsymbol{u}\| = |\lambda|$ *vérifiant*

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{u}\|.$$

□

---

**R. 4** a. On a par définition du sup

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{u}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{u}\|} \geqslant \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \backslash\{0\}.$$

et donc

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\|, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \backslash\{0\}.$$

qui est équivalent à

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\|, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n.$$

b. D'après la **Q. 3** b. ,il existe $\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{w} \neq 0$. On a $\|\boldsymbol{u}\| = |\lambda|$ et

$$\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| = \left\|\mathbb{A}\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}\right\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|}\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \;\Leftrightarrow\; \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{u}\| = \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|$$

---

**Q. 5** *Montrer que* $\|\bullet\|_s$ *est une norme matricielle.* □

---

**R. 5** • $\|\mathbb{A}\|_s = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{A}_s = \mathbb{O}$ ?

$\boxed{\Longleftarrow}$ trivial.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}\|_s = 0 = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} &\Longrightarrow \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = 0,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}\\ &\Longrightarrow \mathbb{A}\boldsymbol{v} = \mathbf{0},\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}\end{aligned}$$

Soit $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a alors $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{A}\boldsymbol{e}_j = \mathbf{0}$ et on en déduit que

$$\mathrm{A}_{i,j} = \langle \boldsymbol{e}_i, \mathbb{A}\boldsymbol{e}_j \rangle = 0,\ \forall (i, j) \in [\![1, n]\!].$$

et donc $\mathbb{A} = \mathbb{O}$.

• Montrons que $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha| \|\mathbb{A}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,.
Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\alpha\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel) et

$$\begin{aligned}\|\alpha\mathbb{A}\|_s &= \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\alpha\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{|\alpha|\,\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \quad \text{car } \|\alpha\boldsymbol{u}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{u}\|\\ &= |\alpha| \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = |\alpha|\,\|\mathbb{A}\|_s.\end{aligned}$$

- Montrons que $\|\mathbb{A}+\mathbb{B}\|_s \leqslant \|\mathbb{A}\|_s + \|\mathbb{B}\|_s\,,\ \forall (\mathbb{A},\mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$
  Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathbb{A}+\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}+\mathbb{B}\|_s &= \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|(\mathbb{A}+\mathbb{B})\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}+\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}\\
&\leqslant \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|+\|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \quad \text{par inégalité triangulaire dans } \mathbb{K}^n\\
&\leqslant \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} + \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \|\mathbb{A}\|_s + \|\mathbb{B}\|_s\,.
\end{aligned}$$

- Montrons que $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\|_s \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbb{B}\|_s\,,\ \forall (\mathbb{A},\mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.
  Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par définition du produit matriciel et

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\mathbb{B}\|_s &= \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|(\mathbb{A}\mathbb{B})\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}(\mathbb{B}\boldsymbol{v})\|}{\|\boldsymbol{v}\|}\\
&\leqslant \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\|_s\|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \quad \text{car } \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{u}\| \ \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n\\
&\leqslant \|\mathbb{A}\|_s \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbb{B}\|_s\,.
\end{aligned}$$

---

## Exercice 10

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\|\mathbb{A}\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1}$$

la norme matricielle suboordonnée à la norme vectorielle $\|\bullet\|_1$ .

**Q. 1** *Montrer que*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\\ \|\boldsymbol{x}\|_1=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|.$$

□

---

**R. 1** Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\|_1 = 1$. On a

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |(\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i| = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n \mathrm{A}_{i,j}x_j\right|\\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\mathrm{A}_{i,j}x_j| = \sum_{j=1}^n \left(|x_j| \sum_{i=1}^n |\mathrm{A}_{i,j}|\right)\\
&\leqslant \left(\max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^n |\mathrm{A}_{i,j}|\right) \sum_{j=1}^n |x_j| = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^n |\mathrm{A}_{i,j}| \quad \text{car } \|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| = 1.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\\ \|\boldsymbol{x}\|_1=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|.$$

**Q. 2** *a. Déterminer un $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{y}\|_1 = 1$ tel que*

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_1 = \max_{j \in [\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|.$$

*b. Conclure.*

□

**R. 2** a. Soit $k \in [\![1,n]\!]$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} |A_{i,k}| = \max_{j \in [\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|.$$

On a

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(\mathbb{A}\boldsymbol{y})_i| = \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} y_j \Big|.$$

Pour obtenir

$$\sum_{i=1}^{n} |A_{i,k}| = \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} y_j \Big|$$

on prend $y_j = \delta_{k,j}$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, c'est à dire $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_k$ le $k^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique. Dans ce cas on a $\|\boldsymbol{y}\|_1 = 1$ et

$$\begin{aligned} \|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_1 &= \|\mathbb{A}\boldsymbol{e}_k\|_1 = \|\mathbb{A}_{:,k}\|_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} |A_{i,k}| = \max_{j \in [\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|. \end{aligned}$$

b. D'après la proposition/définition des normes matricielles suboordonnées, on a

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \sup_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_1 = 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1 .$$

