Exercices associés au cours d'*Analyse Numérique I*
Interpolation

References

[1] F. Cuvelier, *Analyse numérique I, résolution de systèmes linéaires, méthodes itératives, résumé.* fichier pdf, `https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/24-25/resume_Interpolation_print-2by1.pdf`.

1 Exercices du cours

Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(n+1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1

a. *Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant*

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \ \forall j \in [\![0,n]\!]. \tag{1.1}$$

b. *Montrer que les $(L_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).*

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x). \tag{1.2}$$

Q. 2 *Montrer que polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $\mathrm{P}_n(x_i) = y_i$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$.*

Correction

R. 1

a. De (1.1), on déduit que les n points distincts x_j pour $j \in [\![0,n]\!]\backslash\{i\}$ sont les n zéros du polynôme L_i de degré n : il s'écrit donc sous la forme

$$L_i(x) = C \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x - x_j) \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la constante C, on utilise (1.1) avec $j = i$

$$L_i(x_i) = 1 = C \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)$$

Les points x_i sont distincts deux à deux, on a $\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j) \neq 0$ et donc

$$C = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

d'où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{R1.1}$$

Il reste à démontrer l'unicité. On suppose qu'il existe L_i et U_i deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant (1.1). Alors $Q_i = L_i - U_i$ est polynôme de degré n (au plus) admettant $n+1$ zéros distincts, c'est donc le polynôme nul et on a nécessairement $L_i = U_i$.

b. On sait que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. Pour que les $\{L_i\}_{i\in[\![0,n]\!]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ il suffit de démontrer qu'ils sont linéairement indépendants.
Soit $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ $n+1$ scalaires. Montrons pour celà que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0 \implies \lambda_i = 0,\ \forall i \in [\![0,n]\!]$$

Noter que la première égalité est dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ et donc le 0 est pris au sens polynôme nul.
On a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. En choisissant $x = x_k$, on a par (1.1) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(x_k) = \lambda_k$ et donc

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i = 0 \implies \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i(x_k) = 0,\ \forall k \in [\![0,n]\!] \iff \lambda_k = 0,\ \forall k \in [\![0,n]\!].$$

Les $\{L_i\}_{i\in[\![0,n]\!]}$ sont donc linéairement indépendants.

R. 2

Par construction $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et on a, $\forall j \in [\![0,n]\!]$[a],

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_n(x_j) &\stackrel{\mathsf{def}}{=} \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x_j)\\ &= \sum_{i=0}^{n} y_i \delta_{i,j} \text{ par (1.1)}\\ &= y_j.\end{aligned}$$

Pour demontrer l'unicité, on propose ici deux méthodes

- On note P_a et P_b deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant (1.1). Le polynôme $\mathrm{Q} = \mathrm{P}_a - \mathrm{P}_b$ appartient aussi à $\mathbb{R}_n[X]$ et il vérifie, $\forall i \in [\![0,n]\!]$,

  $$\mathrm{Q}(x_i) = \mathrm{P}_a(x_i) - \mathrm{P}_b(x_i) = 0.$$

  Les $n+1$ points x_i étant distincts, ce sont donc $n+1$ racines distinctes du polynôme Q. Or tout polynôme de degré n admet au plus n racines disctinctes[b]. On en déduit que le seul polynôme de degré au plus n admettant $n+1$ racines distinctes est le polynôme nulle et donc $\mathrm{P}_a = \mathrm{P}_b$.

- c'est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant (1.2) car la décomposition dans la base $\{L_i\}_{i\in[\![0,n]\!]}$ est unique.

[a] A noter le choix de l'indice j. Que doit-on faire dans ce qui suit si l'on choisi i comme indice?
[b] Le théorème de d'Alembert-Gauss affirme que tout polynôme à coefficients complexes de degré n admet n racines complexes qui ne sont pas nécessairement distinctes

◇

Exercice 2

Ecrire la fonction Lagrange permettant de calculer $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $(n+1)$ couples $(x_i, y_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$) en $t \in \mathbb{R}$.

