

Exercices associés au cours d'Analyse Numérique I

Interpolation

References

- [1] F. CUVELIER, *Analyse numérique I, résolution de systèmes linéaires, méthodes itératives, résumé.* fichier pdf, https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/24-25/resume_Interpolation_print-2by1.pdf.

1 Exercices du cours

EXERCICE 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(n+1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1

- a. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (1.1)$$

- b. Montrer que les $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).

R. 1

- a. De (1.1), on déduit que les n points distincts x_j pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}$ sont les n zéros du polynôme L_i de degré n : il s'écrit donc sous la forme

$$L_i(x) = C \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la constante C , on utilise (1.1) avec $j = i$

$$L_i(x_i) = 1 = C \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)$$

Les points x_i sont distincts deux à deux, on a $\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j) \neq 0$ et donc

$$C = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}$$

d'où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (R1.1)$$

Il reste à démontrer l'unicité. On suppose qu'il existe L_i et U_i deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant (1.1). Alors $Q_i = L_i - U_i$ est polynôme de degré n (au plus) admettant $n+1$ zéros distincts, c'est donc le polynôme nul et on a nécessairement $L_i = U_i$.

- b. On sait que $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. Pour que les $\{L_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ il suffit de démontrer qu'ils sont linéairement indépendants.
Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ $n+1$ scalaires. Montrons pour cela que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0 \implies \lambda_i = 0, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Noter que la première égalité est dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ et donc le 0 est pris au sens polynôme nul.
On a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0 \iff \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En choisissant $x = x_k$, on a par (1.1) $\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x_k) = \lambda_k$ et donc

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = 0 \implies \sum_{i=1}^n \lambda_i L_i(x_k) = 0, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \iff \lambda_k = 0, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Les $\{L_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ sont donc linéairement indépendants.

On définit le polynôme P_n par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x). \quad (1.2)$$

Q. 2

Montrer que polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $P_n(x_i) = y_i, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

R. 2

Par construction $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et on a, $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket^a$,

$$\begin{aligned} P_n(x_j) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^n y_i L_i(x_j) \\ &= \sum_{i=0}^n y_i \delta_{i,j} \text{ par (1.1)} \\ &= y_j. \end{aligned}$$

Pour démontrer l'unicité, on propose ici deux méthodes

- On note P_a et P_b deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant (1.1). Le polynôme $Q = P_a - P_b$ appartient aussi à $\mathbb{R}_n[X]$ et il vérifie, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$Q(x_i) = P_a(x_i) - P_b(x_i) = 0.$$

Les $n+1$ points x_i étant distincts, ce sont donc $n+1$ racines distinctes du polynôme Q . Or tout polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes^b. On en déduit que le seul polynôme de degré au plus n admettant $n+1$ racines distinctes est le polynôme nulle et donc $P_a = P_b$.

- c'est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant (1.2) car la décomposition dans la base $\{L_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est unique.

^aA noter le choix de l'indice j . Que doit-on faire dans ce qui suit si l'on choisit i comme indice?

^bLe théorème de d'Alembert-Gauss affirme que tout polynôme à coefficients complexes de degré n admet n racines complexes qui ne sont pas nécessairement distinctes

