Exercices associés au cours d'*Analyse Numérique I*
Résolution de systèmes linéaires
Méthodes directes

Exercice 1 : Résolution système triangulaire supérieur

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.

Q. 1 *Expliquer comment calculer $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, solution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ et expliciter les formules permettant de calculer l'ensemble des composantes de $\boldsymbol{x}$.*

Q. 2 *Ecrire la fonction* ResTriSup *permettant de résoudre le système triangulaire supérieur $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

Exercice 2 : Matrice de permutation

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$, on note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identitée dont on a permuté les lignes i et j.

Q. 1 *Représenter cette matrice et la définir proprement.*

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.On note $\boldsymbol{A}_{r,:}$ le r-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{:,s}$ le s-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$.

Q. 2

a. *Déterminer les lignes de la matrice $\mathbb{D} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.*

b. *Déterminer les colonnes de la matrice $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ en fonction des vecteurs colonnes de $\mathbb{A}$.*

Q. 3

a. *Calculer le déterminant de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*

b. *Déterminer l'inverse de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.*

Exercice 3 : Matrice d'élimination

Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. On note $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c:cccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hdashline -v_2/v_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{3.1}$$

Q. 1

a. *Calculer le déterminant de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.*

b. *Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.*

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. On note $\boldsymbol{A}_{:,j}$ le j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{i,:}$ son i-ème vecteur ligne. On pose $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_{:,1}$.

Q. 2

a. *Calculer $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.*

b. *Montrer que la première colonne de $\tilde{\mathbb{A}}$ est le vecteur $(A_{1,1}, 0, \dots, 0)^t$ i.e.*

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1 \tag{3.2}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Exercice 4 : Méthode de Gauss, écriture algébrique

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Q. 1 *Montrer qu'il existe une matrice $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(\mathbb{G})| = 1$ et $\mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de C^n.*

Q. 2

a. Montrer par récurrence sur l'ordre des matrices que pour toute matrice $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, il existe une matrice $\mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{S}_n| = 1$ et $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$ avec $\mathbb{U}_n$ matrice triangulaire supérieure inversible.

b. Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. En supposant connue la décompostion précédente $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$, expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Q. 3 *Que peut-on dire si $\mathbb{A}$ est non inversible?*

Exercice 5 : Vers la factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre i, notées Δ_i, $i \in [\![1, n]\!]$.
Montrer par récurrence sur l'ordre n de la matrice $\mathbb{A}$ qu'il existe une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice $\mathbb{U}$ définie par

$$\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$$

soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i/(U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 6 : factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 *Montrer que s'il existe $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ alors $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.*

Q. 2 *Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive alors il existe $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$.*

Exercice 7 : factorisation de Cholesky

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 *Montrer que si $\mathbb{A}$ admet une factorisation factorisation régulière de Cholesky alors $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.*

Q. 2 *Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive alors elle admet une factorisation factorisation régulière de Cholesky.*

Q. 3 *On suppose que $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.*

a. Montrer que $\mathbb{A}$ admet une factorisation positive de Cholesky.

b. Montrer que cette factorisation est unique.

Exercice 8 : Propriété de la matrice élémentaire de Householder

Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On note $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{H} = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.$$

Q. 1

a. Montrer que $\mathbb{H}$ est hermitienne.

b. Montrer que $\mathbb{H}$ est unitaire.

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$. On note $\boldsymbol{x}_\parallel = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{x}_\perp = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\parallel$.

Q. 2 *Montrer que*

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel) = \boldsymbol{x}_\perp - \boldsymbol{x}_\parallel.$$

et

$$\mathbb{H}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad \textit{si } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle = 0.$$

Exercice 9

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$. On va chercher $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$, vérifiant

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b}. \tag{9.1}$$

Q. 1 *Montrer que si α et $\boldsymbol{u}$ vérifient (9.1) alors*

a. on a

$$|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2 \tag{9.2}$$

b. on a

$$\boldsymbol{a} - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{b} \tag{9.3}$$

c. on en déduit que

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle|^2 = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{2} \tag{9.4}$$

Nous allons maintenant établir une condition pour que (9.4) ait un sens.

Q. 2 *On suppose que* $\arg \alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle)$ $[\pi]$

a. Montrer que $\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \in \mathbb{R}^{*+}$.

Q. 3 *Soient α et $\boldsymbol{u}$ vérifiant (9.1). En déduire que si $\arg \alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle)$ $[\pi]$ alors $\boldsymbol{u}$ est donné par*

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle}(\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}). \tag{9.5}$$

et $\|u\|_2 = 1$.

Exercice 10

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$.

Q. 1 *Ecrire la fonction algorithmique* Householder *permettant de retourner une matrice de Householder $\mathbb{H}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b}$. Le choix du α est fait par le paramètre δ (0 ou 1) de telle sorte que $\arg \alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) + \delta\pi$ avec $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$.*
Des fonctions comme dot$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *(produit scalaire de deux vecteurs),* norm$(\boldsymbol{a})$ *(norme 2 d'un vecteur),* arg(z) *(argument d'un nombre complexe),* matprod$(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ *(produit de deux matrices),* ctranspose$(\mathbb{A})$ *(adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées*

Q. 2 *Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction* vecrand(n) *retournant un vecteur aléatoire de $\mathbb{C}^n$, les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans $]0, 1[$ (loi uniforme).*

Q. 3 *Proposer un programme permettant de vérifier que $\delta = 1$ est le "meilleur" choix.*

Exercice 11

Soit $n \geqslant 2$.

$(\mathcal{P}_n)$

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que
$$\mathbb{U}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \tag{11.1}$$

Q. 1 *Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.*

Q. 2 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice unitaire $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que*
$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

$(\mathcal{Q}_n)$

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Il existe une matrice orthogonale $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que
$$\mathbb{U}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \tag{11.2}$$

Q. 3 *La proposition $(\mathcal{Q}_n)$ est-elle vérifiée pour tout $n \geqslant 2$? Justifier.*

Q. 4 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

a. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que
$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

b. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficient diagonaux positifs ou nuls telles que
$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

c. On suppose $\mathbb{A}$ inversible. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une unique matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficient diagonaux strictement positifs telles que
$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

Exercice 12

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ la matrice bloc
$$\mathbb{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \end{array}.$$

On note $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ le premier vecteur colonne de $\mathbb{V}$ et on suppose que $\boldsymbol{v}$ est non nul et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^n$ (premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$).

Q. 1 *Expliciter, en fonction de $\boldsymbol{v}$, le vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que*
$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{e}_1^n, \quad \text{avec } \mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.$$

Q. 2 *Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ et $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$. On pose $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hline \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$. Déterminer $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})$ en fonction de $\mathbb{H}(\boldsymbol{x})$ et de $\mathbb{H}(\boldsymbol{y})$.*

Q. 3 *On pose $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}_m \\ \hline \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$.*

a. Déterminer $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$ en fonction de $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$.

b. Que peut-on dire de particulier sur le bloc $(2, 2)$ de $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$?

Exercice 13

Q. 1 *Ecrire une fonction* FactQR *permettant de calculer la factorisation* $\mathbb{QR}$ *d'une matrice* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On pourra utiliser la fonction Householder *Exercice 10.*

Q. 2 *Ecrire un programme permettant de tester cette fonction.*