Exercices associés au cours d'*Analyse Numérique I*
Résolution de systèmes linéaires
Méthodes directes

Références

[1] F. Cuvelier, *Analyse numérique I, rappels analyse et algèbre linéaire, résumé.* fichier pdf, `https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/24-25/rappels_print-2by1.pdf`.

[2] ———, *Analyse numérique I, résolution de systèmes linéaires, méthodes directes, résumé.* fichier pdf, `https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/24-25/resume_RSLdirecte_print-2by1.pdf`.

Exercice 1 : Résolution système triangulaire supérieur

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.

Q. 1 *Expliquer comment calculer $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, solution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ et expliciter les formules permettant de calculer l'ensemble des composantes de $\boldsymbol{x}$.*

Q. 2 *Ecrire la fonction* ResTriSup *permettant de résoudre le système triangulaire supérieur $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

Correction

R. 1 On veut résoudre le système linéaire

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & \dots & A_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On remarque que l'on peut calculer successivement $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$, car il est possible de calculer x_i si on connait $x_{i+1}, \dots, x_n$: c'est la **méthode de remontée**. En effet, on a

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i = b_i,$$

et donc, par définition d'un produit matrice-vecteur,

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_j = b_i.$$

Comme $\mathbb{A}$ est une matrice triangulaire supérieure, on a (voir Définition 2.33 dans [1])

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \ i > j, \quad A_{i,j} = 0.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1, n]\!], \quad b_i &= \sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,j}}_{=0} x_j + A_{i,i} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j} x_j \\ &= A_{i,i} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j} x_j. \end{aligned} \tag{R1.1}$$

R. 2

Algorithme 1 $\mathcal{R}_0$

Résoudre $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en calculant successivement $x_n,\ x_{n-1},\ \ldots, x_1$.

Algorithme 1 $\mathcal{R}_1$

Pour $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire(pas de** -1)
  calculer x_i connaissant $x_{i+1}, \ldots, x_n$ à l'aide de l'équation (R1.1)
Fin Pour

Algorithme 1 $\mathcal{R}_1$

Pour $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire(pas de** -1)
  Calculer x_i connaissant $x_{i+1}, \ldots, x_n$ à l'aide de l'équation (R1.1)
Fin Pour

Algorithme 1 $\mathcal{R}_2$

Pour $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire(pas de** -1)
  $S \leftarrow \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j} x_j$
  $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
Fin Pour

Algorithme 1 $\mathcal{R}_2$

Pour $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire(pas de** -1)
  $S \leftarrow \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j} x_j$
  $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
Fin Pour

Algorithme 1 $\mathcal{R}_3$

Pour $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire(pas de** -1)
  $S \leftarrow 0$
  Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**
    $S \leftarrow S + A(i,j) * x(j)$
  Fin Pour
  $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
Fin Pour

On obtient alors l'algorithme final

Algorithme 1 Fonction ResTriSup permettant de résoudre le système linéaire triangulaire supérieur inversible $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ supérieure inversible.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Fonction $\boldsymbol{x} \leftarrow$ ResTriSup($\mathbb{A}, \boldsymbol{b}$)
  Pour $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire(pas de** -1)
    $S \leftarrow 0$
    Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**
      $S \leftarrow S + A(i,j) * x(j)$
    Fin Pour
    $x(i) \leftarrow (b(i) - S)/A(i,i)$
  Fin Pour
Fin Fonction

◇

Exercice 2 : Matrice de permutation

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$, on note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identitée dont on a permuté les lignes i et j.

Q. 1 *Représenter cette matrice et la définir proprement.*

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.On note $\boldsymbol{A}_{r,:}$ le r-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{:,s}$ le s-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$.

Q. 2

a. Déterminer les lignes de la matrice $\mathbb{D} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ en fonction des vecteurs lignes de $\mathbb{A}$.

b. Déterminer les colonnes de la matrice $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ en fonction des vecteurs colonnes de $\mathbb{A}$.