En utilisant les résultats de **Q.1** et **Q.2**, on obtient

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{j \in [\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|.$$

**Q. 3** *`[Algo]` Ecrire une fonction algorithmique, nommée `Norm1`, calculant $\|\mathbb{A}\|_1$ .* □

**R. 3** Voici une possibilité de fonction:

**Algorithme 1** Fonction Norm1 permettant de calculer $\|\mathbb{A}\|_1$

**Données :** $\mathbb{A}$ : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
**Résultat :** $r$ : le réel $r = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$

**Fonction** $r \leftarrow$ Norm1( $\mathbb{A}$ )
  $n \leftarrow$ nb de lignes de $\mathbb{A}$
  $r \leftarrow 0$
  **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
    $S \leftarrow 0$
    **Pour** $i \leftarrow 1$ **à** $n$ **faire**
      $S \leftarrow S + |\mathbb{A}(i,j)|$
    **Fin Pour**
    **Si** $r < S$ **alors**
      $r \leftarrow S$
    **Fin Si**
  **Fin Pour**
**Fin Fonction**

## Exercice 11

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}$$

la norme matricielle suboordonnée à la norme vectorielle $\|\bullet\|_\infty$ .

**Q. 1** *Montrer que*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_\infty=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|.$$

□

**R. 1** Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1$. On a

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty &= \max_{i\in[\![1,n]\!]} |(\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left|\sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{i,j} x_j\right| \\
&\leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}||x_j| \\
&\leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}| \quad \text{car } |x_j| \leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i| = \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_\infty=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|.$$

**Q. 2** *a. Déterminer un* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$ *tel que*

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|.$$

*b. Conclure.*

□

---

**R. 2** a. Soit $k \in [\![1,n]\!]$ tel que

$$\sum_{j=1}^{n} |A_{k,j}| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|.$$

On a, pour tout $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$,

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left|(\mathbb{A}\boldsymbol{y})_i\right| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \Big|\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} y_j\Big|.$$

On va construire un vecteur $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$, tel que

$$\max_{i\in[\![1,n]\!]} \Big|\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} y_j\Big| = \sum_{j=1}^{n} |A_{k,j}|.$$

On sait déjà que, si $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$,

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \Big|\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} y_j\Big| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |A_{k,j}|.$$

On va donc construire $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$, de telle sorte que

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} A_{k,j} y_j\Big| = \sum_{j=1}^{n} |A_{k,j}|.$$

Il suffit pour celà de prendre,

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad y_j = \begin{cases} \frac{|A_{k,j}|}{A_{k,j}} & \text{si } A_{kj} \neq 0 \\ 1 & \text{si } A_{k,j} = 0 \end{cases}.$$

et on a bien $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$. On a alors

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} A_{k,j} y_j\Big| = \sum_{j=1}^{n} |A_{k,j}| \ \text{ et } \ \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \Big|\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} y_j\Big| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |A_{k,j}|$$

et donc

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_\infty = \sum_{j=1}^{n} |A_{k,j}| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|.$$

b. D'après la proposition/définition des normes matricielles suboordonnées, on a

$$\|\mathbb{A}\|_\infty = \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty .$$

En utilisant les résultats de **Q.1** et **Q.2**, on obtient

$$\|\mathbb{A}\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|.$$

**Q. 3** *[Algo] Ecrire une fonction algorithmique, nommée* `NormInf`*, calculant* $\|\mathbb{A}\|_\infty$. $\square$

**R. 3** Voici une possibilité de fonction:

**Algorithme 2** Fonction NormInf permettant de calculer $\|\mathbb{A}\|_\infty$

**Données :** $\mathbb{A}$ : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
**Résultat :** $r$ : le réel $r = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$

```
Fonction r ← NormInf( A )
  n ← nb de lignes de A
  r ← 0
  Pour i ← 1 à n faire
    S ← 0
    Pour j ← 1 à n faire
      S ← S + |A(i, j)|
    Fin Pour
    Si r < S alors
      r ← S
    Fin Si
  Fin Pour
Fin Fonction
```

## Exercice 12

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbb{B} = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$.