Correction

But : Calculer le polynôme $\mathcal{P}_n(t)$ défini par (2)
Données : $\boldsymbol{X}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $X(i) = x_{i-1}$ $\forall i \in [\![1,n+1]\!]$ et $X(i) \neq X(j)$ pour $i \neq j$,
$\boldsymbol{Y}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Y(i) = y_{i-1}$ $\forall i \in [\![1,n+1]\!]$,
t : un réel.
Résultat : y : le réel $y = \mathcal{P}_n(t)$.

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_0}$

$\boxed{\text{Calcul de } y = \mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=1}^{n+1} Y(i)L_{i-1}(t)}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

$y \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
  $y \leftarrow y + Y(i) * L_{i-1}(t)$
Fin Pour

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

$y \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
  $\boxed{y \leftarrow y + Y(i) * L_{i-1}(t)}$
Fin Pour

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

$y \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
  $L \leftarrow \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} \frac{t - X(j)}{X(i) - X(j)}$
  $y \leftarrow y + Y(i) * L$
Fin Pour

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

$y \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
  $\boxed{L \leftarrow \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1} \frac{t - X(j)}{X(i) - X(j)}}$
  $y \leftarrow y + Y(i) * L$
Fin Pour

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_3}$

$y \leftarrow 0$
Pour $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
  $L \leftarrow 1$
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n+1$, $(j \sim= i)$ **faire**
    $L \leftarrow L * (t - X(j))/(X(i) - X(j))$
  Fin Pour
  $y \leftarrow y + Y(i) * L$
Fin Pour

On obtient alors l'algorithme final

Algorithme 1 Fonction Lagrange permettant de calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathcal{P}_n(x)$ définit par (2) de [1]

Données : $\boldsymbol{X}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $X(i) = x_{i-1}$ $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$ et $X(i) \neq X(j)$ pour $i \neq j$,
$\boldsymbol{Y}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Y(i) = y_{i-1}$ $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$,
t : un réel.
Résultat : y : le réel $y = \mathcal{P}_n(t)$.

Fonction $y \leftarrow$ Lagrange(t, X, Y)
  $y \leftarrow 0$
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** $n+1$ **faire**
    $L \leftarrow 1$
    Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n+1$, $(j \sim= i)$ **faire**
      $L \leftarrow L * (t - X(j))/(X(i) - X(j))$
    Fin Pour
    $y \leftarrow y + Y(i) * L$
  Fin Pour
  return y
Fin Fonction

$\diamond$

Exercice 3

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $(x_i)_{i=0}^n$ dans I, avec $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, tel que

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad f(x_i) = 0.$$

Q. 1 *Soit $f \in \mathcal{C}^0(I;\mathbb{R})$, avec f dérivable sur I. On suppose qu'il existe $(x_i)_{i=0}^n$ dans I, avec $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, tel que*

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad f(x_i) = 0.$$

Montrer qu'il existe $(\xi_i)_{i=1}^n$ dans I, avec $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \ldots < \xi_n < x_n$, tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad f^{(1)}(\xi_i) = 0.$$

Q. 2 *Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition suivante*

$(\mathcal{P}_n)$

Soit $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I;\mathbb{R})$, $f^{(n-1)}$ dérivable sur I. Si f admet au moins $(n+1)$ zeros distincts dans I, notés $x_0 < \ldots < x_n$, alors $f^{(n)}$ admet au moins un zéro dans $]x_0, x_n[$.

