

Exercices associés au cours d'Analyse Numérique I

Chapitre 6: Intégration numérique

1 Exercices du cours

EXERCICE 1

Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ une formule de quadrature élémentaire

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (1.1)$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

Q. 1 Démontrer que l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, muni de la norme infini, à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire et continue.

Q. 2 Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k si et seulement si

$$\forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx. \quad (1.2)$$

EXERCICE 2

Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ une formule de quadrature élémentaire

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (2.1)$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

On note $x = \varphi(t) = \alpha + \beta t$, $\beta \in \mathbb{R}^*$, le changement de variable affine, $t_i = \varphi^{-1}(x_i)$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et

$$\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)) = (\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)) \sum_{i=0}^n w_i g(t_i). \quad (2.2)$$

Q. 1 Expliciter φ^{-1} .

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Q. 2 Montrer que si $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k alors $\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k .

Q. 3 Montrer que si $\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k alors $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k .

EXERCICE 3

Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles, $n \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire,

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (3.1)$$

où les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels à déterminer.

Q. 1 Démontrer que (3.1) est de degré d'exactitude k (au moins) si et seulement si

$$(b-a) \sum_{i=0}^n w_i x_i^r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket. \quad (3.2)$$

Q. 2 Les points $(x_i)_{i=0}^n$ étant fixés, montrer qu'il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (3.1) à $(n+1)$ points de degré d'exactitude n au moins.

EXERCICE 4

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ $(n+1)$ points donnés et distincts 2 à 2 d'un intervalle $[a, b]$ ($a < b$). Ecrire une fonction algorithmique **WeightsFromPoints** permettant de déterminer les poids $(w_i)_{i=0}^n$ de telle sorte que la formule de quadrature élémentaire associée soit de degré d'exactitude n au moins en s'inspirant de résultats obtenus dans la démonstration de la Proposition ?? . On pourra utiliser la fonction algorithmique $\mathbf{x} \leftarrow \text{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ permettant de résoudre le système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

EXERCICE 5

Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (5.1)$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \quad (5.2)$$

Q. 1 a. Donner explicitement un exemple de points $(x_i)_{i=0}^n$ vérifiant (5.2) (n restant quelconque).

b. Etablir que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad x_i - \frac{a+b}{2} = - \left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2} \right).$$

c. Si n est impair, montrer que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_i \neq \frac{a+b}{2}$.

d. Si n est pair, montrer qu'il existe un unique $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $x_i = \frac{a+b}{2}$.

Q. 2 Démontrer que l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, muni de la norme infini, à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire et continue.

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme de degré $2m+1$ s'écrivant sous la forme

$$P(x) = \sum_{j=0}^{2m+1} a_j x^j$$

avec $(a_j)_{j=0}^{2m+1}$ des réels et $a_{2m+1} \neq 0$.

Q. 3 a. Calculer les dérivées $P^{(2m+1)}$ et $P^{(2m+2)}$.

b. Montrer que

$$P(x) = C \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} + R(x) \quad (5.3)$$

en déterminant le degré maximum de R et en exprimant C en fonction des $(a_j)_{j=0}^{2m+1}$.

Q. 4 Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^{2k+1} dx = 0. \quad (5.4)$$

Q. 5 On suppose que la formule de quadrature élémentaire (5.1) est exacte pour les polynômes de $\mathbb{R}_{2m}[X]$.

a. Dédurre de (5.3) et (5.4) que la formule de quadrature élémentaire (5.1) est exacte pour $\mathbb{P}$ si et seulement si

$$(b-a) \sum_{i=0}^n w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} = 0. \quad (5.5)$$

b. En utilisant **Q. 1**, démontrer que (5.5) est toujours vérifiée.

