

Exercices associés au cours d'Analyse Numérique I

Chapitre 6: Intégration numérique

1 Exercices du cours

EXERCICE 1

Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ une formule de quadrature élémentaire

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (1.1)$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

Q. 1 Démontrer que l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, muni de la norme infini, à valeurs dans \mathbb{R} est linéaire et continue.

Q. 2 Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k si et seulement si

$$\forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx. \quad (1.2)$$

Correction

R. 1 On commence par démontrer la linéarité. Soient f et g dans $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(\lambda f + \mu g, a, b) &= (b-a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f + \mu g)(x_j) \\ &= (b-a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)) \\ &= \lambda (b-a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) + \mu (b-a) \sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \\ &= \lambda \mathcal{Q}_n(f, a, b) + \mu \mathcal{Q}_n(g, a, b). \end{aligned}$$

L'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est donc linéaire. Pour démontrer qu'elle est continue, il suffit alors de démontrer que

$$\exists C > 0, \quad \text{tel que } |\mathcal{Q}_n(f, a, b)| \leq C \|f\|_\infty, \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}).$$

Or, on a, pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{Q}_n(f, a, b)| &= \left| (b-a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \right| \\ &\leq (b-a) \sum_{j=0}^n |w_j| |f(x_j)| \\ &\leq C \|f\|_\infty, \quad \text{avec } C = (b-a) \sum_{j=0}^n |w_j| \text{ indépendant de } f. \end{aligned}$$

R. 2

⇒ Soit $r \in \llbracket 0, k \rrbracket$, Comme $x \mapsto x^r$ est dans $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, et que la formule de quadrature est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à k , on en déduit

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket.$$

⇐ Soit $P \in \mathbb{R}_k[X]$. On peut le décomposer dans la base des monômes: il existe $(a_i)_{i=0}^k$ réels tels que

$$P(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i.$$

Par linéarité de l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$, on a

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto P(x), a, b) = \sum_{i=0}^k a_i \mathcal{Q}_n(x \mapsto x^i, a, b).$$

Par hypothèse, on a

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket$$

et donc

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto P(x), a, b) = \sum_{i=0}^k a_i \int_a^b x^i dx.$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto P(x), a, b) = \int_a^b \sum_{i=0}^k a_i x^i dx = \int_a^b P(x) dx.$$

On en déduit donc que $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k .

◇

EXERCICE 2

Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x) dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ une formule de quadrature élémentaire

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \tag{2.1}$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

On note $x = \varphi(t) = \alpha + \beta t$, $\beta \in \mathbb{R}^*$, le changement de variable affine, $t_i = \varphi^{-1}(x_i)$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et

$$\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)) = (\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)) \sum_{i=0}^n w_i g(t_i). \tag{2.2}$$

Q. 1 *Expliciter φ^{-1} .*

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Q. 2 *Montrer que si $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k alors $\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k .*

Q. 3 *Montrer que si $\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k alors $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k .*



Correction

R. 1

On a $\varphi^{-1}(x) = \frac{x-\alpha}{\beta}$.

R. 2

Soit $Q \in \mathbb{R}_k[X]$. On a

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} Q(t)dt = \frac{1}{\beta} \int_a^b Q \circ \varphi^{-1}(x)dx.$$

Or φ^{-1} est un polynôme de degré 1 et $Q \circ \varphi^{-1}$ est la composé de deux polynômes: c'est donc un polynôme de degré le produit des degrés des deux polynômes, i.e. $Q \circ \varphi^{-1} \in \mathbb{R}_k[X]$. Comme $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k , on en déduit que

$$\int_a^b Q \circ \varphi^{-1}(x)dx = \mathcal{Q}_n(Q \circ \varphi^{-1}, a, b) = (b-a) \sum_{i=0}^n w_i Q \circ \varphi^{-1}(x_i) = (b-a) \sum_{i=0}^n w_i Q(t_i).$$

On a alors

$$\int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} Q(t)dt = \frac{b-a}{\beta} \sum_{i=0}^n w_i Q(t_i)$$

or

$$\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a) = \frac{b-\alpha}{\beta} - \frac{a-\alpha}{\beta} = \frac{b-a}{\beta}.$$

On en conclut donc que $\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k .

R. 3

Soit $P \in \mathbb{R}_k[X]$. On a

$$\int_a^b P(x)dx = \beta \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} P \circ \varphi(t)dt.$$

Or φ est un polynôme de degré 1 et $P \circ \varphi^{-1}$ est la composé de deux polynômes: c'est donc un polynôme de degré le produit des degrés des deux polynômes, i.e. $P \circ \varphi \in \mathbb{R}_k[X]$. Comme $\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k , on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} P \circ \varphi(t)dt &= \mathcal{Q}_n(P \circ \varphi, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)) \\ &= (\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)) \sum_{i=0}^n w_i P \circ \varphi(t_i) \\ &= (\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)) \sum_{i=0}^n w_i P(x_i). \end{aligned}$$

On a alors

$$\int_a^b P(x)dx = \beta (\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)) \sum_{i=0}^n w_i P(x_i)$$

et comme $\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a) = \frac{b-a}{\beta}$, on en déduit que $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k .

◇

EXERCICE 3

Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles, $n \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire,

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \tag{3.1}$$

où les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels à déterminer.

Q. 1 Démontrer que (3.1) est de degré d'exactitude k (au moins) si et seulement si

$$(b-a) \sum_{i=0}^n w_i x_i^r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket. \quad (3.2)$$

Q. 2 Les points $(x_i)_{i=0}^n$ étant fixés, montrer qu'il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (3.1) à $(n+1)$ points de degré d'exactitude n au moins.

Correction

R. 1

- \Rightarrow Si la formule (3.1) est de degré d'exactitude k , elle est donc exacte pour tout polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$ et plus particulièrement pour tous les monômes $1, X, X^2, \dots, X^k$. Soit $r \in \llbracket 0, k \rrbracket$. En prenant $f(x) = x^r$, la formule (3.1) étant exacte par hypothèse, on obtient

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = (b-a) \sum_{i=0}^n w_i x_i^r \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_a^b x^r dx = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}$$

- \Leftarrow On suppose que l'on a (3.2). Soit $P \in \mathbb{R}_k[X]$. On va montrer que la formule de quadrature (3.1) est alors exacte.

Le polynôme P peut s'écrire comme combinaison linéaire des monômes de $\{1, X, X^2, \dots, X^k\}$, base de $\mathbb{R}_k[X]$. On propose ici deux démonstrations.

– **1ère démonstration:** On a donc

$$P(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_j x^j, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En prenant $f = P$, la formule de quadrature (3.1) donne

$$\mathcal{Q}_n(P, a, b) = (b-a) \sum_{i=0}^n w_i P(x_i) = (b-a) \sum_{i=0}^n w_i \sum_{j=0}^k \alpha_j x_i^j$$

De plus, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b P(x) dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \int_a^b x^j dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j+1}$$

et en utilisant (3.2) on obtient

$$\int_a^b P(x) dx = (b-a) \sum_{j=0}^k \alpha_j \sum_{i=0}^n w_i x_i^j$$

Ce qui donne

$$\int_a^b P(x) dx = \mathcal{Q}_n(P, a, b).$$

La formule de quadrature est donc de degré d'exactitude k .

– **2ème démonstration:**

On a donc

$$P = \sum_{j=0}^k \alpha_j X^j$$

et par linéarité de l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ (voir Proposition ??) on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(P, a, b) &= \mathcal{Q}_n\left(\sum_{j=0}^k \alpha_j X^j, a, b\right) \\ &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathcal{Q}_n(X^j, a, b). \end{aligned}$$

Par hypothèse, on a (3.2) et, comme par définition X^j est le polynôme $x \mapsto x^j$, on obtient

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \mathcal{Q}_n(X^j, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_a^b X^j(x) dx = \int_a^b x^j dx = \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j+1}.$$

De plus, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b P(x) dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \int_a^b x^j dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j+1}$$

et donc

$$\int_a^b P(x) dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathcal{Q}_n(X^j, a, b) = \mathcal{Q}_n(P, a, b).$$

R. 2

En fixant les points $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ deux à deux distincts, pour obtenir explicitement la formule de quadrature de type (3.1) il faut déterminer les $n+1$ poids $(w_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$. Or, de (3.2), en prenant $k = n$, on obtient exactement $n+1$ équations linéaires en les (w_i) s'écrivant matriciellement sous la forme :

$$(b-a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

La matrice intervenant dans le système précédent s'appelle **la matrice de Vandermonde** et elle est inversible (car les (x_i) sont deux à deux distincts, voir Exercice 13). Ceci établit donc l'existence et l'unicité de poids $(w_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ tels que la formule de quadrature élémentaire (3.1) soit d'ordre (au moins) n .