Correction

R. 1 On rappelle le théorème de Rolle:

> **Théorème** (Rolle)**.** *Soient a, b deux réels, $a < b$, et, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que*
>
> - *f est continue sur $[a, b]$,*
> - *f est dérivable sur $]a, b[$,*
> - *$f(a) = f(b)$.*
>
> *Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, $x_{k-1} < x_k$, on a $f(x_{k-1}) = f(x_k)$ $(= 0)$ et le théorème de Rolle s'applique:

$$\exists \xi_k \in]x_{k-1}, x_k[, \quad f^{(1)}(\xi_k) = 0.$$

La fonction $f^{(1)}$ admet donc au moins n zéros distincts, les $(\xi_k)_{k=1}^n$, avec

$$x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < \ldots < x_{n-1} < \xi_n < x_n.$$

R. 2

- **Initialisation.** Montrons que $(\mathcal{P}_1)$ est vérifiée.
  Soit $f \in \mathcal{C}^0(I;\mathbb{R})$ et f dérivable sur I. Si f admet au moins 2 zeros distincts dans I, notés x_0 et x_1, avec $x_0 < x_1$, alors on a $f(x_0) = f(x_1)$ $(= 0)$ et le théorème de Rolle s'applique:

  $$\exists \xi \in]x_0, x_1[, \quad f^{(1)}(\xi) = 0.$$

- **Hérédité.** Soit $n \geqslant 2$. On suppose que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vraie. Montrons que $(\mathcal{P}_n)$ est vérifiée.
  Soit $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I;\mathbb{R})$, $f^{(n-1)}$ dérivable sur I. On suppose que f admet au moins $(n+1)$ zeros distincts dans I, notés $(x_i)_{i=0}^n$ avec $x_0 < \ldots < x_n$. On a donc

  $$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad f(x_i) = 0.$$

  Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Comme on vérifie les hypothèse de **Q. 1**, on en déduit

  $$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \exists \xi_k \in]x_{k-1}, x_k[, \text{ tel que } f^{(1)}(\xi_k) = 0.$$

  La fonction $f^{(1)}$ admet donc au moins n zéros distincts, les $(\xi_k)_{k=1}^n$, avec $x_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n < x_n$. En posant $g = f^{(1)}$, on a, par hypothèse sur f, $g \in \mathcal{C}^{n-2}(I;\mathbb{R})$ et $g^{(n-2)}$ dérivable sur I. La fonction g admettant n zéros distincts dans I, les $(\xi_k)_{k=1}^n$, avec $\xi_1 < \ldots < \xi_n$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{P}_{n-1})$ à g pour obtenir

$$\exists \xi \in]\xi_1, \xi_n[, \quad g^{(n-1)}(\xi) = 0.$$

On abouti alors à $f^{(n)}(\xi) = 0$ avec $\xi \in]\xi_1, \xi_n[\subset]x_0, x_n[$.
Ce qui prouve $(\mathcal{P}_n)$.

- **Conclusion.** On a démontré par récurrence que $(\mathcal{P}_n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\diamond$

Exercice 4

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$ et $(n+1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, tels que les $x_i \in [a; b]$ sont distincts deux à deux et $y_i = f(x_i)$.
On note par P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ et π_n le polynôme de degré $(n+1)$ défini par

$$\pi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Q. 1 *Soit $x \in [a; b]$ tel que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $x \neq x_i$. On note*

$$x_{\min} = \min(x, x_0, \ldots, x_n), \quad x_{\max} = \max(x, x_0, \ldots, x_n),$$

et

$$F(t) = f(t) - \mathrm{P}_n(t) - \frac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t).$$

a. *Démontrer que F est définie sur $[a; b]$ et admet $(n+2)$ racines distinctes.*

b. *Montrer qu'il existe $\xi_x \in]x_{\min}; x_{\max}[$ tel que $F^{(n+1)}(\xi_x) = 0$.*

c. *En déduire que*

$$f(x) - \mathrm{P}_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \tag{4.1}$$

Q. 2 *Montrer que, $\forall x \in [a; b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle ouvert contenant $x, x_0, \ldots, x_n$ vérifiant (4.1).*