**Q. 1** *Soit* $(\lambda, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ *un élément propre de* $\mathbb{B}$.

*a. Montrer que la matrice* $\mathbb{B}$ *est hermitienne.*

*b. Montrer que les valeurs propres de* $\mathbb{B}$ *sont réelles.*

*c. En déduire que*

$$\lambda = \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|_2^2}{\|\boldsymbol{u}\|_2^2}.$$

$\square$

**R. 1** a. Il faut montrer que $\mathbb{B} = \mathbb{B}^*$. Or on a

$$\mathbb{B}^* = \left(\mathbb{A}^*\mathbb{A}\right)^* = \mathbb{A}^*\left(\mathbb{A}^*\right)^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A} = \mathbb{B}.$$

b. Comme $(\lambda, \boldsymbol{u})$ est un élément propre de $\mathbb{B}$, on a $\mathbb{B}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$. On en déduit que

$$\langle \mathbb{B}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = \langle \lambda\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = \overline{\lambda}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = \overline{\lambda}\,\|\boldsymbol{u}\|_2^2.$$

De plus par propriété du produit scalaire, on a

$$\langle \mathbb{B}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{B}^*\boldsymbol{u}\rangle .$$

Comme $\mathbb{B}$ est hermitienne, on obtient

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{B}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle &= \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{B}\boldsymbol{u}\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{u}, \lambda\boldsymbol{u}\rangle = \lambda \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = \lambda \left\|\boldsymbol{u}\right\|_2^2 .\end{aligned}$$

On a donc

$$\lambda \left\|\boldsymbol{u}\right\|_2^2 = \overline{\lambda} \left\|\boldsymbol{u}\right\|_2^2$$

et comme $\|\boldsymbol{u}\|_2 \neq 0$ ($\boldsymbol{u}$ est un vecteur propre) on obtient $\lambda = \overline{\lambda}$, c'est à dire $\lambda \in \mathbb{R}$.

c. On a

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{B}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle &= \langle \mathbb{A}^*\mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle \\ &= \langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \mathbb{A}\boldsymbol{u}\rangle \quad \text{par propriété du produit scalaire} \\ &= \left\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\right\|_2^2 .\end{aligned}$$

De plus, on a vu que $\langle \mathbb{B}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = \lambda \left\|\boldsymbol{u}\right\|_2^2$ avec $\|\boldsymbol{u}\|_2 > 0$. On en déduit alors

$$\lambda = \frac{\left\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\right\|_2^2}{\left\|\boldsymbol{u}\right\|_2^2} \geqslant 0.$$

---

La matrice $\mathbb{B}$ étant hermitienne (elle est donc normale), d'après le Théorème de réduction 3.2 page 63, il existe alors une matrice $\mathbb{U}$ unitaire et une matrice $\mathbb{D}$ diagonale telle que

$$\mathbb{B} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*.$$

On note $(\lambda_i, \boldsymbol{e}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ les éléments propres de $\mathbb{D}$. Les vecteurs $\boldsymbol{e}_i$ sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $\lambda_i = \mathbb{D}_{ii}$.

**Q. 2** *a. Démontrer que les $(\lambda_i, \boldsymbol{v}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont les éléments propres de $\mathbb{B}$ où $\boldsymbol{v}_i$ est le i-ème vecteur colonne de $\mathbb{U}$.*

*b. En déduire que $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.*

□

---

**R. 2** a. On a $\mathbb{B} = \mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*$. Or $\mathbb{U}$ est unitaire, donc inversible d'inverse $\mathbb{U}^*$. En multipliant à gauche par $\mathbb{U}^*$ et à droite par $\mathbb{U}$ on obtient

$$\mathbb{U}^*\mathbb{B}\mathbb{U} = \mathbb{U}^*(\mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^*)\mathbb{U} = (\mathbb{U}^*\mathbb{U})\mathbb{D}(\mathbb{U}^*\mathbb{U}) = \mathbb{D}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\boldsymbol{e}_i \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbb{U}^*\mathbb{B}\mathbb{U}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\boldsymbol{e}_i \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathbb{B}\mathbb{U}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\mathbb{U}\boldsymbol{e}_i.\end{aligned}$$

C'est à dire en posant $\boldsymbol{v}_i = \mathbb{U}\boldsymbol{e}_i$ ($i$-ème vecteur colonne de $\mathbb{U}$), les éléments propres de $\mathbb{B}$ sont les $(\lambda_i, \boldsymbol{v}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$. On peut noter que $\boldsymbol{v}_i \neq 0$ car $\mathbb{U}$ est inversible.

b. On a

$$\mathbb{U} = \left(\begin{array}{c:c:c} \boldsymbol{v}_1 & \ldots & \boldsymbol{v}_n \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{U}^* = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{v}_1^* \\ \hdashline \boldsymbol{v}_2^* \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \boldsymbol{v}_n^* \end{array}\right)$$

On a donc

$$\mathbb{U}^*\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1^*\boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_1}^*\boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v_1}^*\boldsymbol{v}_n \\ \boldsymbol{v}_2^*\boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v}_2^*\boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_2^*\boldsymbol{v}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{v}_n^*\boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v}_n^*\boldsymbol{v}_2 & \dots & \boldsymbol{v}_n^*\boldsymbol{v}_n \end{pmatrix}$$

et donc

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (\mathbb{U}^*\mathbb{U})_{i,j} = \boldsymbol{v}_i^*\boldsymbol{v}_j = \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle.$$

Comme $\mathbb{U}$ est unitaire, on a $\mathbb{U}^*\mathbb{U} = \mathbb{I}$ et donc

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (\mathbb{U}^*\mathbb{U})_{i,j} = \delta_{i,j}.$$

On en déduit alors

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

$\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ est donc une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$.