Il est aussi possible de démontrer l'unicité classiquement. Supposons qu'il existe $(w_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ et $(\tilde{w}_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on ait

$$\int_a^b P(x) dx = (b-a) \sum_{i=0}^n w_i P(x_i) = (b-a) \sum_{i=0}^n \tilde{w}_i P(x_i).$$

On a alors $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\sum_{i=0}^n (w_i - \tilde{w}_i) P(x_i) = 0. \tag{R3.1}$$

On rappelle que les fonctions de base de Lagrange associées aux $(n+1)$ points $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ notées L_i , sont dans $\mathbb{R}_n[X]$ et vérifient

$$L_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En choisissant $P = L_j$ dans (R3.1), on obtient

$$0 = \sum_{i=0}^n (w_i - \tilde{w}_i) L_j(x_i) = (w_j - \tilde{w}_j)$$

ce qui prouve l'unicité. ◇

EXERCICE 4

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ ($n+1$) points donnés et distincts 2 à 2 d'un intervalle $[a, b]$ ($a < b$). Ecrire une fonction algorithmique `WeightsFromPoints` permettant de déterminer les poids $(w_i)_{i=0}^n$ de telle sorte que la formule de quadrature élémentaire associée soit de degré d'exactitude n au moins en s'inspirant de résultats obtenus dans la démonstration de la Proposition ???. On pourra utiliser la fonction algorithmique $\mathbf{x} \leftarrow \text{Solve}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ permettant de résoudre le système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.



Correction Nous avons vu, dans la Proposition ??, que pour avoir une formule de quadrature élémentaire de degré

d'exactitude n , il est nécessaire et suffisant que les $(n + 1)$ poids $(w_i)_{i=0}^n$ soient solution du système linéaire suivant:

$$(b - a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ \frac{b^2 - a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

Algorithme 1 Fonction `WeightsFromPoints` retournant le tableau des poids \mathbf{w} associé à un tableau de points \mathbf{x} donnés (points 2 à 2 distincts) appartenant à un intervalle $[a, b]$.

Données : \mathbf{x} : tableau de \mathbb{R}^{n+1} contenant $(n + 1)$ points distincts deux à deux dans un intervalle $[a, b]$ avec la convention $\mathbf{x}(i) = x_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$
 a, b : deux réels, $a < b$.

Résultat : \mathbf{w} : vecteur de \mathbb{R}^{n+1} avec $\mathbf{w}(i) = w_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$

```

1: Fonction  $\mathbf{w} \leftarrow \text{WeightsFromPoints}(\mathbf{x}, a, b)$ 
2:  $\mathbf{b} \leftarrow \mathbf{O}_{n+1}$ 
3:  $\mathbb{A} \leftarrow \mathbf{O}_{n+1, n+1}$ 
4: Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n + 1$  faire
5:   Pour  $j \leftarrow 1$  à  $n + 1$  faire
6:      $\mathbb{A}(i, j) \leftarrow \mathbf{x}(j)^{(i-1)}$ 
7:   Fin Pour
8:    $\mathbf{b}(i) \leftarrow (b^i - a^i) / (i * (b - a))$ 
9: Fin Pour
10:  $\mathbf{w} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ 
11: Fin Fonction

```

◇

EXERCICE 5

Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (5.1)$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \quad (5.2)$$

Q. 1 a. Donner explicitement un exemple de points $(x_i)_{i=0}^n$ vérifiant (5.2) (n restant quelconque).

b. Etablir que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad x_i - \frac{a + b}{2} = - \left(x_{n-i} - \frac{a + b}{2} \right).$$

c. Si n est impair, montrer que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, x_i \neq \frac{a + b}{2}$.

d. Si n est pair, montrer qu'il existe un unique $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $x_i = \frac{a + b}{2}$.

Q. 2 Démontrer que l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $f \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$, muni de la norme infini, à valeurs dans \mathbb{R} est linéaire et continue.

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme de degré $2m + 1$ s'écrivant sous la forme

$$P(x) = \sum_{j=0}^{2m+1} a_j x^j$$

avec $(a_j)_{j=0}^{2m+1}$ des réels et $a_{2m+1} \neq 0$.

Q. 3

- a. Calculer les dérivées $P^{(2m+1)}$ et $P^{(2m+2)}$.
 b. Montrer que

$$P(x) = C \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} + R(x) \quad (5.3)$$

en déterminant le degré maximum de R et en exprimant C en fonction des $(a_j)_{j=0}^{2m+1}$.

Q. 4

Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^{2k+1} dx = 0. \quad (5.4)$$

Q. 5

On suppose que la formule de quadrature élémentaire (5.1) est exacte pour les polynômes de $\mathbb{R}_{2m}[X]$.

- a. Dédurre de (5.3) et (5.4) que la formule de quadrature élémentaire (5.1) est exacte pour P si et seulement si

$$(b-a) \sum_{i=0}^n w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} = 0. \quad (5.5)$$

- b. En utilisant Q. 1, démontrer que (5.5) est toujours vérifiée.

Q. 6

Ecrire de manière très précise le résultat démontré.

Correction

R. 1

- a. Soit $(x_i)_{i=0}^n$ la discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$,

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad x_i = a + ih.$$

Dans ce cas, tous les points sont distincts deux à deux et on a pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $n-i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et

$$\frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + ih + a + (n-i)h}{2}.$$

Or $a + nh = b$, ce qui donne

$$\frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

- b. De (5.2), on déduit

$$(5.2) \Leftrightarrow x_i + x_{n-i} = a+b \Leftrightarrow x_i - \frac{a+b}{2} = - \left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2} \right)$$

- c. Si $n = 2k - 1$, (n impair), on a alors un nombre **pair** de points. Par l'absurde supposons $\exists i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $x_i = \frac{a+b}{2}$. Dans ce cas, on a $x_{n-i} = \frac{a+b}{2} = x_i$. Comme les points $(x_j)_{j=0}^n$ sont distincts deux à deux, pour avoir une contradiction, il suffit de montrer que $i \neq n-i$. En effet, on a

$$\llbracket 0, n \rrbracket = \llbracket 0, 2k-1 \rrbracket = \llbracket 0, k-1 \rrbracket \cup \llbracket k, 2k-1 \rrbracket.$$

- si $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ alors

$$0 \leq i \leq k-1 \Leftrightarrow n - (k-1) \leq n-i \leq n \Leftrightarrow k \leq n-i \leq n,$$

et donc $n-i \neq i$

- si $i \in \llbracket k, 2k-1 \rrbracket$ alors

$$k \leq i \leq 2k-1 \Leftrightarrow n - (2k-1) \leq n-i \leq n-k \Leftrightarrow 0 \leq n-i \leq k-1,$$

et donc $n-i \neq i$.

d. Si $n = 2k$, (n pair), on a alors un nombre **impair** de points. Comme $n - k = k$, on obtient à partir de (5.2)

$$\frac{x_k + x_{n-k}}{2} = \frac{a+b}{2}$$

c'est à dire

$$x_k = \frac{a+b}{2}.$$

Comme les points sont distincts deux à deux, on obtient l'unicité.

R. 2

On commence par démontrer la linéarité. Soient f et g dans $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(\lambda f + \mu g, a, b) &= (b-a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f + \mu g)(x_j) \\ &= (b-a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)) \\ &= \lambda (b-a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) + \mu (b-a) \sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \\ &= \lambda \mathcal{Q}_n(f, a, b) + \mu \mathcal{Q}_n(g, a, b). \end{aligned}$$

L'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est donc linéaire. Pour démontrer qu'elle est continue, il suffit alors de démontrer que

$$\exists C > 0, \text{ tel que } |\mathcal{Q}_n(f, a, b)| \leq C \|f\|_\infty, \forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}).$$

Or, on a, pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{Q}_n(f, a, b)| &= |(b-a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j)| \\ &\leq (b-a) \sum_{j=0}^n |w_j| |f(x_j)| \\ &\leq C \|f\|_\infty, \text{ avec } C = (b-a) \sum_{j=0}^n |w_j| \text{ indépendant de } f. \end{aligned}$$

R. 3

a. On a $P(x) = a_{2m+1}x^{2m+1} + \sum_{j=0}^{2m} a_j x^j$ et comme la dérivée $(2m+1)$ d'un polynôme de degré $2m$ est nulle, on obtient

$$P^{(2m+1)}(x) = a_{2m+1} \frac{d^{2m+1} x^{2m+1}}{dx^{2m+1}} = a_{2m+1} (2m+1)!$$

et

$$P^{(2m+2)}(x) = 0.$$

b. C'est la division euclidienne du polynôme P de degré $(2m+1)$ par le polynôme $x \mapsto (x - \frac{a+b}{2})^{2m+1}$ de degré $(2m+1)$. On a donc C constante et $R \in \mathbb{R}_{2m}[X]$. Pour calculer C , on dérive $(2m+1)$ fois (5.3), ce qui donne

$$P^{(2m+1)}(x) = C(2m+1)!$$

En identifiant, avec la sous-question précédente, on obtient $C = a_{2m+1}$.