Q. 6 Ecrire de manière très précise le résultat démontré.

EXERCICE 6

Soient a, b deux réels, $a < b$ et $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie de $[a; b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $f \in \mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (6.1)$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

Q. 1 Démontrer que l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire.

On note, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$L_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

et $t_i = (x_i - a)/(b - a)$. On rappelle que le polynôme d'interpolation de Lagrange associés aux points $(x_i, f(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ s'écrit

$$\mathcal{L}_n(f)(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

et que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$ alors on a

$$\forall x \in [a, b], \quad \exists \xi_x \in [a, b], \quad f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (6.2)$$

Q. 2 Montrer que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(x) dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt. \quad (6.3)$$

Q. 3 a. Montrer que si $\mathcal{Q}_n$ a pour degré d'exactitude n au moins alors, on a

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(x) dx. \quad (6.4)$$

b. Montrer que si (8.3) est vérifiée, alors $\mathcal{Q}_n$ a pour degré d'exactitude n au moins.

Q. 4 On suppose les poids $(w_i)_{i=0}^n$ donnés par (8.3). Montrer que si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$ alors on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b) \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} \int_a^b \left| \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right| dx \quad (6.5)$$

EXERCICE 7

Soient $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 de l'intervalle $[a, b]$ vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

On note $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ les $(n+1)$ polynômes de base de Lagrange définis par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

et vérifiant $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$

Q. 1 Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_i((a+b) - x) = L_{n-i}(x).$$

Q. 2 Soient $(w_i)_{i=0}^n$ définis par

$$w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(t) dt, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Montrer que l'on a alors

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad w_i = w_{n-i}$$

EXERCICE 8

Soient a, b deux réels, $a < b$ et $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie de $[a; b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $f \in \mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (8.1)$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels.

On suppose que (8.1) a pour degré d'exactitude n au moins.

Q. 1 Démontrer que l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $\mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire.

Soient π_n le polynôme de degré $(n+1)$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

et $m \in \mathbb{N}^*$.

rappel division euclidienne: Soient A et B deux polynômes, B étant non nul, alors il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Dans la division euclidienne de A par B, Q est le quotient et R le reste.

Q. 2 a. Soit $P \in \mathbb{R}_{n+m}[X]$. Déterminer les degrés maximaux des polynômes Q (quotient) et R (reste), obtenus par la division euclidienne de P par π_n , et satisfaisant

$$P = \pi_n Q + R.$$

b. En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n+m}[X], \quad \int_a^b P(x) dx - \mathcal{Q}_n(P, a, b) = \int_a^b Q(x) \pi_n(x) dx. \quad (8.2)$$

où Q est le quotient de la division euclidienne de P par π_n ,

Q. 3 Démontrer que (8.1) a pour degré d'exactitude $n+m$ au moins si et seulement si

$$\forall H \in \mathbb{R}_{m-1}[X], \quad \int_a^b \pi_n(x) H(x) dx = 0. \quad (8.3)$$

Q. 4 En déduire le degré maximal d'exactitude de (8.1).

Q. 5 Démontrer que (8.1) a pour degré d'exactitude $n + m$ au moins si et seulement si

$$\int_a^b \pi_n(x) x^k dx = 0, \quad \forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket. \quad (8.4)$$

EXERCICE 9

Q. 1 Ecrire une fonction algorithmique **WeightsPointsNC** retournant les $(n + 1)$ points et les $(n + 1)$ poids de la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à $(n + 1)$ points.

Q. 2 Ecrire une fonction algorithmique **QuadElemNC** retournant la valeur de $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ correspondant à la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à $(n + 1)$ points.

EXERCICE 10

Q. 1 Déterminer les points t_0, t_1 de l'intervalle $[-1, 1]$ et les poids w_0, w_1 tel que la formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx 2 \sum_{i=0}^1 w_i g(t_i)$$

soit de degré d'exactitude 3.

Q. 2 En déduire une formule de quadrature pour le calcul de $\int_a^b f(x) dx$ qui soit de degré d'exactitude 3.

EXERCICE 11

L'objectif de cet exercice est de calculer les points et les poids de la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n + 1)$ points. La formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n + 1)$ points sur $[-1, 1]$ est donnée par

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx 2 \sum_{i=0}^n w_i g(t_i)$$

où les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $(n + 1)$ racines du polynôme de Legendre $P_{n+1}(t)$. Cette formule a pour degré d'exactitude $2n + 1$. Soient $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et $\|P\| = \langle P, P \rangle^{1/2}$ la norme associée.