EXERCICE 2

Ecrire la fonction **Lagrange** permettant de calculer $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $(n+1)$ couples $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$) en $t \in \mathbb{R}$.

~~~~~

**But :** Calculer le polynôme  $\mathcal{P}_n(t)$  défini par (2)

**Données :**  $\mathbf{X}$  : vecteur/tableau de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $X(i) = x_{i-1} \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$  et  $X(i) \neq X(j)$  pour  $i \neq j$ ,

**Correction**

$\mathbf{Y}$  : vecteur/tableau de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $Y(i) = y_{i-1} \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ ,  
 $t$  : un réel.

**Résultat :**  $y$  : le réel  $y = \mathcal{P}_n(t)$ .

**Algorithme 1**  $\boxed{\mathcal{R}_0}$ 

1: Calcul de  $y = \mathcal{P}_n(t) = \sum_{i=1}^{n+1} Y(i) L_{i-1}(t)$

**Algorithme 1**  $\boxed{\mathcal{R}_1}$ 

1:  $y \leftarrow 0$   
 2: **Pour**  $i \leftarrow 1$  à  $n + 1$  **faire**  
 3:    $y \leftarrow y + Y(i) * L_{i-1}(t)$   
 4: **Fin Pour**

**Algorithme 1**  $\boxed{\mathcal{R}_1}$ 

1:  $y \leftarrow 0$   
 2: **Pour**  $i \leftarrow 1$  à  $n + 1$  **faire**  
 3:    $y \leftarrow y + Y(i) * L_{i-1}(t)$   
 4: **Fin Pour**

**Algorithme 1**  $\boxed{\mathcal{R}_2}$ 

1:  $y \leftarrow 0$   
 2: **Pour**  $i \leftarrow 1$  à  $n + 1$  **faire**  
 3:    $L \leftarrow \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{t - X(j)}{X(i) - X(j)}$   
 4:    $y \leftarrow y + Y(i) * L$   
 5: **Fin Pour**

**Algorithme 1**  $\boxed{\mathcal{R}_2}$ 

1:  $y \leftarrow 0$   
 2: **Pour**  $i \leftarrow 1$  à  $n + 1$  **faire**  
 3:    $L \leftarrow \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{t - X(j)}{X(i) - X(j)}$   
 4:    $y \leftarrow y + Y(i) * L$   
 5: **Fin Pour**

**Algorithme 1**  $\boxed{\mathcal{R}_3}$ 

1:  $y \leftarrow 0$   
 2: **Pour**  $i \leftarrow 1$  à  $n + 1$  **faire**  
 3:    $L \leftarrow 1$   
 4:   **Pour**  $j \leftarrow 1$  à  $n + 1$ ,  $(j \sim i)$  **faire**  
 5:      $L \leftarrow L * (t - X(j)) / (X(i) - X(j))$   
 6:   **Fin Pour**  
 7:    $y \leftarrow y + Y(i) * L$   
 8: **Fin Pour**

On obtient alors l'algorithme final

**Algorithme 1** Fonction **Lagrange** permettant de calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange  $\mathcal{P}_n(x)$  défini par (2) de [1]

**Données :**  $\mathbf{X}$  : vecteur/tableau de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $X(i) = x_{i-1} \ \forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$  et  $X(i) \neq X(j)$  pour  $i \neq j$ ,  
 $\mathbf{Y}$  : vecteur/tableau de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $Y(i) = y_{i-1} \ \forall i \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ ,  
 $t$  : un réel.

**Résultat :**  $y$  : le réel  $y = \mathcal{P}_n(t)$ .

1: **Fonction**  $y \leftarrow \text{Lagrange}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$   
 2:    $y \leftarrow 0$   
 3:   **Pour**  $i \leftarrow 1$  à  $n + 1$  **faire**  
 4:      $L \leftarrow 1$   
 5:     **Pour**  $j \leftarrow 1$  à  $n + 1$ ,  $(j \sim i)$  **faire**  
 6:        $L \leftarrow L * (t - X(j)) / (X(i) - X(j))$   
 7:     **Fin Pour**  
 8:      $y \leftarrow y + Y(i) * L$   
 9:   **Fin Pour**  
 10:   **return**  $y$   
 11: **Fin Fonction**

◇

### EXERCICE 3

Soient  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $(x_i)_{i=0}^n$  dans  $I$ , avec  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ,

tel que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f(x_i) = 0.$$

**Q. 1**

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$ , avec  $f$  dérivable sur  $I$ . On suppose qu'il existe  $(x_i)_{i=0}^n$  dans  $I$ , avec  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , tel que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f(x_i) = 0.$$

Montrer qu'il existe  $(\xi_i)_{i=1}^n$  dans  $I$ , avec  $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \dots < \xi_n < x_n$ , tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f^{(1)}(\xi_i) = 0.$$

**R. 1**

On rappelle le théorème de Rolle:

**Théorème (Rolle).** Soient  $a, b$  deux réels,  $a < b$ , et,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que

- $f$  est continue sur  $[a, b]$ ,
- $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ ,
- $f(a) = f(b)$ .

Alors il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Sur l'intervalle  $[x_{k-1}, x_k]$ ,  $x_{k-1} < x_k$ , on a  $f(x_{k-1}) = f(x_k) (= 0)$  et le théorème de Rolle s'applique:

$$\exists \xi_k \in ]x_{k-1}, x_k[, \quad f^{(1)}(\xi_k) = 0.$$

La fonction  $f^{(1)}$  admet donc au moins  $n$  zéros distincts, les  $(\xi_k)_{k=1}^n$ , avec

$$x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < \dots < x_{n-1} < \xi_n < x_n.$$

**Q. 2**

Démontrer par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$  la proposition suivante

$(\mathcal{P}_n)$