R. 4

En effectuant le changement de variable $t \mapsto \frac{a+b}{2} + t \frac{b-a}{2}$ on obtient

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 t^{2m+1} dt = 0.$$

On peut aussi utiliser directement la primitive de $(x - \frac{a+b}{2})^{2m+1}$ qui est $\frac{1}{2m+2} (x - \frac{a+b}{2})^{2m+2} \dots$

a. On a, en utilisant la linéarité de l'intégrale et (5.3)

$$\int_a^b P(x)dx = C \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} dx + \int_a^b R(x)dx$$

En utilisant la linéarité de $\mathcal{Q}_n(\bullet, a, b)$ et (5.3) on obtient

$$\mathcal{Q}_n(P, a, b) = (b-a)C \sum_{i=0}^n w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} + (b-a) \sum_{i=0}^n w_i R(x_i).$$

On a $R \in \mathbb{R}_{2m}[X]$ et, par hypothèse, la formule de quadrature est exacte pour les polynômes de degré $2m$ dans $\mathbb{R}_{2m}[X]$ ce qui donne

$$\mathcal{Q}_n(R, a, b) = (b-a) \sum_{i=0}^n w_i R(x_i).$$

Or, la formule de quadrature élémentaire (5.1) est exacte pour P si et seulement si

$$\mathcal{Q}_n(P, a, b) = \int_a^b P(x)dx$$

ce qui est donc équivalent à

$$(b-a)C \sum_{i=0}^n w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} = C \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} dx.$$

En utilisant (5.4) et le fait que $C = a_{2m+1} \neq 0$, on en déduit que la formule de quadrature élémentaire (5.1) est exacte pour P si et seulement si (5.5) est vérifiée.

b. • Si $n = 2k$, (n paire), on a alors un nombre **impair** de points avec nécessairement $x_k = x_{n-k} = \frac{a+b}{2}$ et

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} + 0 \times w_k + \sum_{i=k+1}^{2k} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} - \sum_{i=k+1}^{2k} w_{n-i} \left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} - \sum_{j=0}^{k-1} w_j \left(x_j - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

• Si $n = 2k - 1$, (n impaire), on a alors un nombre **pair** de points (avec $x_i \neq \frac{a+b}{2}$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$) et

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} + \sum_{i=k}^{2k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} - \sum_{i=k}^{2k-1} w_{n-i} \left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} - \sum_{j=0}^{k-1} w_j \left(x_j - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par (5.1) où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels vérifiant (5.2). Si cette formule est exacte pour les polynômes de degré $2m$ alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré $2m + 1$.

◇

EXERCICE 6

Soient a, b deux réels, $a < b$ et $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie de $[a; b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Soient $f \in \mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (6.1)$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

Q. 1 Démontrer que l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R} est linéaire.

On note, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$L_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

et $t_i = (x_i - a)/(b - a)$. On rappelle que le polynôme d'interpolation de Lagrange associés aux points $(x_i, f(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ s'écrit

$$\mathcal{L}_n(f)(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

et que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$ alors on a

$$\forall x \in [a, b], \exists \xi_x \in [a, b], f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (6.2)$$

Q. 2 Montrer que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(x) dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt. \quad (6.3)$$

Q. 3 a. Montrer que si \mathcal{Q}_n a pour degré d'exactitude n au moins alors, on a

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(x) dx. \quad (6.4)$$

b. Montrer que si (8.3) est vérifiée, alors \mathcal{Q}_n a pour degré d'exactitude n au moins.

Q. 4 On suppose les poids $(w_i)_{i=0}^n$ donnés par (8.3). Montrer que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$ alors on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b) \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx \quad (6.5)$$

Correction

R. 1 Soient f et g dans $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$, et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(\lambda f + \mu g, a, b) &= (b-a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f + \mu g)(x_j) \\ &= (b-a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)) \\ &= \lambda (b-a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) + \mu (b-a) \sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \\ &= \lambda \mathcal{Q}_n(f, a, b) + \mu \mathcal{Q}_n(g, a, b). \end{aligned}$$

L'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est donc linéaire.

R. 2

Par le changement de variables $s : t \rightarrow a + (b - a)t$ on obtient

$$\int_a^b L_i(x) dx = \int_{s^{-1}(a)}^{s^{-1}(b)} L_i \circ s(t) s'(t) dt = (b - a) \int_0^1 L_i \circ s(t) dt$$

et l'on a $x_i = s(t_i) = a + (b - a)t_i$ où $t_i = (x_i - a)/(b - a)$. On en déduit

$$\begin{aligned} \int_0^1 L_i \circ s(t) dt &= \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{s(t) - s(t_j)}{s(t_i) - s(t_j)} dt = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(b - a)(t - t_j)}{(b - a)(t_i - t_j)} dt \\ &= \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt \end{aligned}$$

et on obtient bien (8.2).

R. 3

- a. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$. Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude n au moins et donc on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_a^b L_i(x) dx.$$

Or comme $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i, a, b) = (b - a) \sum_{j=0}^n w_j L_i(x_j) = (b - a) w_i.$$

Ce qui donne

$$w_i = \frac{1}{b - a} \int_a^b L_i(x) dx.$$

- b. Par hypothèse, les poids $(w_i)_{i=0}^n$ étant donnés par (8.2), La formule de quadrature s'écrit

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx.$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a $P = \mathcal{L}_n(P)$ et

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x) dx &= \int_a^b \mathcal{L}_n(P)(x) dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^n L_i(x) P(x_i) dx \\ &= \sum_{i=0}^n P(x_i) \int_a^b L_i(x) dx \\ &= (b - a) \sum_{i=0}^n w_i P(x_i) = \mathcal{Q}_n(P, a, b). \end{aligned}$$

La formule de quadrature est donc exacte pour tout les polynômes de degré n au moins.

R. 4

Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$, on déduit de (6.2) que pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi_x \in [a, b]$ tel que

$$\begin{aligned} |f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x)| &= \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \pi_n(x) \right| \\ &\leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty}}{(n+1)!} |\pi_n(x)| \end{aligned}$$

L'application $f - \mathcal{L}_n(f)$ étant continue sur $[a, b]$, elle est alors intégrable sur $[a, b]$, et l'application $|f - \mathcal{L}_n(f)|$ l'est aussi.

De même $|\pi_n(x)|$ est intégrable sur $[a, b]$. On obtient alors

$$\int_a^b |f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x)| dx \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \int_a^b |\pi_n(x)| dx.$$

De plus

$$\left| \int_a^b f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x)| dx$$

ce qui donne

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x) dx \right| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx.$$

La formule de quadrature est de degré d'exactitude n au moins et le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{L}_n(f)$ est de degré n donc on a

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x) dx &= \mathcal{Q}_n(\mathcal{L}_n(f), a, b) \\ &= (b-a) \sum_{i=0}^n w_i \mathcal{L}_n(f)(x_i) \\ &= (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \text{ car } \mathcal{L}_n(f)(x_i) = f(x_i) \\ &= \mathcal{Q}_n(f, a, b) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b) \right| &= \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \mathcal{L}_n(f)(x) dx \right| \\ &\leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx. \end{aligned}$$

◇

EXERCICE 7

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 de l'intervalle $[a, b]$ vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

On note $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ les $(n+1)$ polynômes de base de Lagrange définis par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

et vérifiant $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$

Q. 1 Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_i((a+b) - x) = L_{n-i}(x).$$

Q. 2 Soient $(w_i)_{i=0}^n$ définis par

$$w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(t) dt, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Montrer que l'on a alors

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad w_i = w_{n-i}$$

Correction

R. 1

Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On note $\varphi(x) = (a + b) - x$ le polynôme de degré 1 et $P = L_i \circ \varphi$ le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ (la composé de 2 polynômes est de degré le produit des degrés des 2 polynômes).

On a

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad x_{n-j} = (a + b) - x_j$$

et

$$P(x_j) = L_i((a + b) - x_j) = L_i(x_{n-j}) = \delta_{i, n-j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = n - j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = n - i \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{n-i, j}.$$

C'est à dire

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P(x_j) = \delta_{n-i, j}.$$

Or L_{n-i} est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant la relation précédente dont $P = L_{n-i}$ (voir Exercice ??, page ??).

R. 2

Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On note $t = \varphi(x) = (a + b) - x$ le changement de variable affine. On a alors $\varphi^{-1}(t) = (a + b) - t$ et

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(t) dt \\ &= \frac{1}{b-a} \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} L_i \circ \varphi(x) \varphi'(x) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_b^a L_i((a+b) - x) (-1) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i((a+b) - x) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b L_{n-i}(x) dx \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= w_{n-i}. \end{aligned}$$

◇

EXERCICE 8

Soient a, b deux réels, $a < b$ et $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie de $[a; b]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Soient $f \in \mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x) dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \tag{8.1}$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

On suppose que (8.1) a pour degré d'exactitude n au moins.

