Exercices associés au cours d'*Analyse Numérique I* *Interpolation*

1 Exercices du cours

Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(n+1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1

a. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \ \forall j \in [\![0,n]\!]. \tag{1.1}$$

b. Montrer que les $(L_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x). \tag{1.2}$$

Q. 2 *Montrer que polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $\mathrm{P}_n(x_i) = y_i$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$.*

Exercice 2

Ecrire la fonction Lagrange permettant de calculer $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $(n+1)$ couples $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$) en $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $(x_i)_{i=0}^n$ dans I, avec $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, tel que

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad f(x_i) = 0.$$

Q. 1 *Soit $f \in \mathcal{C}^0(I;\mathbb{R})$, avec f dérivable sur I. On suppose qu'il existe $(x_i)_{i=0}^n$ dans I, avec $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, tel que*

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad f(x_i) = 0.$$

Montrer qu'il existe $(\xi_i)_{i=1}^n$ dans I, avec $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \ldots < \xi_n < x_n$, tel que

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad f^{(1)}(\xi_i) = 0.$$

Q. 2 *Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition suivante*

$(\mathcal{P}_n)$

Soit $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I;\mathbb{R})$, $f^{(n-1)}$ dérivable sur I. Si f admet au moins $(n+1)$ zeros distincts dans I, notés $x_0 < \ldots < x_n$, alors $f^{(n)}$ admet au moins un zéro dans $]x_0, x_n[$.

Exercice 4

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$ et $(n+1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, tels que les $x_i \in [a;b]$ sont distincts deux à deux et $y_i = f(x_i)$.
On note par P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ et π_n le polynôme de degré $(n+1)$ défini par

$$\pi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

Q. 1 *Soit $x \in [a;b]$ tel que, pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $x \neq x_i$. On note*

$$x_{\min} = \min(x, x_0, \dots, x_n), \quad x_{\max} = \max(x, x_0, \dots, x_n),$$

et

$$F(t) = f(t) - \mathrm{P}_n(t) - \frac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)}\pi_n(t).$$

a. *Démontrer que F est définie sur $[a;b]$ et admet $(n+2)$ racines distinctes.*

b. *Montrer qu'il existe $\xi_x \in]x_{\min}; x_{\max}[$ tel que $F^{(n+1)}(\xi_x) = 0$.*

c. *En déduire que*

$$f(x) - \mathrm{P}_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \tag{4.1}$$

Q. 2 *Montrer que, $\forall x \in [a;b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle ouvert contenant $x, x_0, \dots, x_n$ vérifiant (4.1).*

Exercice 5

Soient $n \in N^*$ et $x_0, \cdots, x_n$ des points distincts de $[a,b]$ ordonnés par ordre croissant. On pose $E \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ et $F \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_n[X]$, et, on les munit de la norme $\|.\|_\infty$. On note $\mathcal{L}_n : E \longrightarrow F$ l'application qui a $f \in E$ associe le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathrm{P}_n \in F$ tel que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\mathrm{P}_n(x_i) = f(x_i)$.

Q. 1

a. *Montrer que $\mathcal{L}_n$ est bien définie.*

b. *Montrer que $\mathcal{L}_n$ est linéaire.*

c. *Montrer que $\mathcal{L}_n$ est continue et que*

$$\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leqslant \Lambda_n \|f\|_\infty, \tag{5.1}$$

où $\Lambda_n = \max_{x\in[a,b]} \sum_{i=0}^{n} |\mathrm{L}_i(x)|$.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires et continues de E dans F muni de la norme

$$\forall \mathcal{H} \in \mathcal{L}(E,F), \ \|\mathcal{H}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f\in\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}) \\ f\neq 0}} \frac{\|\mathcal{H}(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

Q. 2

a. *Montrer que*

$$\|\mathcal{L}_n\| \leqslant \Lambda_n. \tag{5.2}$$

b. *Montrer qu'il existe $\bar{x} \in [a,b]$ vérifiant*

$$\Lambda_n = \sum_{i=0}^{n} |\mathrm{L}_i(\bar{x})|.$$

c. *Montrer qu'il existe $\bar{f} \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ vérifiant*

$$|\mathcal{L}_n(\bar{f})(\bar{x})| = \Lambda_n \|\bar{f}\|_\infty.$$

d. *Conclure.*

Q. 3 *Soit $f \in E$. Montrer que*

$$\|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leqslant (1 + \Lambda_n) \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_\infty \tag{5.3}$$

Exercice 6

Soient $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ $n+1$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté $\mathcal{H}_n$, associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, est défini par

$$\mathcal{H}_n(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad \mathcal{H}'_n(x_i) = z_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!] \tag{6.1}$$

Q. 1 *Quel est a priori le degré de $\mathcal{H}_n$?*

On défini le polynôme P_n par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x) \tag{6.2}$$

avec, pour $i \in [\![0, n]\!]$, A_i et B_i polynômes de degré au plus $2n+1$ indépendants des valeurs y_i et z_i.

Q. 2

a. Déterminer des conditions suffisantes sur A_i et B_i pour que P_n vérifie (6.1).

b. En déduire les expressions de A_i et B_i en fonction de L_i et de $L'_i(x_i)$ où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Q. 3 *Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus $2n+1$ défini par (6.1).*

Exercice 7

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$. et $(x_i)_{i=0}^{n}$, $(n+1)$ points distincts de $[a; b]$. On note

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad y_i = f(x_i) \quad \text{et} \quad z_i = f'(x_i).$$

On définit, par $\mathcal{H}_n$, le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in [\![0,n]\!]}$ et par π_n le polynôme défini par

$$\pi_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^{n} (t - x_i).$$

Q. 1 *Soit $x \in [a; b]$ tel que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $x \neq x_i$. On note*

$$x_{\min} = \min(x, x_0, \ldots, x_n), \quad x_{\max} = \max(x, x_0, \ldots, x_n),$$

et

$$F(t) = f(t) - \mathcal{H}_n(t) - \frac{f(x) - \mathcal{H}_n(x)}{\kappa_n(x)} \kappa_n(t)$$

avec $\kappa_n \stackrel{\text{def}}{=} \pi_n^2$.

a. Démontrer que F est définie sur $[a; b]$ et que $F \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$.

b. Montrer que F' admet $2(n+1)$ zéros distincts.

c. Montrer qu'il existe $\xi_x \in]x_{\min}; x_{\max}[$ tel que $F^{(2n+2)}(\xi_x) = 0$.

d. En déduire que

$$f(x) - \mathcal{H}_n(x) = \frac{\kappa_n(x)}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi_x). \tag{7.1}$$

Q. 2 *Montrer que, $\forall x \in [a; b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle ouvert contenant $x, x_0, \ldots, x_n$ vérifiant (7.1).*

Exercice 8

Ecrire une fonction algorithmique Hermite permettant de calculer H_n (polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$) en $t \in \mathbb{R}$.