

Exercices associés au cours d'Analyse Numérique I*

Résolution de systèmes linéaires

Méthodes directes

EXERCICE 1 : Résolution système triangulaire supérieur

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire inversible et $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$.

Q. 1 Expliquer comment calculer $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, solution de $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et expliciter les formules permettant de calculer l'ensemble des composantes de \mathbf{x} .

Q. 2 Ecrire la fonction `ResTriSup` permettant de résoudre le système triangulaire supérieur $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

EXERCICE 2 : Matrice de permutation

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j$, on note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identité dont on a permuté les lignes i et j .

Q. 1 Représenter cette matrice et la définir proprement.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbf{A}_{r,:}$ le r -ème vecteur ligne de \mathbb{A} et $\mathbf{A}_{:,s}$ le s -ème vecteur colonne de \mathbb{A} .

Q. 2

- Déterminer les lignes de la matrice $\mathbb{D} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de \mathbb{A} .
- Déterminer les colonnes de la matrice $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ en fonction des vecteurs colonnes de \mathbb{A} .

Q. 3

- Calculer le déterminant de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.
- Déterminer l'inverse de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

EXERCICE 3 : Matrice d'élimination

Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. On note $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]} = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -v_2/v_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (3.1)$$

Q. 1

- Calculer le déterminant de $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$.
- Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[\mathbf{v}]}$.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. On note $\mathbf{A}_{:,j}$ le j -ème vecteur colonne de \mathbb{A} et $\mathbf{A}_{i,:}$ son i -ème vecteur ligne. On pose $\tilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{A}_{:,1}$.

Q. 2

- Calculer $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{E}^{[\tilde{\mathbf{A}}_1]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de \mathbb{A} .
- Montrer que la première colonne de $\tilde{\mathbb{A}}$ est le vecteur $(A_{1,1}, 0, \dots, 0)^t$ i.e.

$$\mathbb{E}^{[\tilde{\mathbf{A}}_1]}\mathbb{A}\mathbf{e}_1 = A_{1,1}\mathbf{e}_1 \quad (3.2)$$

où \mathbf{e}_1 est le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^n .

EXERCICE 4 : Méthode de Gauss, écriture algébrique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Q. 1 Montrer qu'il existe une matrice $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(G)| = 1$ et $GAe_1 = \alpha e_1$ avec $\alpha \neq 0$ et e_1 premier vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^n .

Q. 2

- Montrer par récurrence sur l'ordre des matrices que pour toute matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, il existe une matrice $S_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det S_n| = 1$ et $S_n A_n = U_n$ avec U_n matrice triangulaire supérieure inversible.
- Soit $b \in \mathbb{C}^n$. En supposant connue la décomposition précédente $S_n A_n = U_n$, expliquer comment résoudre le système $A_n x = b$.

Q. 3 Que peut-on dire si A est non inversible?

EXERCICE 5 : Vers la factorisation LU

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre i , notées Δ_i , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Montrer par récurrence sur l'ordre n de la matrice A qu'il existe une matrice $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice U définie par

$$U = EA$$

soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i / (U_{1,1} \times \dots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

EXERCICE 6 : factorisation LDL*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 Montrer que s'il existe $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $A = LDL^*$ alors A est hermitienne définie positive.

Q. 2 Montrer que si A est hermitienne définie positive alors il existe $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $A = LDL^*$.

EXERCICE 7 : factorisation de Cholesky

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 Montrer que si A admet une factorisation régulière de Cholesky alors A est hermitienne définie positive.

Q. 2 Montrer que si A est hermitienne définie positive alors elle admet une factorisation régulière de Cholesky.

Q. 3 On suppose que A est hermitienne définie positive.

- Montrer que A admet une factorisation positive de Cholesky.
- Montrer que cette factorisation est unique.

EXERCICE 8 : Propriété de la matrice élémentaire de Householder

Soit $u \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|u\|_2 = 1$. On note $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$H = I - 2uu^*.$$

Q. 1

- Montrer que H est hermitienne.
- Montrer que H est unitaire.

Soit $x \in \mathbb{K}^n$. On note $x_{\parallel} = \text{proj}_u(x) \stackrel{\text{def}}{=} \langle u, x \rangle u$ et $x_{\perp} = x - x_{\parallel}$.

Q. 2 Montrer que

$$\mathbb{H}(\mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel) = \mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}_\parallel.$$

et

$$\mathbb{H}\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \text{si } \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = 0.$$

EXERCICE 9

Soient \mathbf{a} et \mathbf{b} deux vecteurs non nuls et non colinéaires de \mathbb{C}^n avec $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$. On va chercher $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$, vérifiant

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}. \quad (9.1)$$

Q. 1 Montrer que si α et \mathbf{u} vérifient (9.1) alors

a. on a

$$|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2 \quad (9.2)$$

b. on a

$$\mathbf{a} - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{u} = \alpha\mathbf{b} \quad (9.3)$$

c. on en déduit que

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle|^2 = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{2} \quad (9.4)$$

Nous allons maintenant établir une condition pour que (9.4) ait un sens.

Q. 2 On suppose que $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) [\pi]$

a. Montrer que $\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}^{*+}$.