Q. 3

a. *Calculer le déterminant de* $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

b. *Déterminer l'inverse de* $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

Correction

R. 1

On note, dans toute la correction, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.
On peut définir cette matrice par ligne,

$$\begin{cases} \forall r \in [\![1,n]\!] \backslash \{i,j\}, & P_{r,s} & = & \delta_{r,s}, & \forall s \in [\![1,n]\!], \\ & P_{i,s} & = & \delta_{j,s}, & \forall s \in [\![1,n]\!], \\ & P_{j,s} & = & \delta_{i,s}, & \forall s \in [\![1,n]\!]. \end{cases}$$

ou par colonne

$$\begin{cases} \forall s \in [\![1,n]\!] \backslash \{i,j\}, & P_{r,s} & = & \delta_{r,s}, & \forall r \in [\![1,n]\!], \\ & P_{r,i} & = & \delta_{r,j}, & \forall r \in [\![1,n]\!], \\ & P_{r,j} & = & \delta_{r,i}, & \forall r \in [\![1,n]\!]. \end{cases}$$

Ne pas utiliser les indices i et j qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

On peut noter que la matrice $\mathbb{P}$ est symétrique. Pour la représentation, on suppose $i < j$. On effectue une représentation bloc 5×5 avec des blocs diagonaux carrés sachant que tous les blocs non décrits sont nuls:

$$\mathbb{P} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \scriptstyle i-1 & i & \scriptstyle j-i-1 & j & \scriptstyle n-j \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbb{I} & & & & \\ \hline & 0 & & 1 & \\ \hline & & \mathbb{I} & & \\ \hline & 1 & & 0 & \\ \hline & & & & \mathbb{I} \end{array}\right) & \begin{array}{c} \scriptstyle i-1 \\ i \\ \scriptstyle j-i-1 \\ j \\ \scriptstyle n-j \end{array} \end{array}$$

R. 2

a. On note $\mathbb{D} = \mathbb{P}\mathbb{A}$. Par définition du produit matriciel on a

$$D_{r,s} = \sum_{k=1}^{n} P_{r,k} A_{k,s}.$$

On obtient, $\forall s \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{cases} D_{r,s} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{r,k} A_{k,s} = A_{r,s}, \quad \forall r \in [\![1,n]\!] \backslash \{i,j\}, \\ D_{i,s} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{j,k} A_{k,s} = A_{j,s}, \\ D_{j,s} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k} A_{k,s} = A_{i,s}. \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \boldsymbol{D}_{r,:} & = & \boldsymbol{A}_{r,:}, & \forall r \in [\![1,n]\!] \backslash \{i,j\}, \\ \boldsymbol{D}_{i,:} & = & \boldsymbol{A}_{j,:}, & \\ \boldsymbol{D}_{j,:} & = & \boldsymbol{A}_{i,:}. & \end{cases}$$

Note: La notation $\boldsymbol{D}_{i,:}$ correspond au vecteur ligne $(D_{i,1},\ldots,D_{i,n})$ et $\boldsymbol{D}_{:,j}$ correspond au vecteur colonne $\begin{pmatrix} D_{1,j} \\ \vdots \\ D_{n,j} \end{pmatrix}$

b. On note $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}$. Par définition du produit matriciel et par symétrie de $\mathbb{P}$ on a

$$E_{r,s} = \sum_{k=1}^{n} A_{r,k}P_{k,s} = \sum_{k=1}^{n} A_{r,k}P_{s,k}.$$

⚠ Ne pas utiliser les indices i et j qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

On obtient en raisonnant par colonne, $\forall r \in [\![1,n]\!]$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} E_{r,s} & = & \sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{s,k} = A_{r,s}, \quad \forall s \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\}, \\ E_{r,i} & = & \sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{j,k} = A_{r,j}, \\ E_{r,j} & = & \sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{i,k} = A_{r,i}. \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{E}_{:,s} & = & \boldsymbol{A}_{:,s}, \quad \forall s \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\}, \\ \boldsymbol{E}_{:,i} & = & \boldsymbol{A}_{:,j}, \\ \boldsymbol{E}_{:,j} & = & \boldsymbol{A}_{:,i}. \end{array}\right.$$

R. 3

a. $\det(\mathbb{P}) = -1$, si $i \neq j$ et $\det(\mathbb{P}) = 1$ sinon.

b. Immédiat par calcul direct on a $\mathbb{P}\mathbb{P} = \mathbb{I}$ et donc la matrice $\mathbb{P}$ est inversible et $\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}$.

◇

Exercice 3 : Matrice d'élimination

Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. On note $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c:cccc} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \hdashline -v_2/v_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{3.1}$$

Q. 1

a. *Calculer le déterminant de* $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.

b. *Déterminer l'inverse de* $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. On note $\boldsymbol{A}_{:,j}$ le j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{i,:}$ son i-ème vecteur ligne. On pose $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_{:,1}$.