Soit  $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I; \mathbb{R})$ ,  $f^{(n-1)}$  dérivable sur  $I$ . Si  $f$  admet au moins  $(n+1)$  zéros distincts dans  $I$ , notés  $x_0 < \dots < x_n$ , alors  $f^{(n)}$  admet au moins un zéro dans  $]x_0, x_n[$ .

**R. 2**

- **Initialisation.** Montrons que  $(\mathcal{P}_1)$  est vérifiée.

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$  et  $f$  dérivable sur  $I$ . Si  $f$  admet au moins 2 zéros distincts dans  $I$ , notés  $x_0$  et  $x_1$ , avec  $x_0 < x_1$ , alors on a  $f(x_0) = f(x_1) (= 0)$  et le théorème de Rolle s'applique:

$$\exists \xi \in ]x_0, x_1[, \quad f^{(1)}(\xi) = 0.$$

- **Hérédité.** Soit  $n \geq 2$ . On suppose que  $(\mathcal{P}_{n-1})$  est vraie. Montrons que  $(\mathcal{P}_n)$  est vérifiée.

Soit  $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I; \mathbb{R})$ ,  $f^{(n-1)}$  dérivable sur  $I$ . On suppose que  $f$  admet au moins  $(n+1)$  zéros distincts dans  $I$ , notés  $(x_i)_{i=0}^n$  avec  $x_0 < \dots < x_n$ . On a donc

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f(x_i) = 0.$$

Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Comme on vérifie les hypothèses de **Q. 1**, on en déduit

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \exists \xi_k \in ]x_{k-1}, x_k[, \quad \text{tel que } f^{(1)}(\xi_k) = 0.$$

La fonction  $f^{(1)}$  admet donc au moins  $n$  zéros distincts, les  $(\xi_k)_{k=1}^n$ , avec  $x_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n < x_n$ . En posant  $g = f^{(1)}$ , on a, par hypothèse sur  $f$ ,  $g \in \mathcal{C}^{n-2}(I; \mathbb{R})$  et  $g^{(n-2)}$  dérivable sur  $I$ . La fonction  $g$  admettant  $n$  zéros distincts dans  $I$ , les  $(\xi_k)_{k=1}^n$ , avec  $\xi_1 < \dots < \xi_n$ , on peut appliquer l'hypothèse de récurrence  $(\mathcal{P}_{n-1})$  à  $g$  pour obtenir

$$\exists \xi \in ]\xi_1, \xi_n[, \quad g^{(n-1)}(\xi) = 0.$$

On abouti alors à  $f^{(n)}(\xi) = 0$  avec  $\xi \in ]\xi_1, \xi_n[ \subset ]x_0, x_n[$ .

Ce qui prouve  $(\mathcal{P}_n)$ .

- **Conclusion.** On a démontré par récurrence que  $(\mathcal{P}_n)$  est vérifiée pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

# EXERCICE 4

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$  et  $(n + 1)$  couples de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , tels que les  $x_i \in [a; b]$  sont distincts deux à deux et  $y_i = f(x_i)$ .

On note par  $P_n$  le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  et  $\pi_n$  le polynôme de degré  $(n + 1)$  défini par

$$\pi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Q. 1

Soit  $x \in [a; b]$  tel que, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x \neq x_i$ . On note

$$x_{\min} = \min(x, x_0, \dots, x_n), \quad x_{\max} = \max(x, x_0, \dots, x_n),$$

et

$$F(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t).$$

a. Démontrer que  $F$  est définie sur  $[a; b]$  et admet  $(n + 2)$  racines distinctes.

b. Montrer qu'il existe  $\xi_x \in ]x_{\min}; x_{\max}[$  tel que  $F^{(n+1)}(\xi_x) = 0$ .

c. En déduire que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \quad (4.1)$$

R. 1

a. Comme pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x \neq x_i$ , on a  $\pi_n(x) \neq 0$ . De plus les fonctions  $f$ ,  $P_n$  et  $\pi_n$  étant définies sur  $[a; b]$ , on en déduit que  $F$  est définie sur  $[a; b]$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a  $\pi_n(x_i) = 0$  et  $f(x_i) - P_n(x_i) = 0$ , ce qui donne  $F(x_i) = 0$ . Comme  $F(x) = 0$ , on en déduit que  $F$  admet  $(n + 2)$  racines distinctes:  $\{x, x_0, \dots, x_n\}$ .

b. Les fonctions  $P_n$  et  $\pi_n$  sont polynomiales: elles sont donc dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ . Comme  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$ , on en déduit  $F \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$ . Or  $F$  admettant  $(n + 2)$  racines distinctes dans  $]x_{\min}; x_{\max}[$ , on peut alors utiliser le Lemme 1.1 de [1] pour obtenir

$$\exists \xi_x \in ]x_{\min}; x_{\max}[; \quad F^{(n+1)}(\xi_x) = 0.$$

c. On a

$$0 = F^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - P_n^{(n+1)}(\xi_x) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n^{(n+1)}(\xi_x).$$

Comme  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a  $P_n^{(n+1)} = 0$ . De plus  $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ , et comme  $\pi_n(x) = x^{n+1} + Q(x)$  avec  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$  (i.e. son monôme de puissance  $n + 1$  à pour coefficient 1) on obtient  $\pi_n^{(n+1)}(x) = (n + 1)!$ . On en déduit

$$f^{(n+1)}(\xi_x) = \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} (n + 1)!$$

ce qui donne (4.1).

Q. 2

Montrer que,  $\forall x \in [a; b]$ , il existe  $\xi_x$  appartenant au plus petit intervalle ouvert contenant  $x, x_0, \dots, x_n$  vérifiant (4.1).

R. 2

- Si,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x \neq x_i$  alors (4.1) a été démontré dans la question précédente.