Correction

R. 1

a. Comme pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $x \neq x_i$, on a $\pi_n(x) \neq 0$. De plus les fonctions f, P_n et π_n étant définies sur $[a; b]$, on en déduit que F est définie sur $[a; b]$.
Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a $\pi_n(x_i) = 0$ et $f(x_i) - \mathrm{P}_n(x_i) = 0$, ce qui donne $F(x_i) = 0$. Comme $F(x) = 0$, on en déduit que F admet $(n+2)$ racines distinctes: $\{x, x_0, \ldots, x_n\}$.

b. Les fonctions P_n et π_n sont polynomiales: elles sont donc dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$, on en déduit $F \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$. Or F admettant $(n+2)$ racines distinctes dans $]x_{\min}; x_{\max}[$, on peut alors utiliser le Lemme 1.1 de [1] pour obtenir

$$\exists \xi_x \in]x_{\min}; x_{\max}[; \quad F^{(n+1)}(\xi_x) = 0.$$

c. On a

$$0 = F^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - \mathrm{P}_n^{(n+1)}(\xi_x) - \frac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n^{(n+1)}(\xi_x).$$

Comme $\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\mathrm{P}_n^{(n+1)} = 0$. De plus $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, et comme $\pi_n(x) = x^{n+1} + Q(x)$ avec $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ (i.e. son monône de puissance $n+1$ à pour coefficient 1) on obtient $\pi_n^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ On en déduit

$$f^{(n+1)}(\xi_x) = \frac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{\pi_n(x)} (n+1)!$$

ce qui donne (4.1).

R. 2

- Si, $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $x \neq x_i$ alors (4.1) a été démontré dans la question précédente.
- Si, $\exists i \in [\![0, n]\!]$, $x = x_i$, alors l'équation (4.1) est immédiate (avec ξ_x quelconque) car

$$f(x_i) - \mathrm{P}_n(x_i) = 0 \text{ et } \pi_n(x_i) = 0.$$

◇

Exercice 5

Soient $n \in N^*$ et $x_0, \cdots, x_n$ des points distincts de $[a, b]$ ordonnés par ordre croissant. On pose $E \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $F \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_n[X]$, et, on les munit de la norme $\|.\|_\infty$. On note $\mathcal{L}_n : E \longrightarrow F$ l'application qui a $f \in E$ associe le polynôme d'interpolation de Lagrange $\mathrm{P}_n \in F$ tel que $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\mathrm{P}_n(x_i) = f(x_i)$.

Q. 1

a. Montrer que $\mathcal{L}_n$ est bien définie.

b. Montrer que $\mathcal{L}_n$ est linéaire.

c. Montrer que $\mathcal{L}_n$ est continue et que

$$\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leqslant \Lambda_n \|f\|_\infty, \tag{5.1}$$

où $\Lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \sum_{i=0}^{n} |\mathrm{L}_i(x)|$.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires et continues de E dans F muni de la norme

$$\forall \mathcal{H} \in \mathcal{L}(E, F), \ \|\mathcal{H}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{H}(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

Q. 2

a. Montrer que

$$\|\mathcal{L}_n\| \leqslant \Lambda_n. \tag{5.2}$$

b. Montrer qu'il existe $\bar{x} \in [a, b]$ vérifiant

$$\Lambda_n = \sum_{i=0}^{n} |\mathrm{L}_i(\bar{x})|.$$

c. Montrer qu'il existe $\bar{f} \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ vérifiant

$$|\mathcal{L}_n(\bar{f})(\bar{x})| = \Lambda_n \|\bar{f}\|_\infty.$$

d. Conclure.

Q. 3

Soit $f \in E$. Montrer que

$$\|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leqslant (1 + \Lambda_n) \inf_{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - \mathrm{Q}\|_\infty \tag{5.3}$$

Exercice 6

Soient $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ $n+1$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté $\mathcal{H}_n$, associé aux $n + 1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, est défini par

$$\mathcal{H}_n(x_i) = y_i \text{ et } \mathcal{H}_n'(x_i) = z_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!] \tag{6.1}$$

Q. 1

Quel est a priori le degré de $\mathcal{H}_n$?