Q. 1

Démontrer que l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R} est linéaire.

Soient π_n le polynôme de degré $(n + 1)$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

et $m \in \mathbb{N}^*$.

rappel division euclidienne: Soient A et B deux polynômes, B étant non nul, alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Dans la division euclidienne de A par B, Q est le quotient et R le reste.

Q. 2

a. Soit $P \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$. Déterminer les degrés maximaux des polynômes Q (quotient) et R (reste), obtenus par la division euclidienne de P par π_n , et satisfaisant

$$P = \pi_n Q + R.$$

b. En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n+m}[X], \int_a^b P(x)dx - \mathcal{Q}_n(P, a, b) = \int_a^b Q(x)\pi_n(x)dx. \quad (8.2)$$

où Q est le quotient de la division euclidienne de P par π_n ,

Q. 3

Démontrer que (8.1) a pour degré d'exactitude $n + m$ au moins si et seulement si

$$\forall H \in \mathbb{R}_{m-1}[X], \int_a^b \pi_n(x)H(x)dx = 0. \quad (8.3)$$

Q. 4

En déduire le degré maximal d'exactitude de (8.1).

Q. 5

Démontrer que (8.1) a pour degré d'exactitude $n + m$ au moins si et seulement si

$$\int_a^b \pi_n(x)x^k dx = 0, \quad \forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket. \quad (8.4)$$

Correction

R. 1

Soient f et g dans $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$, et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(\lambda f + \mu g, a, b) &= (b-a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f + \mu g)(x_j) \\ &= (b-a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)) \\ &= \lambda (b-a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) + \mu (b-a) \sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \\ &= \lambda \mathcal{Q}_n(f, a, b) + \mu \mathcal{Q}_n(g, a, b). \end{aligned}$$

L'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est donc linéaire.

R. 2

a. On effectue la division euclidienne de P , $\deg(P) \leq n + m$, par π_n , $\deg(\pi_n) = n + 1$. On a alors l'existence et l'unicité d'un couple (Q, R) tel que $\deg(R) < \deg(\pi_n) = n + 1$, c'est à dire $R \in \mathbb{R}_n[X]$, et

$$P = \pi_n Q + R.$$

- Si $\deg(P) \leq n < (n + 1) = \deg(\pi_n)$, $Q = 0$ et $R = P$.
- Si $\deg(P) \geq (n + 1) = \deg(\pi_n) > \deg(R)$, on obtient

$$\deg(P) = \deg(\pi_n Q) = \deg(\pi_n) + \deg(Q)$$

et donc $\deg(Q) = \deg(P) - \deg(\pi_n) \leq n + m - (n + 1) = m - 1$, c'est à dire $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

En résumé, on a $R \in \mathbb{R}_n[X]$, et on peut noter que, dans les deux cas, $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

b. Soit $P \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$. On note Q et R , respectivement quotient et reste de la division euclidienne de P par π_n . On vient de voir que $R \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b P(x)dx = \int_a^b Q(x)\pi_n(x)dx + \int_a^b R(x)dx$$

et par linéarité de \mathcal{Q}_n

$$\mathcal{Q}_n(P, a, b) = \mathcal{Q}_n(Q\pi_n, a, b) + \mathcal{Q}_n(R, a, b).$$

Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude n et comme $R \in \mathbb{R}_n[X]$ on obtient

$$\int_a^b R(x)dx = \mathcal{Q}_n(R, a, b).$$

On en déduit alors que

$$\int_a^b P(x)dx - \mathcal{Q}_n(P, a, b) = \int_a^b Q(x)\pi_n(x)dx - \mathcal{Q}_n(Q\pi_n, a, b).$$

Par construction $\pi_n(x_j) = 0, \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, ce qui donne

$$\mathcal{Q}_n(Q\pi_n, a, b) = (b-a) \sum_{j=0}^n w_j Q(x_j)\pi_n(x_j) = 0$$

et donc

$$\int_a^b P(x)dx - \mathcal{Q}_n(P, a, b) = \int_a^b Q(x)\pi_n(x)dx.$$

R. 3

⇐ On suppose que (8.3) est vérifié.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$. On note Q et R , respectivement quotient et reste de la division euclidienne de P par π_n . On a vu en **Q. 2** que $R \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

Comme $Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$, on obtient

$$\int_a^b \pi_n(x)Q(x)dx = 0$$

ce qui donne en utilisant (8.2):

$$\int_a^b P(x)dx - \mathcal{Q}_n(P, a, b) = 0.$$

Comme P est quelconque dans $\mathbb{R}_{n+m}[X]$, la formule de quadrature est donc de degré d'exactitude $n + m$.

⇒ On suppose que la formule de quadrature est de degré d'exactitude $(n + m)$.

Pour tout $H \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$, le polynôme $P = H\pi_n \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$. La formule de quadrature est donc exacte pour P :

$$\int_a^b P(x)dx - \mathcal{Q}_n(P, a, b) = 0.$$

Par construction, la division euclidienne de P par π_n a pour quotient H et pour reste 0. En utilisant (8.2), on obtient alors

$$\int_a^b Q(x)\pi_n(x)dx = 0.$$

R. 4

Si $Q = \pi_n$, on obtient

$$\int_a^b \pi_n(x)Q(x)dx = \int_a^b Q^2(x)dx > 0.$$

Comme $\deg(\pi_n) = n + 1$, on déduit que l'on doit avoir $\deg(Q) \leq n$ pour que (8.3) soit vérifiée. On a alors

$$\deg(P) = m + n = \deg(Q) + \deg(\pi_n) \leq n + (n + 1)$$

et donc $m \leq n + 1$. Le degré maximal d'exactitude est donc $2n + 1$.

R. 5

D'après la **Q. 3**, il suffit de démontrer que (8.3) est équivalent à (8.4).

⇒ On suppose (8.3) vérifiée.

Le résultat est immédiat car, $\forall k \in \llbracket 0, m - 1 \rrbracket, x \mapsto x^k \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

⇐ On suppose (8.4) vérifiée.

Soit $H \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$. Il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k x^k.$$

On utilise la linéarité de l'intégrale pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_a^b H(x)\pi_n(x)dx &= \int_a^b \pi_n(x) \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k x^k dx \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \int_a^b \pi_n(x)x^k dx \\ &\stackrel{(8.4)}{=} \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \times 0 = 0. \end{aligned}$$

◇

EXERCICE 9

Q. 1

Ecrire une fonction algorithmique `WeightsPointsNC` retournant les $(n+1)$ points et les $(n+1)$ poids de la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à $(n+1)$ points.

Q. 2

Ecrire une fonction algorithmique `QuadElemNC` retournant la valeur de $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ correspondant à la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à $(n+1)$ points.

Correction

R. 1

Algorithme 2 Fonction `WeightsPointsNC` retournant le tableau de points \mathbf{x} donnés correspondant à la discrétisation régulière intervalle $[a, b]$. et le tableau des poids \mathbf{w} associé à un

Données : a, b : deux réels, $a < b$,
 n : $n \in \mathbb{N}^*$.

Résultat : \mathbf{x} : vecteur de \mathbb{R}^{n+1} avec $\mathbf{x}(i) = x_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$
 et $x_{i-1} = a + (i-1)h, h = (b-a)/n$,
 \mathbf{w} : vecteur de \mathbb{R}^{n+1} avec $\mathbf{w}(i) = w_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$

- 1: **Fonction** $[\mathbf{x}, \mathbf{w}] \leftarrow \text{WeightsPointsNC}(a, b, n)$
- 2: $\mathbf{x} \leftarrow a : (b-a)/n : b$
- 3: $\mathbf{w} \leftarrow \text{WeightsFromPoints}(\mathbf{x}, a, b)$
- 4: **Fin Fonction**

R. 2

On a de manière générique l'algorithme suivant:

Algorithme 3 Fonction `QuadElemGen` retourne la valeur de $I = (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j)$.