- Si,  $\exists i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x = x_i$ , alors l'équation (4.1) est immédiate (avec  $\xi_x$  quelconque) car

$$f(x_i) - P_n(x_i) = 0 \quad \text{et} \quad \pi_n(x_i) = 0.$$

# EXERCICE 5

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_0, \dots, x_n$  des points distincts de  $[a; b]$  ordonnés par ordre croissant. On pose  $E \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}^0([a; b]; \mathbb{R})$  et  $F \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_n[X]$ , et, on les munit de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . On note  $\mathcal{L}_n : E \longrightarrow F$  l'application qui à  $f \in E$  associe le polynôme d'interpolation de Lagrange  $P_n \in F$  tel que  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P_n(x_i) = f(x_i)$ .

Q. 1

- a. Montrer que  $\mathcal{L}_n$  est bien définie.  
 b. Montrer que  $\mathcal{L}_n$  est linéaire.  
 c. Montrer que  $\mathcal{L}_n$  est continue et que

$$\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq \Lambda_n \|f\|_\infty, \quad (5.1)$$

$$\text{où } \Lambda_n = \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |L_i(x)|.$$

R. 1

- a. Comme  $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ , on a,  $\forall x \in [a, b]$ ,  $f(x)$  défini. <sup>a</sup> On a donc,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f(x_i)$  défini. D'après le Théorème ??, les points  $(x_i)_{i=0}^n$  étant distincts deux à deux, le polynôme d'interpolation de Lagrange  $\mathcal{L}_n(f)$  associés aux couples de  $(x_i, f(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est unique dans  $\mathbb{R}_n[X]$ . L'application  $\mathcal{L}_n$  est donc bien définie.  
 b. Soient  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ , et,  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ . il nous faut démontrer, par exemple, que

$$\mathcal{L}_n(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathcal{L}_n(f) + \mu \mathcal{L}_n(g).$$

Cette dernière équation est équivalente à

$$\forall x \in [a, b], \quad \mathcal{L}_n(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \mathcal{L}_n(f)(x) + \mu \mathcal{L}_n(g)(x).$$

Soit  $x \in [a, b]$ . On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n(\lambda f + \mu g)(x) &= \sum_{i=0}^n (\lambda f + \mu g)(x_i) L_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^n (\lambda f(x_i) + \mu g(x_i)) L_i(x) \\ &= \lambda \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) + \mu \sum_{i=0}^n g(x_i) L_i(x) \\ &= \lambda \mathcal{L}_n(f)(x) + \mu \mathcal{L}_n(g)(x). \end{aligned}$$

Ce qui démontre la linéarité de  $\mathcal{L}_n$ .

- c. Comme  $\mathcal{L}_n$  est linéaire, pour démontrer qu'elle est continue, il suffit de démontrer que

$$\exists C > 0 \text{ t.q. } \forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}), \quad \|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq C \|f\|_\infty.$$

En effet, on a pour tout  $x \in [a, b]$  et pour tout  $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_n(f)(x)| &= \left| \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^n |f(x_i) L_i(x)| \leq \|f\|_\infty \sum_{i=0}^n |L_i(x)| \\ &\leq \Lambda_n \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq \Lambda_n \|f\|_\infty. \quad (5.1)$$

En prenant  $C = \Lambda_n$ , qui est bien indépendant de  $f$ , on obtient la continuité de  $\mathcal{L}_n$ .

<sup>a</sup>Ceci n'aurait pas été le cas si  $f \in L^2([a, b])$  puisque  $f(x)$  aurait alors été défini pour presque tout  $x \in [a, b]$ .

On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'espace des applications linéaires et continues de  $E$  dans  $F$  muni de la norme

$$\forall \mathcal{H} \in \mathcal{L}(E, F), \quad \|\mathcal{H}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{H}(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

Q. 2

- a. Montrer que

$$\|\mathcal{L}_n\| \leq \Lambda_n. \quad (5.2)$$

b. Montrer qu'il existe  $\bar{x} \in [a, b]$  vérifiant

$$\Lambda_n = \sum_{i=0}^n |L_i(\bar{x})|.$$

c. Montrer qu'il existe  $\bar{f} \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$  vérifiant

$$|\mathcal{L}_n(\bar{f})(\bar{x})| = \Lambda_n \|\bar{f}\|_\infty.$$

d. Conclure.

R. 2

a. Soit  $f \in E$ ,  $f \neq 0$ . (rappel:  $f = 0 \Leftrightarrow \|f\|_\infty = 0$ ) De (5.1), on a

$$\frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq \Lambda_n.$$

En prenant le sup sur toutes les fonctions non nulles, on obtient

$$\|\mathcal{L}_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in E \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq \Lambda_n. \quad (\text{R5.2})$$

b. L'application  $x \mapsto \sum_{i=0}^n |L_i(x)|$  étant continue sur le fermé borné  $[a, b]$ , il existe alors  $\bar{x} \in [a, b]$  tel que

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |L_i(x)| = \sum_{i=0}^n |L_i(\bar{x})|.$$

c. On a

$$|\mathcal{L}_n(f)(\bar{x})| = \left| \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(\bar{x}) \right|$$