Q. 3 Soient α et \mathbf{u} vérifiant (9.1). En déduire que si $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) [\pi]$ alors \mathbf{u} est donné par

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle} (\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}). \quad (9.5)$$

et $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$.

EXERCICE 10

Soient \mathbf{a} et \mathbf{b} deux vecteurs de \mathbb{C}^n avec $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$.

Q. 1 Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2$ et $\arg(\alpha) = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \delta\pi$ avec $\delta \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$.

a. On suppose que $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, (i.e. \mathbf{a} et \mathbf{b} colinéaires). Exprimer $\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}$ en fonction de λ et \mathbf{b} .

b. Que peut-on dire si \mathbf{a} est nul?

Q. 2 Ecrire la fonction algorithmique **Householder** de paramètres \mathbf{a} , \mathbf{b} et $\delta \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$ retournant une matrice $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\alpha \in \mathbb{C}$ telles que

- si $\mathbf{a} - \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} = 0$ (i.e. \mathbf{a} nul ou colinéaire à \mathbf{b}) alors \mathbb{S} est la matrice identité et $\alpha = 0$,
- sinon α est le nombre complexe défini en Q. 1 (dépendant de δ) et \mathbb{S} est la matrice élémentaire de Householder

$$\mathbb{S} = \mathbb{H} \left(\frac{\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}\|_2} \right)$$

telle que $\mathbb{S}\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$.

Des fonctions comme **dot**(\mathbf{a}, \mathbf{b}) (produit scalaire de deux vecteurs), **norm**(\mathbf{a}) (norme 2 d'un vecteur), **arg**(z) (argument d'un nombre complexe), **eye**(n) (matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), **matprod**(\mathbb{A}, \mathbb{B}) (produit de deux matrices), **ctranspose**(\mathbb{A}) (adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées

Q. 3 Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction `vecrand(n)` retournant un vecteur aléatoire de \mathbb{C}^n , les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans $]0, 1[$ (loi uniforme).

Q. 4 Proposer un programme permettant de vérifier que $\delta = 1$ est le "meilleur" choix.

EXERCICE 11

Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$ non nul et non colinéaire à \mathbf{e}_1 , premier vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^n .
Montrer qu'il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$

$$\Re(\mathbf{u})\mathbf{a} = -\|\mathbf{a}\|_2 e^{i \arg(a_1)} \mathbf{e}_1. \quad (11.1)$$

EXERCICE 12

Soit $n \geq 2$.

(P_n)
Soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Il existe une matrice unitaire $U_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $R_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$U_n A_n = R_n. \quad (12.1)$$

Q. 1 Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, (P_n)$ est vraie.

Q. 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une matrice unitaire $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A = QR.$$

(Q_n)
Soit $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Il existe une matrice orthogonale $U_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $R_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$U_n A_n = R_n. \quad (12.2)$$

Q. 3 La proposition (Q_n) est-elle vérifiée pour tout $n \geq 2$? Justifier.

Q. 4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = QR.$$

- Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficient diagonaux positifs ou nuls telles que

$$A = QR.$$

- On suppose A inversible. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une unique matrice triangulaire supérieure $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficient diagonaux strictement positifs telles que

$$A = QR.$$

EXERCICE 13

Soit $A \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ la matrice bloc

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} U & F \\ \hline E & V \end{array} \right) \end{matrix}.$$

On note $\mathbf{v} = \mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ le premier vecteur colonne de \mathbb{V} et on suppose que \mathbf{v} est non nul et non colinéaire à \mathbf{e}_1^n (premier vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^n).

Q. 1 Expliciter, en fonction de \mathbf{v} , le vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$, tel que

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{v} = \alpha \mathbf{e}_1^n, \quad \text{avec } \mathbb{H}(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*.$$

Q. 2 Soient $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$. On pose $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$. Déterminer $\mathbb{H}(\mathbf{w})$ en fonction de $\mathbb{H}(\mathbf{x})$ et de $\mathbb{H}(\mathbf{y})$.

Q. 3 On pose $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$.

- Déterminer $\mathbb{H}(\mathbf{w})\mathbb{A}$ en fonction de $\mathbb{H}(\mathbf{u})$.
- Que peut-on dire de particulier sur le bloc (2, 2) de $\mathbb{H}(\mathbf{w})\mathbb{A}$?

EXERCICE 14

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 Expliquer comment construire une matrice $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, produit d'au plus $n - 1$ matrices élémentaires de Householder, et, $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire supérieure telles $\mathbb{H}\mathbb{A} = \mathbb{R}$.

Q. 2 Ecrire une fonction **FactQR** permettant de calculer la factorisation QR d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pourra utiliser la fonction **Householder** Exercice ??.

Q. 3 Ecrire un programme permettant de tester cette fonction. On dispose des fonctions:

- MatRand**(m, n) retournant une matrice aléatoire de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ chacune des parties imaginaires et réelles de ses éléments étant une variable aléatoire suivant la loi uniforme $[0, 1]$.
- NormInf**(\mathbb{A}) retournant la norme infinie d'une matrice carrée \mathbb{A} .