Données : f : une fonction définie de $[a, b]$ dans \mathbb{R} ,
 a, b : deux réels avec $a < b$
 \mathbf{x} : vecteur de \mathbb{R}^{n+1} contenant $(n + 1)$ points distincts deux à deux dans un intervalle $[a, b]$ avec la convention $\mathbf{x}(i) = x_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$
 \mathbf{w} : vecteur de \mathbb{R}^{n+1} tel que $\mathbf{w}(i) = w_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$

Résultat : I : un réel

```

1: Fonction  $I \leftarrow \text{QuadElemGen}(f, a, b, \mathbf{x}, \mathbf{w})$ 
2:    $I \leftarrow 0$ 
3:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $\text{Length}(\mathbf{x})$  faire
4:      $I \leftarrow I + \mathbf{w}(i) * f(\mathbf{x}(i))$ 
5:   Fin Pour
6:    $I \leftarrow (b - a) * I$ 
7: Fin Fonction

```

On peut noter que si l'on dispose de la fonction $s \leftarrow \text{Dot}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ correspondant au produit scalaire de deux vecteurs du même espace alors on a directement

$$I \leftarrow (b - a) * \text{Dot}(\mathbf{w}, f(\mathbf{x})).$$

Algorithme 4 Fonction `QuadElemGen` retourne la valeur de $I = (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j)$ où les poids w_i et les points x_i sont ceux définis par la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes

Données : f : une fonction définie de $[a, b]$ dans \mathbb{R} ,
 a, b : deux réels avec $a < b$,
 n : $n \in \mathbb{N}^*$

Résultat : I : un réel

```

1: Fonction  $I \leftarrow \text{QuadElemNC}(f, a, b, n)$ 
2:    $[\mathbf{x}, \mathbf{w}] \leftarrow \text{WeightsPointsNC}(a, b, n)$ 
3:    $I \leftarrow \text{QuadElemGen}(f, a, b, \mathbf{x}, \mathbf{w})$ 
4: Fin Fonction

```

◇

EXERCICE 10

Q. 1 Déterminer les points t_0, t_1 de l'intervalle $[-1, 1]$ et les poids w_0, w_1 tel que la formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx 2 \sum_{i=0}^1 w_i g(t_i)$$

soit de degré d'exactitude 3.

Q. 2 En déduire une formule de quadrature pour le calcul de $\int_a^b f(x) dx$ qui soit de degré d'exactitude 3.

Correction

R. 1 D'après la Proposition ??, si t_0 et t_1 sont distincts et dans l'intervalle $[-1, 1]$ alors avec

$$w_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} dt \text{ et } w_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} dt$$

la formule de quadrature est de degré d'exactitude 1.

Pour déterminer les points t_0 et t_1 , on utilise la Proposition ?? (degré maximal d'exactitude) avec $m = n + 1 = 2$: la

formule de quadrature est de degré $2n + 1 = 3$ ssi

$$\int_{-1}^1 \pi_1(t)Q(t)dt = 0, \forall Q \in \mathbb{R}_1[X]$$

avec $\pi_1(t) = (t - t_0)(t - t_1)$. Par linéarité ceci est équivalent à

$$\int_{-1}^1 \pi_1(t)t^k dt = 0, \forall k \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$$

c'est à dire

$$\int_{-1}^1 \pi_1(t)dt = 0 \text{ et } \int_{-1}^1 \pi_1(t)t dt = 0.$$

Or on a

$$\int_{-1}^1 \pi_1(t)dt = \int_{-1}^1 t^2 - (t_0 + t_1)t + t_0t_1 dt = \frac{2}{3} + 2t_0t_1$$

et

$$\int_{-1}^1 \pi_1(t)t dt = \int_{-1}^1 t^3 - (t_0 + t_1)t^2 + t_0t_1t dt = -\frac{2}{3}(t_0 + t_1).$$

On est amené à résoudre le système non linéaire

$$t_0t_1 = -\frac{1}{3} \text{ et } -\frac{2}{3}(t_0 + t_1) = 0$$

ce qui donne $t_0 = -\sqrt{3}/3$ et $t_1 = \sqrt{3}/3$.

Il reste à calculer w_0 et w_1 . On a

$$w_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{t - \sqrt{3}/3}{-2\sqrt{3}/3} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{-\sqrt{3}/3}{-2\sqrt{3}/3} dt = 1/2$$

et

$$w_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{t + \sqrt{3}/3}{2\sqrt{3}/3} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}/3}{2\sqrt{3}/3} dt = 1/2.$$

La formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 g(t)dt \approx g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

est donc d'ordre 3.

R. 2

On effectue le changement de variable $x = \varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$, en appliquant la Proposition ?? (changement de variable affine), pour obtenir que

$$(b-a) \left(\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1) \right)$$

est une formule de quadrature approchant $\int_a^b f(x)dx$ avec un degré d'exactitude de 3 où $x_0 = \varphi(t_0)$ et $x_1 = \varphi(t_1)$.

◇

EXERCICE 11

L'objectif de cet exercice est de calculer les points et les poids de la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n + 1)$ points. La formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n + 1)$ points sur $[-1, 1]$ est donnée par

$$\int_{-1}^1 g(t)dt \approx 2 \sum_{i=0}^n w_i g(t_i)$$

où les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $(n + 1)$ racines du polynôme de Legendre $P_{n+1}(t)$. Cette formule a pour degré d'exactitude $2n + 1$. Soient $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et $\|P\| = \langle P, P \rangle^{1/2}$ la norme associée.

Soit M_n le polynôme de Legendre normalisé de degré $(n + 1)$, $M_n = \frac{P_n}{\|P_n\|}$. On utilisera les résultats sur les polynômes de Legendre rappelés en cours.

Q. 1 Montrer que

$$c_{n+1}M_{n+1}(t) = tM_n(t) - c_nM_{n-1}(t), \quad n > 1 \quad (11.1)$$

avec

$$M_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad M_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t \quad \text{et} \quad c_n = \sqrt{\frac{n^2}{4n^2 - 1}}$$

On définit le vecteur $\mathbf{M}(t)$ de \mathbb{R}^{n+1} par

$$\mathbf{M}(t) = (M_0(t), \dots, M_n(t))^t.$$

Q. 2 Montrer que l'on a

$$t\mathbf{M}(t) = \mathbb{A}\mathbf{M}(t) + c_{n+1}M_{n+1}(t)\mathbf{e}_{n+1} \quad (11.2)$$

où l'on explicitera la matrice tridiagonale $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients c_1, \dots, c_n . Le vecteur \mathbf{e}_{n+1} étant le $(n+1)$ -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} .

Q. 3 En déduire que les $(n+1)$ racines distinctes de $M_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ sont les $(n+1)$ valeurs propres de \mathbb{A} .

Q. 4 Montrer que

$$2 \sum_{k=0}^n w_k M_i(t_k) M_j(t_k) = \delta_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2 \quad (11.3)$$

où $\delta_{i,j} = 0$, si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$.

On note $\mathbb{W} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice diagonale, de diagonale (w_0, \dots, w_n) et $\mathbb{P} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par $\mathbb{P}_{i+1, j+1} = M_j(t_i)$, $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$.

Q. 5 a. Montrer que $2\mathbb{P}^t\mathbb{W}\mathbb{P} = \mathbb{I}$.

b. En déduire que $\mathbb{W}^{-1} = 2\mathbb{P}\mathbb{P}^t$.

c. En déduire que $\frac{1}{w_i} = 2 \sum_{k=0}^n (M_k(t_i))^2$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On suppose que l'on dispose de la fonction **algorithmique** $\text{eig}(\mathbb{A})$ retournant l'ensemble des valeurs propres d'une matrice symétrique $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dans l'ordre croissant sous la forme d'un vecteur de \mathbb{R}^{n+1} .

Q. 6 a. Ecrire la fonction $[\mathbf{t}, \mathbf{w}] \leftarrow \text{GaussLegendre}(n)$ retournant le tableau des points \mathbf{t} et le tableau des poids \mathbf{w} en utilisant les résultats obtenus dans cet exercice.

b. Ecrire la fonction $I \leftarrow \text{QuadElemGaussLegendre}(f, a, b, n)$ retournant une approximation de $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points sur l'intervalle $[a, b]$.



Correction

R. 1 Par définition, on a $M_n = \frac{P_n}{\|P_n\|}$ et

$$\|P_n\|^2 = \langle P_n, P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_n(t)P_n(t)dx = \frac{2}{2n+1}.$$

On en déduit que

$$M_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n.$$

De plus, par la formule de récurrence de Bonnet, on obtient

$$M_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad M_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t$$

ainsi que, $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} (n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+3}}M_{n+1}(t) &= (2n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+1}}tM_n(t) - n\sqrt{\frac{2}{2n-1}}M_{n-1} \\ &= \sqrt{2(2n+1)}tM_n(t) - n\sqrt{\frac{2}{2n-1}}M_{n-1} \end{aligned}$$

En multipliant cette équation par $\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}}$, on a

$$(n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+3}}\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}}M_{n+1}(t) = tM_n(t) - n\sqrt{\frac{2}{2n-1}}\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}}M_{n-1}$$

Or on a

$$n\sqrt{\frac{2}{2n-1}}\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}} = \sqrt{\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}} = c_n$$

et

$$(n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+3}}\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}} = \sqrt{\frac{(n+1)^2}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}} = c_{n+1}$$

ce qui démontre le résultat voulu.