et on veut déterminer  $\bar{f} \in E$  pour avoir

$$\left| \sum_{i=0}^n \bar{f}(x_i) L_i(\bar{x}) \right| = \sum_{i=0}^n |\bar{f}(x_i) L_i(\bar{x})|. \quad (\text{R5.3})$$

Il faut donc que, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , les réels  $\bar{f}(x_i) L_i(\bar{x})$  aient le même signe. On choisit le signe positif, et on impose par exemple les valeurs de  $\bar{f}(x_i)$ ,

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \begin{cases} \bar{f}(x_i) &= 1, & \text{si } L_i(\bar{x}) \geq 0, \\ \bar{f}(x_i) &= -1, & \text{si } L_i(\bar{x}) < 0. \end{cases}$$

Ainsi, avec cette construction, (R5.3) est bien vérifiée.

Enfin, il faut aussi que l'on ait

$$\sum_{i=0}^n |\bar{f}(x_i) L_i(\bar{x})| = \|\bar{f}\|_\infty \sum_{i=0}^n |L_i(\bar{x})|$$

Comme les  $(x_i)_{i=0}^n$  sont ordonnés par ordre croissant, on a

$$a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$$

et on peut alors choisir  $\bar{f}$  affine sur chacun des intervalles  $[x_k, x_{k+1}]$ ,  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , puisque l'on connaît les valeurs aux extrémités de chaque intervalle (+1 ou -1). En dehors de ces intervalles, on prend par exemple  $\bar{f}(x) = \bar{f}(x_0)$ ,  $\forall x \in [a, x_0]$ , et  $\bar{f}(x) = \bar{f}(x_n)$ ,  $\forall x \in [x_n, b]$ . Cette fonction est par construction continue, donc dans  $E$ , et

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad |\bar{f}(x_i)| = \|\bar{f}\|_\infty.$$

Au final, on obtient avec cette fonction

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_n(\bar{f})(\bar{x})| &= \left| \sum_{i=0}^n \bar{f}(x_i) L_i(\bar{x}) \right| \\ &= \sum_{i=0}^n |\bar{f}(x_i) L_i(\bar{x})| = \|\bar{f}\|_\infty \sum_{i=0}^n |L_i(\bar{x})| \\ &= \Lambda_n \|\bar{f}\|_\infty. \end{aligned}$$

d. On déduit de l'égalité précédente que

$$\|\mathcal{L}_n(\bar{f})\|_\infty \geq \Lambda_n \|\bar{f}\|_\infty$$

et comme  $\|\bar{f}\|_\infty \neq 0$ , on obtient

$$\frac{\|\mathcal{L}_n(\bar{f})\|_\infty}{\|\bar{f}\|_\infty} \geq \Lambda_n.$$

En utilisant conjointement cette equation et (R5.3), on obtient

$$\|\mathcal{L}_n\| = \Lambda_n.$$

Q. 3

Soit  $f \in E$ . Montrer que

$$\|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_\infty \quad (5.3)$$

R. 3

Soit  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ . Par unicité du théorème d'interpolation on a  $\mathcal{L}_n(Q) = Q$  et alors

$$\begin{aligned} \|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty &= \|f - Q + \mathcal{L}_n(Q) - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \\ &\leq \|f - Q\|_\infty + \|\mathcal{L}_n(Q - f)\|_\infty \quad \text{par linéarité de } \mathcal{L}_n \\ &\leq \|f - Q\|_\infty + \Lambda_n \|f - Q\|_\infty \quad \text{par continuité de } \mathcal{L}_n \end{aligned}$$

d'où le résultat.

## EXERCICE 6

Soient  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$   $n + 1$  triplets de  $\mathbb{R}^3$ , où les  $x_i$  sont des points distincts deux à deux de l'intervalle  $[a, b]$ . Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté  $\mathcal{H}_n$ , associé aux  $n + 1$  triplets  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , est défini par

$$\mathcal{H}_n(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad \mathcal{H}'_n(x_i) = z_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (6.1)$$

Q. 1

Quel est a priori le degré de  $\mathcal{H}_n$ ?

R. 1

On a  $2n + 2$  équations, donc a priori  $\mathcal{H}_n$  est de degré  $2n + 1$ .

On définit le polynôme  $P_n$  par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (6.2)$$

avec, pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $A_i$  et  $B_i$  polynômes de degré au plus  $2n + 1$  indépendants des valeurs  $y_i$  et  $z_i$ .

Q. 2

a. Déterminer des conditions suffisantes sur  $A_i$  et  $B_i$  pour que  $P_n$  vérifie (6.1).

b. En déduire les expressions de  $A_i$  et  $B_i$  en fonction de  $L_i$  et de  $L'_i(x_i)$  où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

R. 2

a. D'après (6.2) on a pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$P_n(x_j) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x_j) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x_j)$$

Pour avoir  $P_n(x_j) = y_j$  il suffit d'avoir

$$A_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad \text{et} \quad B_i(x_j) = 0, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (R6.4)$$

De même, on a

$$P'_n(x_j) = \sum_{i=0}^n y_i A'_i(x_j) + \sum_{i=0}^n z_i B'_i(x_j)$$



et donc pour avoir  $P'_n(x_j) = z_j$  il suffit d'avoir

$$A'_i(x_j) = 0 \text{ et } B'_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (\text{R6.5})$$

b. Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On commence par déterminer le polynôme  $A_i \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$  vérifiant