Soit M_n le polynôme de Legendre normalisé de degré $(n + 1)$, $M_n = \frac{P_n}{\|P_n\|}$. On utilisera les résultats sur les polynômes de Legendre rappelés en cours.

Q. 1 Montrer que

$$c_{n+1}M_{n+1}(t) = tM_n(t) - c_nM_{n-1}(t), \quad n > 1 \quad (11.1)$$

avec

$$M_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad M_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t \quad \text{et} \quad c_n = \sqrt{\frac{n^2}{4n^2 - 1}}$$

On définit le vecteur $\mathbf{M}(t)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ par

$$\mathbf{M}(t) = (M_0(t), \dots, M_n(t))^t.$$

Q. 2 Montrer que l'on a

$$t\mathbf{M}(t) = \mathbb{A}\mathbf{M}(t) + c_{n+1}M_{n+1}(t)\mathbf{e}_{n+1} \quad (11.2)$$

où l'on explicitera la matrice tridiagonale $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients $c_1, \dots, c_n$. Le vecteur $\mathbf{e}_{n+1}$ étant le $(n + 1)$ -ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Q. 3 En déduire que les $(n + 1)$ racines distinctes de $M_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ sont les $(n + 1)$ valeurs propres de $\mathbb{A}$.

Q. 4 Montrer que

$$2 \sum_{k=0}^n w_k M_i(t_k) M_j(t_k) = \delta_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2 \quad (11.3)$$

où $\delta_{i,j} = 0$, si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$.

On note $\mathbb{W} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice diagonale, de diagonale $(w_0, \dots, w_n)$ et $\mathbb{P} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par $\mathbb{P}_{i+1,j+1} = M_j(t_i)$, $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$.

Q. 5

- Montrer que $2\mathbb{P}^t \mathbb{W} \mathbb{P} = \mathbb{I}$.
- En déduire que $\mathbb{W}^{-1} = 2\mathbb{P} \mathbb{P}^t$.
- En déduire que $\frac{1}{w_i} = 2 \sum_{k=0}^n (M_k(t_i))^2$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

On suppose que l'on dispose de la fonction **algorithmique eig**($\mathbb{A}$) retournant l'ensemble des valeurs propres d'une matrice symétrique $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dans l'ordre croissant sous la forme d'un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Q. 6

- Ecrire la fonction $[\mathbf{t}, \mathbf{w}] \leftarrow \text{GaussLegendre}(n)$ retournant le tableau des points $\mathbf{t}$ et le tableau des poids $\mathbf{w}$ en utilisant les résultats obtenus dans cet exercice.
- Ecrire la fonction $I \leftarrow \text{QuadElemGaussLegendre}(f, a, b, n)$ retournant une approximation de $\int_a^b f(x) dx$ en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n + 1)$ points sur l'intervalle $[a, b]$.

EXERCICE 12

Ecrire une fonction algorithmique **QuadSimpson** retournant une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ utilisant la méthode de quadrature composée de Simpson en **minimisant** le nombre d'appels à la fonction f . On rappelle que la formule élémentaire de Simpson est donnée par

$$\mathcal{Q}_2(g, a, b) \stackrel{\text{set}}{=} \frac{b-a}{6} (g(a) + 4g(\frac{a+b}{2}) + g(b)).$$

2 Exercices supplémentaires

EXERCICE 13 : Matrice de Vandermonde

Soient $(z_i)_{i=0}^n$ $n + 1$ points distincts 2 à 2 de $\mathbb{C}$. Soit $\forall \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{V}_{i,j} = z_{i-1}^{j-1}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket.$$

Q. 1 Ecrire la matrice $\mathbb{V}$.

Soient $\mathbf{w} = (w_i)_{i=1}^{n+1}$ un vecteur de $\mathbb{C}^{n+1}$. On note $P_{\mathbf{w}} \in \mathbb{C}_n[X]$, le polynôme défini par

$$P_{\mathbf{w}}(z) = \sum_{i=0}^n w_{i+1} z^i$$

Q. 2 Exprimer $\mathbf{v} = \mathbb{V}\mathbf{w}$ en fonction de $P_{\mathbf{w}}$.

Q. 3 En déduire que $\mathbb{V}$ est inversible.

EXERCICE 14

Soient $(t_i)_{i=0}^n$, $(n + 1)$ points distincts de $[-1; 1]$.