On défini le polynôme P_n par

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x) \tag{6.2}$$

avec, pour $i \in [\![0, n]\!]$, A_i et B_i polynômes de degré au plus $2n + 1$ indépendants des valeurs y_i et z_i.

Q. 2

a. Déterminer des conditions suffisantes sur A_i et B_i pour que P_n vérifie (6.1).

b. En déduire les expressions de A_i et B_i en fonction de L_i et de $L_i'(x_i)$ où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}.$$

Q. 3

Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus $2n+1$ défini par (6.1).

Correction

R. 1

On a $2n+2$ équations, donc à priori $\mathcal{H}_n$ est de degré $2n+1$.

R. 2

a. D'après (6.2) on a pour tout $j \in [\![0,n]\!]$

$$\mathrm{P}_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x_j) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x_j)$$

Pour avoir $\mathrm{P}_n(x_j) = y_j$ il suffit d'avoir

$$A_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad \text{et} \quad B_i(x_j) = 0, \quad \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{R6.2}$$

De même, on a

$$\mathrm{P}_n'(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i'(x_j) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i'(x_j)$$

et donc pour avoir $\mathrm{P}_n'(x_j) = z_j$ il suffit d'avoir

$$A_i'(x_j) = 0 \quad \text{et} \quad B_i'(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{R6.3}$$

b. Soit $i \in [\![0,n]\!]$. On commence par déterminer le polynôme $A_i \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ vérifiant

$$A_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad \text{et} \quad A_i'(x_j) = 0, \quad \forall j \in [\![0,n]\!].$$

Les points $(x_j)_{j\in[\![0,n]\!]\setminus\{i\}}$ sont racines doubles de A_i. Le polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ admet les mêmes racines (simples) que A_i et donc $L_i^2 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ admet les mêmes racines doubles que A_i. On peut alors écrire

$$A_i(x) = \alpha_i(x) L_i^2(x) \quad \text{avec } \alpha_i(x) \in \mathbb{R}_1[X].$$

Il reste à déterminer le polynôme α_i. Or on a

$$A_i(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad A_i'(x_i) = 0.$$

Comme $L_i(x_i) = 1$, on obtient

$$A_i(x_i) = \alpha_i(x_i) L_i^2(x_i) = \alpha_i(x_i) = 1$$

et

$$A_i'(x_i) = \alpha_i'(x_i) L_i^2(x_i) + 2\alpha_i(x_i) L_i'(x_i) L_i(x_i) = \alpha_i'(x_i) + 2\alpha_i(x_i) L_i'(x_i) = 0$$

c'est à dire

$$\alpha_i(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_i'(x_i) = -2L_i'(x_i).$$

Comme α_i est un polynôme de degré 1 on en déduit

$$\alpha_i(x) = 1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)$$

et donc

$$A_i(x) = (1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)) L_i^2(x). \tag{R6.4}$$

On détermine ensuite le polynôme $B_i \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ vérifiant

$$B_i(x_j) = 0 \quad \text{et} \quad B_i'(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall j \in [\![0,n]\!].$$

Les points $(x_j)_{j\in[\![0,n]\!]\setminus\{i\}}$ sont racines doubles de B_i et le point x_i est racine simple. Le polynôme $L_i^2 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ admet les mêmes racines doubles. On peut alors écrire

$$B_i(x) = C(x - x_i)L_i^2(x) \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Il reste à déterminer la constante C. Or $L_i(x_i) = 1$ et comme $B_i'(x_i) = 1$ on obtient

$$B_i'(x_i) = CL_i^2(x_i) + 2C(x_i - x_i)L_i'(x_i)L_i(x_i) = C = 1$$

ce qui donne

$$B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x). \tag{R6.5}$$

On vient de démontrer l'existence en construisant un polynôme de degré $2n + 1$ vérifiant (6.1).

