Exercices associés au cours d'*Analyse Numérique I*
Résolution de systèmes linéaires
Méthodes itératives

1 Exercices du cours

Exercice 1

Soit $\mathbb{A}$ une matrice inversible décomposée sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ avec $\mathbb{M}$ inversible. On pose

$$\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{c} = \mathbb{M}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Montrer que la suite définie par

$$\boldsymbol{x}^{[0]} \in \mathbb{K}^n \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c}$$

converge vers $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ quelque soit $\boldsymbol{x}^{[0]}$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

Exercice 2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible décomposée en $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ où $\mathbb{M}$ est inversible. On note $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$.

Q. 1 *Montrer que la matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne.*

On suppose maintenant que $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est définie positive.

Q. 2 *Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$ et $\boldsymbol{y} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}$.*

a. Montrer que

$$\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \mathbb{A}\boldsymbol{y}\rangle = \left\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle + \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle - \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle \tag{2.1}$$

et

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}. \tag{2.2}$$

b. En déduire que

$$\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \mathbb{A}\boldsymbol{y}\rangle = \langle (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\rangle. \tag{2.3}$$

Q. 3 *Montrer que si $\mathbb{A}$ est définie positive alors $\rho(\mathbb{B}) < 1$.*

On suppose $\rho(\mathbb{B}) < 1$ et on va démontrer, par l'absurde, que $\mathbb{A}$ est définie positive.

Q. 4 *On suppose qu'il existe $\boldsymbol{x}^{[0]} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ tel que $\alpha_0 \overset{\text{def}}{=} \left\langle \boldsymbol{x}^{[0]}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}^{[0]}\right\rangle \in \mathbb{C}\backslash]0, +\infty[$. On défini alors les suites*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \boldsymbol{x}^{[k]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k-1]} \quad et \quad \alpha_k = \left\langle \boldsymbol{x}^{[k]}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}^{[k]}\right\rangle.$$

a. Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}^{[k]} = 0 \quad et \quad \lim_{k\to+\infty} \alpha_k = 0.$$

b. Montrer que $\alpha_0 \in]-\infty, 0]$.

c. Démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que

$$(\mathcal{P}_k)\ :\ \boldsymbol{x}^{[k]} \neq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k-1]} \neq \boldsymbol{0}, \quad et \quad 0 \geqslant \alpha_{k-1} > \alpha_k.$$

d. Conclure.

Exercice 3

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $\mathrm{A}_{i,j}$ la composante (i,j) de la matrice $\mathbb{A}$. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.
La méthode S.O.R. (successive over relaxation) est donnée par

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{\mathrm{A}_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k]}\right) + (1-w)x_i^{[k]}, \qquad \forall i \in [\![1, n]\!]$$

Q. 1 *Déterminer la matrice d'itération $\mathbb{B}$ et le vecteur $\boldsymbol{c}$ tels que*

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c}$$

en fonction de $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, et $\boldsymbol{b}$.

Exercice 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $\mathrm{A}_{i,j}$ la composante (i,j) de la matrice $\mathbb{A}$. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.
La matrice d'itération de la méthode S.O.R., notée $\mathcal{L}_w$, est donnée par

$$\mathcal{L}_w = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}\right). \tag{4.1}$$

On pose $\mathbb{L} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}$ et $\mathbb{U} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}$.

Q. 1 *Montrer que*

$$\mathcal{L}_w = (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1}\left((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}\right).$$

Q. 2 *En déduire que*

$$\rho(\mathcal{L}_w) \geqslant |w-1|. \tag{4.2}$$

Exercice 5

On note $\mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice tridiagonale

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Q. 1 *Soit $\mu \in \mathbb{C}^*$. On note $\mathbb{Q}(\mu) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice diagonale de diagonale $(\mu, \mu^2, \ldots, \mu^n)$.*

a. Expliciter la matrice $\mathbb{T}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\mu)\mathbb{T}\mathbb{Q}^{-1}(\mu)$ en fonction des coefficients tridiagonaux de la matrice $\mathbb{T}$ et de μ.

b. Déterminer $\det(\mathbb{T}(\mu))$ *en fonction de* $\det(\mathbb{T})$.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $\mathrm{A}_{i,j}$ la composante (i,j) de la matrice $\mathbb{A}$. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.
On note respectivement $\mathbb{J} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E} + \mathbb{F})$ et $\mathcal{L}_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}$ les matrices d'itérations des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.
Soit $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ par la méthode de Gauss-Seidel ou par la méthode de Jacobi.