R. 2

On déduit de la question précédente que

$$tM_0(t) = \sqrt{\frac{1}{3}}t = c_1M_1(t)$$

et

$$tM_i(t) = c_iM_{i-1}(t) + c_{i+1}M_{i+1}(t), \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Ces $(n+1)$ équations peuvent s'écrire matriciellement sous la forme

$$\begin{aligned} t \begin{pmatrix} M_0(t) \\ M_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1}(t) \\ M_n(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & 0 & c_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0(t) \\ M_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1}(t) \\ M_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ c_{n+1}M_{n+1}(t) \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{A}\mathbf{M}(t) + c_{n+1}M_{n+1}(t)\mathbf{e}_{n+1}. \end{aligned}$$

R. 3

Le polynôme de Legendre $P_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ admet $(n+1)$ racines simples distinctes dans $] -1, 1[$ notées $(t_i)_{i=0}^n$. (voir rappels) Donc le polynôme de Legendre normalisé $M_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ a les mêmes racines et on déduit de la question précédente que

$$\mathbb{A}\mathbf{M}(t_i) = t_i\mathbf{M}(t_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Comme les $(n+1)$ racines de P_{n+1} séparent strictement les n racines de P_n (voir rappels), alors $P_n(t_i) \neq 0$ et donc $M_n(t_i) \neq 0$. On en déduit que le vecteur $\mathbf{M}(t_i)$ est non nul et,

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, (t_i, \mathbf{M}(t_i)) \text{ est un mode propre de } \mathbb{A}.$$

On peut noter que \mathbb{A} est symétrique et donc ses valeurs propres sont réelles.

Les $(n+1)$ valeurs propres de la matrice \mathbb{A} sont les $(n+1)$ racines de P_{n+1} , et donc les $(n+1)$ points de la formule de quadrature de Gauss-Legendre.

R. 4

Par construction, on a

$$\int_{-1}^1 M_i(t)M_j(t)dx = \delta_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

On a $M_i \in \mathbb{R}_i[X]$ et $M_j \in \mathbb{R}_j[X]$, ce qui donne $M_iM_j \in \mathbb{R}_{i+j}[X]$ avec $i+j \leq 2n$. Or la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points a pour degré d'exactitude $2n+1$, elle est donc exacte pour le polynôme M_iM_j . On en

déduit alors

$$\delta_{i,j} = \int_{-1}^1 M_i(t)M_j(t)dt = 2 \sum_{k=0}^n w_k M_i(t_k)M_j(t_k), \quad \forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

R. 5

a. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$, on a

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}^t \mathbb{W} \mathbb{P})_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n+1} (\mathbb{P}^t)_{i,k} (\mathbb{W} \mathbb{P})_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_{k,i} (\mathbb{W} \mathbb{P})_{k,j} \end{aligned}$$

et, comme \mathbb{W} est diagonale,

$$(\mathbb{W} \mathbb{P})_{k,j} = \sum_{l=1}^{n+1} \mathbb{W}_{k,l} \mathbb{P}_{l,j} = \mathbb{W}_{k,k} \mathbb{P}_{k,j}.$$

On obtient donc

$$(\mathbb{P}^t \mathbb{W} \mathbb{P})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_{k,i} \mathbb{W}_{k,k} \mathbb{P}_{k,j} = \sum_{k=1}^{n+1} w_{k-1} M_{i-1}(t_{k-1}) M_{j-1}(t_{k-1}).$$

En utilisant la relation démontré dans la question précédente, on a

$$(\mathbb{P}^t \mathbb{W} \mathbb{P})_{i,j} = \frac{1}{2} \delta_{i-1, j-1} = \frac{1}{2} \delta_{i,j}$$

c'est à dire

$$\mathbb{P}^t \mathbb{W} \mathbb{P} = \frac{1}{2} \mathbb{I}$$

et on en déduit que \mathbb{P} et \mathbb{W} sont inversibles .

b. A partir de $\mathbb{P}^t \mathbb{W} \mathbb{P} = \frac{1}{2} \mathbb{I}$, on déduit

$$2\mathbb{I} = (\mathbb{P}^t \mathbb{W} \mathbb{P})^{-1} = 2\mathbb{I} = \mathbb{P}^{-1} \mathbb{W}^{-1} (\mathbb{P}^t)^{-1}$$

En multipliant par \mathbb{P} à gauche et par \mathbb{P}^t à droite, on obtient

$$\mathbb{W}^{-1} = 2\mathbb{P} \mathbb{P}^t.$$

c. Comme la matrice \mathbb{W} est diagonale inversible, son inverse est diagonale et on a

$$(\mathbb{W}^{-1})_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{W}_{i,i}} = \frac{1}{w_{i-1}}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_{i-1}} &= 2(\mathbb{P} \mathbb{P}^t)_{i,i} \\ &= 2 \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}_{i,j} (\mathbb{P}^t)_{j,i} \\ &= 2 \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}_{i,j}^2 \\ &= 2 \sum_{k=0}^n (M_k(t_{i-1}))^2, \quad \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket. \end{aligned}$$

R. 6

a. Les $(n+1)$ points $(t_i)_{i=0}^n$ de la méthode de quadrature de Gauss-Legendre sur $[-1, 1]$, sont les racines du polynôme de Legendre P_{n+1} de degré $n+1$. Pour les calculer, on va utiliser le fait que ce sont les valeurs propres de la matrice

symétrique $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & 0 & c_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_n & 0 \end{pmatrix}$$

avec $c_k = \sqrt{\frac{k^2}{4k^2-1}}$, $\forall k \geq 1$.

Pour calculer les poids $(w_i)_{i=0}^n$, on va utiliser la formule

$$\frac{1}{w_i} = 2 \sum_{k=0}^n (M_k(t_i))^2, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

conjointement avec la formule de récurrence

$$M_k(t) = \frac{1}{c_k} (tM_{k-1}(t) - c_{k-1}M_{k-2}(t)), \quad k \geq 2, \quad \text{avec } M_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad M_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

Algorithme 5 Fonction **GaussLegendre** retournant le tableau des points \mathbf{t} et le tableau des poids \mathbf{w}

Données : n : $n \in \mathbb{N}$

Résultat : \mathbf{t} : vecteur de \mathbb{R}^{n+1} avec $\mathbf{t}(i) = t_{i-1}$, $\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$

\mathbf{w} : vecteur de \mathbb{R}^{n+1} avec $\mathbf{w}(i) = w_{i-1}$, $\forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$

```

1: Fonction [ $\mathbf{t}, \mathbf{w}$ ]  $\leftarrow$  GaussLegendre(  $n$  )
2:    $\mathbf{c} \leftarrow \mathbf{O}_n$ 
3:    $\mathbb{A} \leftarrow \mathbb{O}_{n+1, n+1}$ 
4:   Pour  $k \leftarrow 1$  à  $n$  faire
5:      $\mathbf{c}(k) \leftarrow \text{sqrt}(k^2/(4 * k^2 - 1))$ 
6:      $\mathbb{A}(k, k+1) \leftarrow \mathbf{c}(k)$ 
7:      $\mathbb{A}(k+1, k) \leftarrow \mathbf{c}(k)$ 
8:   Fin Pour
9:    $\mathbf{t} \leftarrow \text{eig}(\mathbb{A})$ 
10:  Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n+1$  faire
11:     $M0 \leftarrow \text{sqrt}(1/2)$ 
12:     $M1 \leftarrow \text{sqrt}(3/2) * \mathbf{t}(i)$ 
13:     $S \leftarrow M0^2 + M1^2$ 
14:    Pour  $k \leftarrow 2$  à  $n$  faire
15:       $M \leftarrow (1/\mathbf{c}(k)) * (M1 * \mathbf{t}(i) - \mathbf{c}(k-1) * M0)$ 
16:       $S \leftarrow S + M^2$ 
17:       $M0 \leftarrow M1$ 
18:       $M1 \leftarrow M$ 
19:    Fin Pour
20:     $w(i) \leftarrow 1/(2 * S)$ 
21:  Fin Pour
22: Fin Fonction

```

b. On va utiliser la formule

$$I = (b-a) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

avec $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$ où les points $(t_i)_{i=0}^n$ et les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont ceux de la méthode de quadrature de Gauss-Legendre sur $[-1, 1]$.

Algorithme 6 Fonction `QuadElemGaussLegendre` retournant une approximation de $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $n + 1$ points sur l'intervalle $[a, b]$.