R. 3

Deux démonstrations pour l'unicité sont proposées (la deuxième donne aussi l'existence).

dém. 1: Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ vérifiant (6.1). Le polynôme $\mathrm{R} = \mathrm{P} - \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ admet alors $n + 1$ racines doubles distinctes :$(x_0, \cdots, x_n)$. Or le seul polynôme de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ ayant $n + 1$ racines doubles est le polynôme nul et donc $\mathrm{R} = 0$, i.e. $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$.

dém. 2: Soit $\Phi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$ définie par

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n+1}[X], \quad \Phi(\mathrm{P}) = (\mathrm{P}(x_0), \cdots, \mathrm{P}(x_n), \mathrm{P}'(x_0), \cdots, \mathrm{P}'(x_n)).$$

L'existence et l'unicité du polynôme $\mathcal{H}_n$ est équivalente à la bijectivité de l'application Φ. Or celle-ci est une application linéaire entre deux espaces de dimension $2n + 2$. Elle est donc bijective si et seulement si elle injective (ou surjective). Pour vérifier l'injectivité de Φ il est nécessaire et suffisant de vérifier que son noyau est réduit au polynôme nul.
Soit $\mathrm{P} \in \ker \Phi$. On a alors $\Phi(\mathrm{P}) = \mathbf{0}_{2n+2}$ et donc $(x_0, \cdots, x_n)$ sont $n + 1$ racines doubles distinctes de P. Or le seul polynôme de $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$ ayant $n + 1$ racines doubles est le polynôme nul et donc $\mathrm{P} = 0$.

◇

Exercice 7

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$. et $(x_i)_{i=0}^n$, $(n + 1)$ points distincts de $[a; b]$. On note

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad y_i = f(x_i) \quad \text{et} \quad z_i = f'(x_i).$$

On définit, par $\mathcal{H}_n$, le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i\in[\![0,n]\!]}$ et par π_n le polynôme défini par

$$\pi_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^{n}(t - x_i).$$

Q. 1

Soit $x \in [a; b]$ tel que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $x \neq x_i$. On note

$$x_{\min} = \min(x, x_0, \ldots, x_n), \quad x_{\max} = \max(x, x_0, \ldots, x_n),$$

et

$$F(t) = f(t) - \mathcal{H}_n(t) - \frac{f(x) - \mathcal{H}_n(x)}{\kappa_n(x)}\kappa_n(t)$$

avec $\kappa_n \stackrel{\text{def}}{=} \pi_n^2$.

a. *Démontrer que F est définie sur $[a; b]$ et que $F \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$.*

b. *Montrer que F' admet $2(n + 1)$ zéros distincts.*

c. *Montrer qu'il existe $\xi_x \in]x_{\min}; x_{\max}[$ tel que $F^{(2n+2)}(\xi_x) = 0$.*

d. *En déduire que*

$$f(x) - \mathcal{H}_n(x) = \frac{\kappa_n(x)}{(2n + 2)!} f^{(2n+2)}(\xi_x). \tag{7.1}$$

Q. 2

Montrer que, $\forall x \in [a; b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle ouvert contenant $x, x_0, \ldots, x_n$ vérifiant (7.1).

Exercice 8

Ecrire une fonction algorithmique Hermite permettant de calculer H_n (polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n+1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]})$ en $t \in \mathbb{R}$.

Correction

But : Calculer le polynôme $\mathcal{H}_n(t)$ défini par l'équation (16) de [1]

Données : $\boldsymbol{X}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $X(i) = x_{i-1}\ \forall i \in [\![1, n+1]\!]$ et $X(i) \neq X(j)$ pour $i \neq j$,
$\boldsymbol{Y}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Y(i) = y_{i-1}\ \forall i \in [\![1, n+1]\!]$,
$\boldsymbol{Z}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Z(i) = z_{i-1}\ \forall i \in [\![1, n+1]\!]$,
t : un réel.