On suppose dans la suite que la matrice inversible $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \nu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \nu_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

et que ses éléments diagonaux sont non nuls.

Q. 2

a. Montrer que les valeurs propres de $\mathbb{J}$ sont les racines du polynôme

$$q_{\mathbb{J}}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}).$$

b. En utilisant la question 1, montrer que $q_{\mathbb{J}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F})$.

c. En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $\mathbb{J}$ alors $-\lambda$ l'est aussi.

Q. 3

a. Montrer que les valeurs propres de $\mathcal{L}_1$ sont les racines du polynôme

$$q_{\mathcal{L}_1}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \mathbb{F}).$$

b. En déduire que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad q_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2) = \lambda^n q_{\mathbb{J}}(\lambda). \tag{5.3}$$

Q. 4

a. Comparer les valeurs propres de $\mathbb{J}$ à celles de $\mathcal{L}_1$.

b. Une des deux méthodes est-elle à privilégier dans ce cas?

2 Exercice supplémentaire

Exercice 6

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.

Q. 1

Montrer les résultats suivant:

a. tous les éléments diagonaux de $\mathbb{A}$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$.

b. toutes les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$.

c. $\mathbb{A}$ est inversible.

On note $\underline{\boldsymbol{x}}$ la solution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ et on décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$ où $\mathbb{D} = \operatorname{diag}(\mathbb{A})$ est la matrice diagonale telle que, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $D_{i,i} = A_{i,i}$, $\mathbb{E}$ est triangulaire inférieure d'éléments diagonaux nuls, et, $\mathbb{F}$ est triangulaire supérieure d'éléments diagonaux nuls.
On va étudier une méthode itérative pour la résolution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
Soit $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ donné. On définit la suite $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$(\mathbb{D} - \mathbb{E})\boldsymbol{x}_{k+1/2} = \mathbb{F}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{b} \tag{6.1}$$
$$(\mathbb{D} - \mathbb{F})\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbb{E}\boldsymbol{x}_{k+1/2} + \boldsymbol{b} \tag{6.2}$$

Q. 2

a. Démontrer, en justifiant toutes les opérations utilisées, que le vecteur $\boldsymbol{x}_{k+1}$ *peut s'écrire sous la forme*

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{c} \tag{6.3}$$

en déterminant le vecteur $\boldsymbol{c}$ *et en montrant que*

$$\mathbb{B} = (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}.$$

b. Montrer que

$$\boldsymbol{x}_{k+1} - \underline{\boldsymbol{x}} = \mathbb{B}(\boldsymbol{x}_k - \underline{\boldsymbol{x}}).$$

c. Montrer que

$$\mathbb{D}^{-1} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}. \tag{6.4}$$

Soit $(\lambda, \boldsymbol{p})$ un élément propre de la matrice $\mathbb{B}$.

Q. 3

a. Montrer que

$$\lambda\mathbb{A}\boldsymbol{p} + (\lambda - 1)\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p} = 0. \tag{6.5}$$

b. En déduire que

$$\lambda = \frac{\langle \mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\rangle}{\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{A}\boldsymbol{p}\rangle + \langle \mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\rangle} \in [0, 1[. \tag{6.6}$$

c. En déduire la convergence $\boldsymbol{x}_k$ *vers* $\underline{\boldsymbol{x}}$.

Q. 4

a. Ecrire une fonction algorithmique $[\mathbb{D}, \mathbb{E}, \mathbb{F}] \leftarrow$ Decomp$(\mathbb{A})$ *retournant la décomposition de la matrice* $\mathbb{A}$ *en* $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$.

b. Ecrire une fonction algorithmique RSLiter *utilisant* (6.1)-(6.2) *pour approcher la solution du système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. *Pour celà on pourra utiliser les fonctions*

- $\boldsymbol{x} \leftarrow$ RSLtriinf$(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$ *retourne la solution du système* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *où* $\mathbb{A}$ *est une matrice triangulaire inférieure inversible,*
- $\boldsymbol{x} \leftarrow$ RSLtrisup$(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$ *retourne la solution du système* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *où* $\mathbb{A}$ *est une matrice triangulaire supérieure inversible.*

En aucun cas, il ne faudra utiliser les matrices inverses...