Données : f : une fonction de $[a, b]$ à valeurs réels
 a, b : deux réels avec $a < b$
 n : $n \in \mathbb{N}$

Résultat : I : un réel

```

1: Fonction  $I \leftarrow \text{QuadElemGaussLegendre}(f, a, b, n)$ 
2:  $[t, w] \leftarrow \text{GaussLegendre}(n)$ 
3:  $I \leftarrow 0$ 
4: Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n + 1$  faire
5:    $I \leftarrow I + w(i) * f((a + b)/2 + (b - a)/2 * t(i))$ 
6: Fin Pour
7:  $I \leftarrow (b - a) * I$ 
8: Fin Fonction

```

◇

EXERCICE 12

Ecrire une fonction algorithmique `QuadSimpson` retournant une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ utilisant la méthode de quadrature composée de Simpson en **minimisant** le nombre d'appels à la fonction f . On rappelle que la formule élémentaire de Simpson est donnée par

$$\mathcal{Q}_2(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{b-a}{6} (g(a) + 4g(\frac{a+b}{2}) + g(b)).$$

Correction En notant $m_j = \frac{\alpha_{j-1} + \alpha_j}{2}$ le point milieu de l'intervalle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx \sum_{j=1}^k \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x)dx &\approx \sum_{j=1}^k \mathcal{Q}_2(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) = \frac{h}{6} \sum_{j=1}^k (f(\alpha_{j-1}) + 4f(m_j) + f(\alpha_j)) \\ &\approx \frac{h}{6} \left(4 \sum_{j=1}^k f(m_j) + f(\alpha_0) + 2 \sum_{j=1}^{k-1} f(\alpha_j) + f(\alpha_k) \right) \end{aligned} \quad (12.1)$$

Algorithme 7 Fonction `QuadSimpson` retourne une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ utilisant la méthode de quadrature composée de Simpson en **minimisant** le nombre d'appels à la fonction f .

Données : f : une fonction définie de $[\alpha, \beta]$ dans \mathbb{R} ,
 α, β : deux réels avec $\alpha < \beta$,
 k : $n \in \mathbb{N}^*$

Résultat : I : un réel

1: **Fonction** $I \leftarrow \text{QuadSimpson}(f, \alpha, \beta, k)$

2: $h \leftarrow (\beta - \alpha)/k$

3: $\mathbf{x} \leftarrow \alpha : h : \beta$

4: $\mathbf{m} \leftarrow \alpha + h/2 : h : \beta$

5: $S \leftarrow 0$

▷ Calcul de $\sum_{j=1}^k f(m_j)$

6: **Pour** $j \leftarrow 1$ à k faire

7: $S \leftarrow S + f(m(j))$

8: **Fin Pour**

9: $I \leftarrow 4 * S$

10: $S \leftarrow 0$

▷ Calcul de $\sum_{j=1}^{k-1} f(\alpha_j) = \sum_{j=2}^k f(\mathbf{x}_j)$

11: **Pour** $j \leftarrow 2$ à k faire

12: $S \leftarrow S + f(\mathbf{x}(j))$

13: **Fin Pour**

14: $I \leftarrow (h/6) * (I + 2 * S + f(\mathbf{x}(1)) + f(\mathbf{x}(k+1)))$

15: **Fin Fonction**

◇

2 Exercices supplémentaires

EXERCICE 13 : Matrice de Vandermonde

Soient $(z_i)_{i=0}^n$ $n + 1$ points distincts 2 à 2 de \mathbb{C} . Soit $\mathbb{V} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{V}_{i,j} = z_{i-1}^{j-1}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket.$$

Q. 1 Ecrire la matrice \mathbb{V} .

Soient $\mathbf{w} = (w_i)_{i=1}^{n+1}$ un vecteur de \mathbb{C}^{n+1} . On note $P_{\mathbf{w}} \in \mathbb{C}_n[X]$, le polynôme défini par

$$P_{\mathbf{w}}(z) = \sum_{i=0}^n w_{i+1} z^i$$

Q. 2 Exprimer $\mathbf{v} = \mathbb{V}\mathbf{w}$ en fonction de $P_{\mathbf{w}}$.

Q. 3 En déduire que \mathbb{V} est inversible.

Correction

R. 1

On a

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} 1 & z_0 & \cdots & z_0^n \\ 1 & z_1 & \cdots & z_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^n \end{pmatrix}$$

R. 2On a $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n+1}$ et, pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} v_i &= \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{V}_{i,j} w_j \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} z_{i-1}^{j-1} w_j \\ &= \sum_{j=0}^n w_{j+1} z_{i-1}^j = P_{\mathbf{w}}(z_{i-1}). \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} P_{\mathbf{w}}(z_0) \\ \vdots \\ P_{\mathbf{w}}(z_n) \end{pmatrix}.$$

R. 3La matrice \mathbb{V} est inversible si et seulement si son noyau est réduit à l'élément nul, c'est à dire

$$\ker(\mathbb{V}) = \{\mathbf{0}\}.$$

Soit $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n+1})^* \in \mathbb{C}^{n+1}$, tel que $\mathbb{V}\mathbf{u} = \mathbf{0}$, montrons qu'alors $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

On a

$$\mathbb{V}\mathbf{u} = \mathbb{V} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{\mathbf{u}}(z_0) \\ \vdots \\ P_{\mathbf{u}}(z_n) \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Les $n+1$ points $(z_i)_{i=0}^n$ sont distincts 2 à 2, donc le polynôme $P_{\mathbf{u}}$ admet $n+1$ racines distinctes hors $P_{\mathbf{u}} \in \mathbb{C}_n[X]$, c'est donc le polynôme nul, c'est à dire $u_i = 0, \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. On a donc $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.La matrice \mathbb{V} est donc inversible.

◇

EXERCICE 14Soient $(t_i)_{i=0}^n, (n+1)$ points distincts de $[-1; 1]$.On note $\mathcal{F}([-1; 1]; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie de $[-1; 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Soient $g \in \mathcal{F}([-1; 1]; \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_{-1}^1 g(t) dt$ par $\mathcal{S}_n(g)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{S}_n(g) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{i=0}^n w_i g(t_i)$$

Q. 1Démontrer que l'application $g \mapsto \mathcal{S}_n(g)$ définie de $\mathcal{F}([-1; 1]; \mathbb{R})$ à valeurs dans \mathbb{R} est linéaire.

On pose

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

Q. 2

a. Montrer que si \mathcal{S}_n a pour degré d'exactitude n au moins alors, on a

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad w_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_i(t) dt. \quad (14.1)$$

b. Montrer que si (14.1) est vérifiée, alors \mathcal{S}_n a pour degré d'exactitude n au moins.

On rappelle que la formule de quadrature \mathcal{S}_n à $(n+1)$ points distincts, dont les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont données par (14.1), a pour degré d'exactitude $(n+m)$, $m \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si

$$\int_{-1}^1 \pi_n(t) Q(t) dt = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \quad (14.2)$$

avec $\pi_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^n (t - t_i)$.

Par la suite, on suppose que les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $(n+1)$ racines distinctes dans $] -1; 1[$ du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$ et que les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont données par (14.1).

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par la formule de récurrence de Bonnet

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t), \quad \forall n \geq 1 \quad (14.3)$$

avec $P_0(t) = 1$ et $P_1(t) = t$.

On a les propriétés suivantes:

prop.1 le polynôme de Legendre P_n est de degré n ,

prop.2 la famille $\{P_k\}_{k=0}^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,

prop.3 pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\int_{-1}^1 P_m(t) P_n(t) dt = \frac{2}{2n+1} \delta_{m,n}, \quad (14.4)$$

ce qui correspond à l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour le produit scalaire

$$\langle P_m, P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_m(t) P_n(t) dt.$$

prop.4 Soit $n \geq 1$, P_n est scindé sur \mathbb{R} et ses n racines, notées $(t_i)_{i=0}^n$, sont simples dans $] -1, 1[$, c'est à dire

$$P_n(t) = C \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i), \quad C \in \mathbb{R}^*$$

où les t_i sont 2 à 2 distincts (et ordonnés). Les $(n+1)$ racines simples de P_{n+1} sont alors chacune dans l'un des $(n+1)$ intervalles $] -1, t_0[$, $]t_0, t_1[$, \dots , $]t_{n-2}, t_{n-1}[$, $]t_{n-1}, 1[$.

Q. 3

a. En utilisant les polynômes de Legendre, démontrer que la formule de quadrature \mathcal{S}_n est de degré d'exactitude $2n+1$.

b. Montrer que la formule de quadrature \mathcal{S}_n n'est pas de degré d'exactitude $2n+2$.

c. Démontrer que \mathcal{S}_n est l'unique formule de quadrature à $(n+1)$ points distincts dans $[-1; 1]$ ayant pour degré d'exactitude $2n+1$.

Soient a, b deux réels, $a < b$. On note $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, où les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $(n+1)$ racines distinctes dans $] -1; 1[$ du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$.

Soient $f \in \mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$, espace des fonctions définies de $[a; b]$ à valeurs dans \mathbb{R} , et $n \in \mathbb{N}$.