---

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\|_2 = 1$ décomposée dans la base $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$:

$$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \text{tels que } \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i.$$

**Q. 3** *a. Montrer que*

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = 1.$$

*b. Montrer que*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|_2=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_2^2 \leqslant \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}).$$

*c. Déterminer un vecteur $\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$, tel que*

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|_2^2 = \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}).$$

*d. En déduire que*

$$\|\mathbb{A}\|_2 \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})}.$$

□

---

**R. 3** a. On peut voir que

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{v}_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}\alpha_j \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i}\alpha_i \text{ car } \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2. \end{aligned}$$

De plus $\|\boldsymbol{x}\|_2^2 = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 1$.

b. On a

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_2^2 &= \langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{A}^*\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{B}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{B}\boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \boldsymbol{v}_j \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \boldsymbol{v}_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i}\overline{\lambda_i} \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2 \quad \text{car } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ et } \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\rangle = \delta_{ij} \\
&\leqslant \big(\max_{i\in[\![1,n]\!]} \lambda_i\big) \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}) \quad \text{car } \lambda_i \geqslant 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = 1.
\end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|_2=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_2^2 \leqslant \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}).$$

c. Pour démontrer que l'on a en fait égalité il suffit de trouver un vecteur la vérifiant, c'est à dire un vecteur $\boldsymbol{w} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{w}\|_2 = 1$, tel que

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|_2^2 = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \lambda_i$$

où les $\lambda_i$ sont positifs ou nuls (valeurs propres de $\mathbb{B}$. Pour celà on note $k \in [\![1,n]\!]$ l'indice tel que $\lambda_k = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \lambda_i$. En choisissant $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_k$ (qui est de norme 1) on obtient alors

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}_k\|_2^2 = \langle \mathbb{A}\boldsymbol{v}_k, \mathbb{A}\boldsymbol{v}_k\rangle = \langle \mathbb{A}^*\mathbb{A}\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k\rangle = \langle \lambda_k\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k\rangle = \lambda_k = \rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A}).$$

d. D'après la proposition/définition des normes matricielles suboordonnées, on a

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_2=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_2 .$$

En utilisant les résultats de **Q.3**, 2. et 3., on obtient

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})}.$$

---

**Q. 4** a. *Montrer que la norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :*

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \Longrightarrow \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 .$$

b. *Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne alors*

$$\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}).$$

□

---

**R. 4** a. Soit $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, i.e.

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{U}^*\mathbb{U} = \mathbb{I}.$$

- Montrons que $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2$ .
  On a $\|\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})}$ et donc

$$\|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \sqrt{\rho((\mathbb{U}\mathbb{A})^*\mathbb{U}\mathbb{A})} = \sqrt{\rho(A^*(\mathbb{U}^*\mathbb{U})\mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^*\mathbb{A})} = \|\mathbb{A}\|_2 .$$

- Montrons que $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2$.
  On a
  $$\|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbb{U}\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2}.$$
  En posant $\boldsymbol{y} = \mathbb{U}\boldsymbol{x}$, on a $\boldsymbol{x} = \mathbb{U}^*\boldsymbol{y}$ car $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^*$ ($\mathbb{U}$ étant unitaire). Comme $\mathbb{U}$ est inversible on a
  $$\left\{\mathbb{U}^*\boldsymbol{y},\ \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}\right\} = \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$$
  $$\sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbb{U}\boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} = \sup_{\substack{\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n\\ \boldsymbol{y}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_2}{\|\mathbb{U}^*\boldsymbol{y}\|_2}.$$
  De plus, on a
  $$\|\mathbb{U}^*\boldsymbol{y}\|_2^2 = \langle \mathbb{U}^*\boldsymbol{y}, \mathbb{U}^*\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{y}, \mathbb{U}\mathbb{U}^*\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle = \|\boldsymbol{y}\|_2^2$$
  et donc $\|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{A}\|_2$.
- Montrons que $\|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2$.
  Ceci découle des deux égalités précédentes. En effet,
  $$\begin{aligned} \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 &= \|\mathbb{U}^*(\mathbb{A}\mathbb{U})\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 && \text{car } \mathbb{U}^* \text{ unitaire}\\ &= \|\mathbb{A}\|_2 && \text{car } \mathbb{U} \text{ unitaire}\end{aligned}$$

---