$$A_i(x_j) = \delta_{i,j} \text{ et } A'_i(x_j) = 0, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Les points  $(x_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}}$  sont racines doubles de  $A_i$ . Le polynôme  $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$  admet les mêmes racines (simples) que  $A_i$  et donc  $L_i^2 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$  admet les mêmes racines doubles que  $A_i$ . On peut alors écrire

$$A_i(x) = \alpha_i(x)L_i^2(x) \text{ avec } \alpha_i(x) \in \mathbb{R}_1[X].$$

Il reste à déterminer le polynôme  $\alpha_i$ . Or on a

$$A_i(x_i) = 1 \text{ et } A'_i(x_i) = 0.$$

Comme  $L_i(x_i) = 1$ , on obtient

$$A_i(x_i) = \alpha_i(x_i)L_i^2(x_i) = \alpha_i(x_i) = 1$$

et

$$A'_i(x_i) = \alpha'_i(x_i)L_i^2(x_i) + 2\alpha_i(x_i)L'_i(x_i)L_i(x_i) = \alpha'_i(x_i) + 2\alpha_i(x_i)L'_i(x_i) = 0$$

c'est à dire

$$\alpha_i(x_i) = 1 \text{ et } \alpha'_i(x_i) = -2L'_i(x_i).$$

Comme  $\alpha_i$  est un polynôme de degré 1 on en déduit

$$\alpha_i(x) = 1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i)$$

et donc

$$A_i(x) = (1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i))L_i^2(x). \quad (\text{R6.6})$$

On détermine ensuite le polynôme  $B_i \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$  vérifiant

$$B_i(x_j) = 0 \text{ et } B'_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Les points  $(x_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{i\}}$  sont racines doubles de  $B_i$  et le point  $x_i$  est racine simple. Le polynôme  $L_i^2 \in \mathbb{R}_{2n}[X]$  admet les mêmes racines doubles. On peut alors écrire

$$B_i(x) = C(x - x_i)L_i^2(x) \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Il reste à déterminer la constante  $C$ . Or  $L_i(x_i) = 1$  et comme  $B'_i(x_i) = 1$  on obtient

$$B'_i(x_i) = CL_i^2(x_i) + 2C(x_i - x_i)L'_i(x_i)L_i(x_i) = C = 1$$

ce qui donne

$$B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x). \quad (\text{R6.7})$$

On vient de démontrer l'existence en construisant un polynôme de degré  $2n + 1$  vérifiant (6.1).

**Q. 3**

*Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus  $2n + 1$  défini par (6.1).*

**R. 3**

Deux démonstrations pour l'unicité sont proposées (la deuxième donne aussi l'existence).

**dém. 1:** Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$  vérifiant (6.1). Le polynôme  $R = P - Q \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$  admet alors  $n + 1$  racines doubles distinctes  $(x_0, \dots, x_n)$ . Or le seul polynôme de  $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$  ayant  $n + 1$  racines doubles est le polynôme nul et donc  $R = 0$ , i.e.  $P = Q$ .

**dém. 2:** Soit  $\Phi : \mathbb{R}_{2n+1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$  définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X], \quad \Phi(P) = (P(x_0), \dots, P(x_n), P'(x_0), \dots, P'(x_n)).$$

L'existence et l'unicité du polynôme  $\mathcal{H}_n$  est équivalente à la bijectivité de l'application  $\Phi$ . Or celle-ci est une application linéaire entre deux espaces de dimension  $2n + 2$ . Elle est donc bijective si et seulement si elle est injective (ou surjective). Pour vérifier l'injectivité de  $\Phi$  il est nécessaire et suffisant de vérifier que son noyau est réduit au polynôme nul.

Soit  $P \in \ker \Phi$ . On a alors  $\Phi(P) = \mathbf{0}_{2n+2}$  et donc  $(x_0, \dots, x_n)$  sont  $n+1$  racines doubles distinctes de  $P$ . Or le seul polynôme de  $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$  ayant  $n+1$  racines doubles est le polynôme nul et donc  $P = 0$ .

### EXERCICE 7

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$ . et  $(x_i)_{i=0}^n$ ,  $(n+1)$  points distincts de  $[a, b]$ . On note

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad y_i = f(x_i) \quad \text{et} \quad z_i = f'(x_i).$$

On définit, par  $\mathcal{H}_n$ , le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux triplets  $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  et par  $\pi_n$  le polynôme défini par

$$\pi_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^n (t - x_i).$$

Q. 1

Soit  $x \in [a; b]$  tel que, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x \neq x_i$ . On note

$$x_{\min} = \min(x, x_0, \dots, x_n), \quad x_{\max} = \max(x, x_0, \dots, x_n),$$

et

$$F(t) = f(t) - \mathcal{H}_n(t) - \frac{f(x) - \mathcal{H}_n(x)}{\kappa_n(x)} \kappa_n(t)$$

avec  $\kappa_n \stackrel{\text{def}}{=} \pi_n^2$ .

- Démontrer que  $F$  est définie sur  $[a; b]$  et que  $F \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$ .
- Montrer que  $F'$  admet  $2(n+1)$  zéros distincts.
- Montrer qu'il existe  $\xi_x \in ]x_{\min}; x_{\max}[$  tel que  $F^{(2n+2)}(\xi_x) = 0$ .
- En déduire que

$$f(x) - \mathcal{H}_n(x) = \frac{\kappa_n(x)}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi_x). \quad (7.1)$$

R. 1

- Comme pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x \neq x_i$ , on a  $\kappa_n(x) \neq 0$ . De plus les fonctions  $f$ ,  $\mathcal{H}_n$  et  $\kappa_n$  étant définies sur  $[a; b]$ , on en déduit que  $F$  est définie sur  $[a; b]$ .  