Résultat : pH : le réel $\mathrm{pH} = \mathcal{H}_n(t)$.

D'après la Définition 1.1 de [1], on a

$$\mathcal{H}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(t) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(t) = \sum_{i=0}^{n} (y_i A_i(t) + z_i B_i(t))$$

avec

$$A_i(t) = (1 - 2L_i'(x_i)(t - x_i))L_i^2(t) \quad \text{et} \quad B_i(t) = (t - x_i)L_i^2(t)$$

où

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}.$$

Pour rendre effectif le calcul de $\mathcal{H}_n(t)$, il reste à déterminer $L_i'(x_i)$. On a

$$L_i'(t) = \sum_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_k} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i\\ j\neq k}}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}$$

d'où

$$L_i'(x_i) = \sum_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_k}. \tag{8.1}$$

La fonction que l'on va écrire use (et certains diront abuse) de fonctions.

Algorithme 2 Fonction Hermite permettant de calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite $\mathcal{H}_n(t)$ définit par (16)

```
Fonction pH ← Hermite( X, Y, Z, t )
  pH ← 0
  Pour i ← 0 à n faire
    pH ← pH + PolyA(i, X, t) * Y(i+1) + PolyB(i, X, t) * Z(i+1)
  Fin Pour
Fin Fonction
```

Les différentes fonctions utilisées pour la fonction Hermite (directement ou indirectement) sont les suivantes :

PolyA **:** calcul du polynôme A_i en t, (données i, X, t)

PolyB **:** calcul du polynôme B_i en t, (données i, X, t)

PolyL **:** calcul du polynôme L_i en t, (données i, X, t)

PolyLp **:** calcul de $L_i'(x_i)$, (données i, X)

Algorithme 3 Fonction PolyA permettant de calculer le polynôme A_i en $t \in \mathbb{R}$ donné par $A_i(t) = (1 - 2L_i'(x_i)(t - x_i))L_i^2(t)$

Fonction $y \leftarrow$ PolyA($i, \boldsymbol{X}, t$)
    $y \leftarrow (1 - 2 * \mathrm{PolyLp}(i, X) * (t - X(i+1))) * (\mathrm{PolyL}(i, X, t))^2$
Fin Fonction

Algorithme 4 Fonction PolyB permettant de calculer le polynôme B_i en $t \in \mathbb{R}$ donné par $B_i(t) = (t - x_i)L_i^2(t)$

Fonction $y \leftarrow$ PolyB($i, \boldsymbol{X}, t$)
    $y \leftarrow (t - X(i+1)) * (\mathrm{PolyL}(i, X, t))^2$
Fin Fonction

Algorithme 5 Fonction PolyL permettant de calculer le polynôme L_i en $t \in \mathbb{R}$ donné par $L_i(t) = \displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}$

Fonction $y \leftarrow$ PolyL($i, \boldsymbol{X}, t$)
    $y \leftarrow 1$
    Pour $j \leftarrow 0$ **à** n, $(j \sim= i)$ **faire**
        $y \leftarrow y * (t - X(j+1))/(X(i+1) - X(j+1))$
    Fin Pour
Fin Fonction

Algorithme 6 Fonction PolyLp permettant de calculer $L_i'(x_i) = \displaystyle\sum_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_k}$

Fonction $y \leftarrow$ PolyLp($i, \boldsymbol{X}$)
    $y \leftarrow 0$
    Pour $k \leftarrow 0$ **à** n, $(k \sim= i)$ **faire**
        $y \leftarrow y + 1/(X(i+1) - X(k+1))$
    Fin Pour
Fin Fonction

Bien évidemment une telle écriture est loin d'être optimale mais elle a l'avantage d'être facile à programmer et facile à lire car elle "colle" aux formules mathématiques.

On laisse le soin au lecteur d'écrire des fonctions plus performantes... ◇