On note $\mathcal{F}([-1; 1]; \mathbb{R})$ l'espace des fonctions définie de $[-1; 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient $g \in \mathcal{F}([-1; 1]; \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. On

souhaite approcher $\int_{-1}^1 g(t)dt$ par $S_n(g)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$S_n(g) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{i=0}^n w_i g(t_i)$$

Q. 1 Démontrer que l'application $g \longrightarrow S_n(g)$ définie de $\mathcal{F}([-1; 1]; \mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire.

On pose

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

Q. 2 a. Montrer que si S_n a pour degré d'exactitude n au moins alors, on a

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad w_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_i(t) dt. \quad (14.1)$$

b. Montrer que si (14.1) est vérifiée, alors S_n a pour degré d'exactitude n au moins.

On rappelle que la formule de quadrature S_n à $(n+1)$ points distincts, dont les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont données par (14.1), a pour degré d'exactitude $(n+m)$, $m \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si

$$\int_{-1}^1 \pi_n(t) Q(t) dt = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \quad (14.2)$$

avec $\pi_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^n (t - t_i)$.

Par la suite, on suppose que les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $(n+1)$ racines distinctes dans $] -1; 1[$ du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$ et que les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont données par (14.1).

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par la formule de récurrence de Bonnet

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t), \quad \forall n \geq 1 \quad (14.3)$$

avec $P_0(t) = 1$ et $P_1(t) = t$.

On a les propriétés suivantes:

prop.1 le polynôme de Legendre P_n est de degré n ,

prop.2 la famille $\{P_k\}_{k=0}^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,

prop.3 pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\int_{-1}^1 P_m(t) P_n(t) dt = \frac{2}{2n+1} \delta_{m,n}, \quad (14.4)$$

ce qui correspond à l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour le produit scalaire

$$\langle P_m, P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_m(t) P_n(t) dt.$$

prop.4 Soit $n \geq 1$, P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et ses n racines, notées $(t_i)_{i=0}^n$, sont simples dans $] -1, 1[$, c'est à dire

$$P_n(t) = C \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i), \quad C \in \mathbb{R}^*$$

où les t_i sont 2 à 2 distincts (et ordonnés). Les $(n+1)$ racines simples de P_{n+1} sont alors chacune dans l'un des $(n+1)$ intervalles $] -1, t_0[$, $] t_0, t_1[$, $\dots$, $] t_{n-2}, t_{n-1}[$, $] t_{n-1}, 1[$.

Q. 3 a. En utilisant les polynômes de Legendre, démontrer que la formule de quadrature S_n est de degré d'exactitude $2n+1$.

b. Montrer que la formule de quadrature S_n n'est pas de degré d'exactitude $2n+2$.

c. Démontrer que S_n est l'unique formule de quadrature à $(n+1)$ points distincts dans $[-1; 1]$ ayant pour degré d'exactitude $2n+1$.

Soient a, b deux réels, $a < b$. On note $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, où les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $(n+1)$ racines distinctes dans $] -1; 1[$ du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$.

Soient $f \in \mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$, espace des fonctions définies de $[a; b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$.

On souhaite approcher $\int_a^b f(x) dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i^* f(x_i)$$

On pose

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Q. 4 a. Montrer que la formule de quadrature $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si

$$w_i^* = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i^*(x) dx, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (14.5)$$

b. En déduire que la formule de quadrature $\mathcal{Q}_n$ est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si

$$w_i^* = w_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

où les w_i sont donnée par (14.1).

On suppose que $w_i^* = w_i$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Q. 5 Montrer que $\mathcal{Q}_n$ est l'unique formule de quadrature élémentaire à $(n+1)$ points distincts dans $[a, b]$ ayant pour degré d'exactitude $(2n+1)$ précisément.