Les fonctions  $\mathcal{H}_n$  et  $\kappa_n$  sont polynomiales: elles sont donc dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ . Comme  $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a; b]; \mathbb{R})$ , on en déduit  $F \in \mathcal{C}^{2n+2}([a; b]; \mathbb{R})$ .

- On peut noter que

$$F'(t) = f'(t) - \mathcal{H}'_n(t) - \frac{f(x) - \mathcal{H}_n(x)}{\kappa_n(x)} \kappa'_n(t)$$

avec  $\kappa'_n(t) = 2\pi'_n(t)\pi_n(t)$ . Comme pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f'(x_i) - \mathcal{H}'_n(x_i) = 0$  et  $\pi_n(x_i) = 0$ , on en déduit que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad F'(x_i) = 0.$$

De plus, on a

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad F(x_i) \quad \text{et} \quad F(x) = 0.$$

On note  $(s_j)_{j=0}^{n+1}$  les éléments de  $\{x, x_0, \dots, x_n\}$  ordonnés dans l'ordre croissant. On a donc

$$s_0 < s_1 < \dots < s_{n+1} \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket, \quad F(s_j) = 0.$$

Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Sur l'intervalle  $[s_k, s_{k+1}]$ ,  $s_k < s_{k+1}$ , on a  $F(s_k) = F(s_{k+1}) (= 0)$  et le théorème de Rolle s'applique:

$$\exists \xi_k \in ]s_k, s_{k+1}[ \quad F^{(1)}(\xi_k) = 0.$$

La fonction  $F^{(1)}$  admet au moins  $(n+1)$  zéros distincts, les  $(\xi_k)_{k=1}^{n+1}$ , avec

$$s_0 = x_{\min} < \xi_0 < s_1 < \xi_1 < \dots < s_n < \xi_n < s_{n+1} = x_{\max}.$$

On a donc démontré que  $F^{(1)}$  admet pour zéros les  $(\xi_k)_{k=1}^{n+1}$ , et les  $(x_i)_{i=0}^n$ . Or, par construction, l'ensemble de ces points sont distincts 2 à 2, c'est à dire que  $F^{(1)}$  admet au moins  $(2n+2)$  zéros distincts.

- On peut alors appliquer le Lemme 1.1 de [1] à  $F^{(1)}$  car  $F^{(1)} \in \mathcal{C}^{2n+1}([a; b]; \mathbb{R})$  et à  $(2n+2)$  zéros distincts et donc

$$\exists \xi_x \in ]x_{\min}, x_{\max}[ \quad \text{tel que} \quad F^{(2n+2)}(\xi_x) = 0.$$

d. On a

$$0 = F^{(2n+1)}(\xi_x) = f^{(2n+1)}(\xi_x) - \mathcal{H}_n^{(2n+2)}(\xi_x) - \frac{f(x) - \mathcal{H}_n(x)}{\kappa_n(x)} \kappa_n^{(2n+2)}(\xi_x).$$

Comme  $\mathcal{H}_n \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ , on a  $\mathcal{H}_n^{(2n+2)} = 0$ . De plus  $\kappa_n \in \mathbb{R}_{2n+2}[X]$ , et comme  $\kappa_n(x) = x^{2n+2} + Q(x)$  avec  $Q \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$  (i.e. son monôme de puissance  $2n+2$  à pour coefficient 1) on obtient  $\kappa_n^{(2n+2)}(t) = (2n+2)!$  On en déduit

$$f^{(2n+1)}(\xi_x) = \frac{f(x) - \mathcal{H}_n(x)}{\kappa_n(x)} (2n+2)!$$

ce qui donne (7.1).

Q. 2

Montrer que,  $\forall x \in [a; b]$ , il existe  $\xi_x$  appartenant au plus petit intervalle ouvert contenant  $x, x_0, \dots, x_n$  vérifiant (7.1).

R. 2

- Si,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x \neq x_i$  alors (7.1) a été démontré dans la question précédente.
- Si,  $\exists i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x = x_i$ , alors l'équation (7.1) est immédiate (avec  $\xi_x$  quelconque) car

$$f(x_i) - \mathcal{H}_n(x_i) = 0 \quad \text{et} \quad \kappa_n(x_i) = 0.$$

### EXERCICE 8

Ecrire une fonction algorithmique **Hermite** permettant de calculer  $H_n$  (polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux  $n+1$  triplets  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ ) en  $t \in \mathbb{R}$ .

#### Correction

**But :** Calculer le polynôme  $\mathcal{H}_n(t)$  défini par l'équation (16) de [1]

**Données :**  $\mathbf{X}$  : vecteur/tableau de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $X(i) = x_{i-1} \quad \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$  et  $X(i) \neq X(j)$  pour  $i \neq j$ ,  
 $\mathbf{Y}$  : vecteur/tableau de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $Y(i) = y_{i-1} \quad \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ ,  
 $\mathbf{Z}$  : vecteur/tableau de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $Z(i) = z_{i-1} \quad \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ ,  
 $t$  : un réel.

**Résultat :** pH : le réel pH =  $\mathcal{H}_n(t)$ .

D'après la Définition 1.1 de [1], on a

$$\mathcal{H}_n(t) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(t) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(t) = \sum_{i=0}^n (y_i A_i(t) + z_i B_i(t))$$

avec

$$A_i(t) = (1 - 2L'_i(x_i)(t - x_i))L_i^2(t) \quad \text{et} \quad B_i(t) = (t - x_i)L_i^2(t)$$

où

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - x_j}{x_i - x_j}.$$

Pour rendre effectif le calcul de  $\mathcal{H}_n(t)$ , il reste à déterminer  $L'_i(x_i)$ . On a

$$L'_i(t) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i \\ j \neq k}}^n \frac{t - x_j}{x_i - x_j}$$

d'où

$$L'_i(x_i) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k}. \quad (8.1)$$

La fonction que l'on va écrire use (et certains diront abuse) de fonctions.

---

**Algorithme 2** Fonction **Hermite** permettant de calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite  $\mathcal{H}_n(t)$  défini par (16)

---