On souhaite approcher $\int_a^b f(x) dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i^* f(x_i)$$

On pose

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Q. 4

a. Montrer que la formule de quadrature \mathcal{Q}_n est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si

$$w_i^* = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i^*(x) dx, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (14.5)$$

b. En déduire que la formule de quadrature \mathcal{Q}_n est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si

$$w_i^* = w_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

où les w_i sont donnée par (14.1).

On suppose que $w_i^* = w_i, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Q. 5

Montrer que \mathcal{Q}_n est l'unique formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points distincts dans $[a, b]$ ayant pour degré d'exactitude $(2n+1)$ précisément.

Correction

R. 1

Soient f et g dans $\mathcal{F}([-1; 1]; \mathbb{R})$ (espace vectoriel), et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{F}([-1; 1]; \mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n(\lambda f + \mu g) &= 2 \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f + \mu g)(x_j) \\ &= 2 \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)) \\ &= \lambda 2 \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) + \mu 2 \sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \\ &= \lambda \mathcal{S}_n(f) + \mu \mathcal{S}_n(g). \end{aligned}$$

L'application \mathcal{S}_n est donc linéaire.

R. 2

a. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$. Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude n au moins et donc on a

$$\mathcal{S}_n(L_i) \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_{-1}^1 L_i(t) dt.$$

Comme $L_i(t_j) = \delta_{i,j}, \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on en déduit

$$\mathcal{S}_n(L_i) = 2 \sum_{j=0}^n w_j L_i(t_j) = 2w_i.$$

Ce qui donne

$$w_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_i(t) dt.$$

b. Par hypothèse, les poids $(w_i)_{i=0}^n$ étant donnés par (14.1), La formule de quadrature s'écrit

$$\mathcal{S}_n(g) \stackrel{\text{hyp}}{=} \sum_{i=0}^n g(t_i) \int_{-1}^1 L_i(t) dt.$$

On note $\mathcal{L}_n(P)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de $\mathbb{R}_n[X]$ passant par les points $(t_i, g(t_i))_{i=0}^n$ donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}_n(P)(t) = \sum_{i=0}^n g(t_i) L_i(t).$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a $P = \mathcal{L}_n(P)$ et

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P(t)dt &= \int_{-1}^1 \mathcal{L}_n(P)(t)dt \\ &= \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^n L_i(t)P(t_i)dt \\ &= \sum_{i=0}^n P(t_i) \int_{-1}^1 L_i(t)dt \\ &= 2 \sum_{i=0}^n w_i P(t_i) = \mathcal{S}_n(P). \end{aligned}$$

La formule de quadrature est donc exacte pour tous les polynômes de degré n au moins.

R. 3

- a. Par hypothèse, les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont données par (14.1), \mathcal{S}_n a pour degré d'exactitude $2n + 1$ si et seulement si on a (14.2) avec $m = n + 1$.

D'après les propriétés des polynômes de Legendre P_n , on a $P_{n+1}(t) = C\pi_n(t)$ avec $C \in \mathbb{R}^*$.

On en déduit que (14.2) avec $m = n + 1$ est équivalent à

$$\int_{-1}^1 P_{n+1}(t)Q(t)dt = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_n[X].$$

Or, la famille des polynômes de Legendre $\{P_0, \dots, P_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et comme les polynômes de Legendre sont orthogonaux, la relation précédente est vérifiée.

- b. Supposons qu'il existe une autre formule de quadrature élémentaire à $(n + 1)$ points distincts dans $[-1, 1]$

$$\tilde{\mathcal{S}}_n(g) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{i=0}^n \tilde{w}_i g(\tilde{t}_i)$$

ayant pour degré d'exactitude $(2n + 1)$ précisément. D'après la **Q. 2**, on a donc

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \tilde{w}_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{L}_i(t)dt, \quad \text{où } \tilde{L}_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

Notons $\tilde{\pi}_n(t) = \prod_{i=0}^n (t - \tilde{t}_i)$. Comme \mathcal{S}_n et $\tilde{\mathcal{S}}_n$ ont pour degré d'exactitude $(2n + 1)$ précisément, on déduit de (14.2) avec $m = n + 1$, que

$$\int_{-1}^1 \pi_n(t)Q(t)dt = \int_{-1}^1 \tilde{\pi}_n(t)Q(t)dt = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_n[X]$$

Le polynôme $R = \pi_n - \tilde{\pi}_n$ est dans $\mathbb{R}_n[X]$ car les polynômes π_n et $\tilde{\pi}_n$ de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ sont unitaires. On a alors

$$\int_{-1}^1 R(t)Q(t)dt = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_n[X]$$

En choisissant $Q = R$, on obtient

$$\int_{-1}^1 R^2(t)dt = 0$$

ce qui entraîne $R = 0$ et donc les points $(\tilde{t}_i)_{i=0}^n$ et $(t_i)_{i=0}^n$ sont identiques à une permutation des indices près, c'est à dire

$$\tilde{t}_{\sigma(i)} = t_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

On a alors $\tilde{w}_{\sigma(i)} = w_i$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et

$$\tilde{\mathcal{S}}_n(g) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{i=0}^n \tilde{w}_i g(\tilde{t}_i) = 2 \sum_{i=0}^n \tilde{w}_{\sigma(i)} g(\tilde{t}_{\sigma(i)}) = 2 \sum_{i=0}^n w_i g(t_i) = \mathcal{S}_n(g).$$

a. Démontrons l'équivalence

\Rightarrow Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a $L_i^* \in \mathbb{R}_n[X]$. Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude n au moins et donc on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i^*, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_a^b L_i^*(x) dx.$$

Or comme $L_i^*(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i^*, a, b) = (b-a) \sum_{j=0}^n w_j^* L_i^*(x_j) = (b-a) w_i^*.$$

Ce qui donne

$$w_i^* = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i^*(x) dx.$$

\Leftarrow Par hypothèse, les poids $(w_i^*)_{i=0}^n$ étant donnés par (14.5), La formule de quadrature s'écrit

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i^*(x) dx.$$

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a $P = \mathcal{L}_n(P)$ et

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x) dx &= \int_a^b \mathcal{L}_n(P)(x) dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^n L_i^*(x) P(x_i) dx \\ &= \sum_{i=0}^n P(x_i) \int_a^b L_i^*(x) dx \\ &= (b-a) \sum_{i=0}^n w_i^* P(x_i) = \mathcal{Q}_n(P, a, b). \end{aligned}$$

La formule de quadrature est donc exacte pour tout les polynômes de degré n au moins.

b. Il suffit pour cela de démontrer que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b L_i^*(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_i(t) dt. \quad (R_1)$$

On utilise le changement de variable

$$x = \varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t$$

ce qui correspond bien à $x_i = \varphi(t_i)$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_a^b L_i^*(x) dx &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} L_i^* \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 L_i^* \circ \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_i^* \circ \varphi(t) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{\varphi(t) - x_j}{x_i - x_j} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{\varphi(t) - \varphi(t_j)}{\varphi(t_i) - \varphi(t_j)} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) - \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_j\right)}{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i\right) - \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_j\right)} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} = L_i(t). \end{aligned}$$

ce qui donne (R_1) .

Soit $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. Avec le changement de variable $x = \varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x)dx &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} P \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 P \circ \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (R_2)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(P, a, b) &= (b-a) \sum_{i=0}^n w_i^* P(x_i) \\ &= (b-a) \sum_{i=0}^n w_i P(\varphi(t)_i) \\ &= \frac{b-a}{2} \mathcal{S}_n(P \circ \varphi) \end{aligned} \quad (R_3)$$

Comme $\varphi \in \mathbb{R}_1[X]$, on a $P \circ \varphi \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$.^a La formule de quadrature \mathcal{S}_n étant de degré d'exactitude $2n+1$, on a alors

$$\mathcal{S}_n(P \circ \varphi) = \int_{-1}^1 P \circ \varphi(t) dt.$$

On en déduit en utilisant (R₂)

$$\int_a^b P(x)dx = \frac{b-a}{2} \mathcal{S}_n(P \circ \varphi)$$

puis en utilisant (R₃)

$$\int_a^b P(x)dx = \mathcal{Q}_n(P, a, b).$$

La formule de quadrature élémentaire \mathcal{Q}_n est donc de degré d'exactitude $2n+1$.

Par l'absurde on peut démontrer que \mathcal{Q}_n n'est pas de degré d'exactitude $2n+2$ car sinon \mathcal{S}_n serait aussi de degré d'exactitude $2n+2$.

Par l'absurde on peut démontrer que \mathcal{Q}_n est unique car sinon \mathcal{S}_n ne serait pas unique.

^aRappel: Soient $P \in \mathbb{R}_p[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_q[X]$, alors $P \circ Q \in \mathbb{R}_{pq}[X]$.