Exercices associés au cours d'Analyse Numérique I

Interpolation

1 Exercices du cours

EXERCICE 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(n+1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. On note

Q. 1 a. Soit $i \in [0, n]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré n vérifiant

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j \in [0, n]. \quad (1.1)$$

b. Montrer que les $(L_i)_{i \in [0, n]}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n).

On définit le polynôme P_n par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x). \quad (1.2)$$

Q. 2 Montrer que polynôme P_n est l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $P_n(x_i) = y_i, \forall i \in [1, n]$.

EXERCICE 2

Ecrire la fonction **Lagrange** permettant de calculer $\mathcal{P}_n$ (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux $(n+1)$ couples $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$) en $t \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 3

Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $(x_i)_{i=0}^n$ dans I , avec $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, tel que

$$\forall i \in [0, n], \quad f(x_i) = 0.$$

Q. 1 Soit $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$, avec f dérivable sur I . On suppose qu'il existe $(x_i)_{i=0}^n$ dans I , avec $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, tel que

$$\forall i \in [0, n], \quad f(x_i) = 0.$$

Montrer qu'il existe $(\xi_i)_{i=1}^n$ dans I , avec $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \dots < \xi_n < x_n$, tel que

$$\forall i \in [1, n], \quad f^{(1)}(\xi_i) = 0.$$

Q. 2 Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition suivante

$(\mathcal{P}_n)$

Soit $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I; \mathbb{R})$, $f^{(n-1)}$ dérivable sur I . Si f admet au moins $(n+1)$ zéros distincts dans I , notés $x_0 < \dots < x_n$, alors $f^{(n)}$ admet au moins un zéro dans $]x_0, x_n[$.

EXERCICE 4

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$ et $(n+1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$, tels que les $x_i \in [a, b]$ sont distincts deux à deux et $y_i = f(x_i)$.

On note par P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(x_i, y_i)_{i \in [0, n]}$ et π_n le polynôme de degré $(n+1)$ défini par

$$\pi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Q. 1 Soit $x \in [a, b]$ tel que, pour tout $i \in [0, n]$, $x \neq x_i$. On note

$$x_{\min} = \min(x, x_0, \dots, x_n), \quad x_{\max} = \max(x, x_0, \dots, x_n),$$

et

$$F(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t).$$

a. Démontrer que F est définie sur $[a, b]$ et admet $(n+2)$ racines distinctes.

b. Montrer qu'il existe $\xi_x \in]x_{\min}; x_{\max}[$ tel que $F^{(n+1)}(\xi_x) = 0$.

c. En déduire que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \quad (4.1)$$

Q. 2 Montrer que, $\forall x \in [a, b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle ouvert contenant $x, x_0, \dots, x_n$ vérifiant (4.1).

EXERCICE 5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \dots, x_n$ des points distincts de $[a, b]$ ordonnés par ordre croissant. On pose $E \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $F \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_n[X]$, et, on les munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On note $\mathcal{L}_n : E \rightarrow F$ l'application qui à $f \in E$ associe le polynôme d'interpolation de Lagrange $P_n \in F$ tel que $\forall i \in [0, n], P_n(x_i) = f(x_i)$.

Q. 1 a. Montrer que $\mathcal{L}_n$ est bien définie.

b. Montrer que $\mathcal{L}_n$ est linéaire.

c. Montrer que $\mathcal{L}_n$ est continue et que

$$\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq \Lambda_n \|f\|_\infty, \quad (5.1)$$

$$\text{où } \Lambda_n = \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |L_i(x)|.$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires et continues de E dans F muni de la norme

$$\forall \mathcal{H} \in \mathcal{L}(E, F), \quad \|\mathcal{H}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{H}(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

Q. 2 a. Montrer que

$$\|\mathcal{L}_n\| \leq \Lambda_n. \quad (5.2)$$

b. Montrer qu'il existe $\bar{x} \in [a, b]$ vérifiant

$$\Lambda_n = \sum_{i=0}^n |L_i(\bar{x})|.$$

c. Montrer qu'il existe $\bar{f} \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ vérifiant

$$|\mathcal{L}_n(\bar{f})(\bar{x})| = \Lambda_n \|\bar{f}\|_\infty.$$

d. Conclure.

Q. 3 Soit $f \in E$. Montrer que

$$\|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_\infty \quad (5.3)$$

EXERCICE 6

Soient $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [0, n]}$ $n + 1$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté $\mathcal{H}_n$, associé aux $n + 1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [0, n]}$, est défini par

$$\mathcal{H}_n(x_i) = y_i \text{ et } \mathcal{H}'_n(x_i) = z_i, \quad \forall i \in [0, n] \quad (6.1)$$

Q. 1 Quel est a priori le degré de $\mathcal{H}_n$?

On définit le polynôme P_n par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (6.2)$$

avec, pour $i \in [0, n]$, A_i et B_i polynômes de degré au plus $2n + 1$ indépendants des valeurs y_i et z_i .

Q. 2 a. Déterminer des conditions suffisantes sur A_i et B_i pour que P_n vérifie (6.1).

b. En déduire les expressions de A_i et B_i en fonction de L_i et de $L'_i(x_i)$ où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Q. 3 Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus $2n + 1$ défini par (6.1).

EXERCICE 7

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$. et $(x_i)_{i=0}^n$, $(n + 1)$ points distincts de $[a, b]$. On note

$$\forall i \in [0, n], \quad y_i = f(x_i) \text{ et } z_i = f'(x_i).$$

On définit, par $\mathcal{H}_n$, le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux triplets $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in [0, n]}$ et par π_n le polynôme défini par

$$\pi_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^n (t - x_i).$$

Q. 1 Soit $x \in [a, b]$ tel que, pour tout $i \in [0, n]$, $x \neq x_i$. On note

$$x_{\min} = \min(x, x_0, \dots, x_n), \quad x_{\max} = \max(x, x_0, \dots, x_n),$$

et

$$F(t) = f(t) - \mathcal{H}_n(t) - \frac{f(x) - \mathcal{H}_n(x)}{\kappa_n(x)} \kappa_n(t)$$

avec $\kappa_n \stackrel{\text{def}}{=} \pi_n^2$.

a. Démontrer que F est définie sur $[a, b]$ et que $F \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$.

b. Montrer que F' admet $2(n + 1)$ zéros distincts.

c. Montrer qu'il existe $\xi_x \in]x_{\min}; x_{\max}[$ tel que $F^{(2n+2)}(\xi_x) = 0$.

d. En déduire que

$$f(x) - \mathcal{H}_n(x) = \frac{\kappa_n(x)}{(2n + 2)!} f^{(2n+2)}(\xi_x). \quad (7.1)$$

Q. 2 Montrer que, $\forall x \in [a, b]$, il existe ξ_x appartenant au plus petit intervalle ouvert contenant $x, x_0, \dots, x_n$ vérifiant (7.1).

EXERCICE 8

Ecrire une fonction algorithmique **Hermite** permettant de calculer H_n (polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux $n + 1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in [0, n]}$) en $t \in \mathbb{R}$.