```

1: Fonction pH  $\leftarrow$  Hermite(  $X, Y, Z, t$  )
2:   pH  $\leftarrow$  0
3:   Pour  $i \leftarrow 0$  à  $n$  faire
4:     pH  $\leftarrow$  pH + PolyA( $i, X, t$ ) *  $Y(i+1)$  + PolyB( $i, X, t$ ) *  $Z(i+1)$ 
5:   Fin Pour
6: Fin Fonction

```

---

Les différentes fonctions utilisées pour la fonction **Hermite** (directement ou indirectement) sont les suivantes :

**PolyA** : calcul du polynôme  $A_i$  en  $t$ , (données  $i, X, t$ )

**PolyB** : calcul du polynôme  $B_i$  en  $t$ , (données  $i, X, t$ )

**PolyL** : calcul du polynôme  $L_i$  en  $t$ , (données  $i, X, t$ )

**PolyLp** : calcul de  $L'_i(x_i)$ , (données  $i, X$ )

---

**Algorithme 3** Fonction **PolyA** permettant de calculer le polynôme  $A_i$  en  $t \in \mathbb{R}$  donné par  $A_i(t) = (1 - 2L'_i(x_i)(t - x_i))L_i^2(t)$

---

```

1: Fonction  $y \leftarrow$  PolyA(  $i, X, t$  )
2:    $y \leftarrow (1 - 2 * \text{PolyLp}(i, X) * (t - X(i+1))) * (\text{PolyL}(i, X, t))^2$ 
3: Fin Fonction

```

---



---

**Algorithme 5** Fonction **PolyL** permettant de calculer le polynôme  $L_i$  en  $t \in \mathbb{R}$  donné

---

par  $L_i(t) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{t - x_j}{x_i - x_j}$

---

```

1: Fonction  $y \leftarrow$  PolyL(  $i, X, t$  )
2:    $y \leftarrow 1$ 
3:   Pour  $j \leftarrow 0$  à  $n$ , ( $j \sim i$ ) faire
4:      $y \leftarrow y * (t - X(j+1)) / (X(i+1) - X(j+1))$ 
5:   Fin Pour
6: Fin Fonction

```

---



---

**Algorithme 4** Fonction **PolyB** permettant de calculer le polynôme  $B_i$  en  $t \in \mathbb{R}$  donné par  $B_i(t) = (t - x_i)L_i^2(t)$

---

```

1: Fonction  $y \leftarrow$  PolyB(  $i, X, t$  )
2:    $y \leftarrow (t - X(i+1)) * (\text{PolyL}(i, X, t))^2$ 
3: Fin Fonction

```

---



---

**Algorithme 6** Fonction **PolyLp** permettant de calculer  $L'_i(x_i) = \sum_{k=0, k \neq i}^n \frac{1}{x_i - x_k}$

---

```

1: Fonction  $y \leftarrow$  PolyLp(  $i, X$  )
2:    $y \leftarrow 0$ 
3:   Pour  $k \leftarrow 0$  à  $n$ , ( $k \sim i$ ) faire
4:      $y \leftarrow y + 1 / (X(i+1) - X(k+1))$ 
5:   Fin Pour
6: Fin Fonction

```

---

Bien évidemment une telle écriture est loin d'être optimale mais elle a l'avantage d'être facile à programmer et facile à lire car elle "colle" aux formules mathématiques.

On laisse le soin au lecteur d'écrire des fonctions plus performantes...

◇