Q. 2

a. *Calculer* $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}$ *en fonction des vecteurs lignes de* $\mathbb{A}$.

b. *Montrer que la première colonne de* $\tilde{\mathbb{A}}$ *est le vecteur* $(A_{1,1}, 0, \ldots, 0)^{\boldsymbol{t}}$ *i.e.*

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1 \tag{3.2}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ *est le premier vecteur de la base canonique de* $\mathbb{C}^n$.

Correction

R. 1

a. La matrice $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$ est triangulaire : son déterminant est donc le produit de ses éléments diagonaux (Proposition 2.35 de [1]) On a alors $\det(\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}) = 1$.

b. Pour calculer son inverse qui existe puisque $\det(\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}) \neq 0$, on écrit $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$ sous forme bloc :

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array}\right)$$

avec $\boldsymbol{e} = (-v_2/v_1, \dots, -v_n/v_1)^{\mathsf{t}} \in \mathbb{C}^{n-1}$ On note $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son inverse qui s'écrit avec la même structure bloc

$$\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hline \boldsymbol{c} & \mathbb{D} \end{array}\right)$$

avec $a \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.
La matrice $\mathbb{X}$ est donc solution de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} = \mathbb{I}$. Grace à l'écriture bloc des matrices on en déduit rapidement la matrice $\mathbb{X}$. En effet, en utilisant les produits blocs des matrices, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{0}_{n-1}^{\mathsf{t}} \\ \hline \boldsymbol{e} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hline \boldsymbol{c} & \mathbb{D} \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{c|c} 1 \times a & 1 \times \boldsymbol{b}^* + \boldsymbol{0}_{n-1}^{\mathsf{t}} \times \mathbb{D} \\ \hline \boldsymbol{e} \times a + \mathbb{I}_{n-1} \times \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{b}^* + \mathbb{I}_{n-1} \times \mathbb{D} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hline a\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} \end{array}\right) \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{X}$ est l'inverse de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$, on a $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} = \mathbb{I}$ et donc en écriture bloc

$$\left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hline a\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \boldsymbol{0}_{n-1}^{\mathsf{t}} \\ \hline \boldsymbol{0}_{n-1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array}\right).$$

Ceci revient à résoudre les 4 équations

$$a = 1, \quad \boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{0}_{n-1}^{\mathsf{t}}, \quad a\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}_{n-1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$$

qui donnent immédiatement $a = 1$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}_{n-1}$, $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{e}$ et $\mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$. On obtient le résultat suivant

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline -\boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array}\right) = \mathbb{I}_n.$$

R. 2

a. Pour simplifier les notations, on note $\mathbb{E} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}$. Par définition du produit de deux matrices on a

$$\tilde{A}_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} E_{i,k}A_{k,j}, \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2.$$

Quand $i = 1$, on a par construction $E_{1,k} = \delta_{1,k}$ et donc

$$\tilde{A}_{1,j} = A_{1,j}, \ \forall j \in [\![1,n]\!] \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{A}}_{1,:} = \boldsymbol{A}_{1,:}. \tag{R3.2}$$

Pour $i \geqslant 2$, on a $E_{i,1} = -\frac{v_i}{v_1}$ et $E_{i,k} = \delta_{i,k}$, $\forall k \in [\![2,n]\!]$. On obtient alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$

$$\tilde{A}_{i,j} = E_{i,1}A_{1,j} + \sum_{k=2}^{n} E_{i,k}A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1}A_{1,j} + \sum_{k=2}^{n} \delta_{i,k}A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1}A_{1,j} + A_{i,j}$$

ce qui donne pour tout $i \in [\![2, n]\!]$

$$\tilde{A}_{i,j} = A_{i,j} - \frac{v_i}{v_1} A_{1,j}, \ \forall j \in [\![1, n]\!] \iff \tilde{\boldsymbol{A}}_{i,:} = -\frac{v_i}{v_1} \boldsymbol{A}_{1,:} + \boldsymbol{A}_{i,:} \tag{R3.3}$$

En conclusion, la matrice $\tilde{\mathbb{A}}$ s'écrit

$$\tilde{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{1,:} \\ \hdashline \boldsymbol{A}_{2,:} - (v_2/v_1)\boldsymbol{A}_{1,:} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \boldsymbol{A}_{n,:} - (v_n/v_1)\boldsymbol{A}_{1,:} \end{pmatrix}$$

b. De (R3.2), on tire $\tilde{A}_{1,1} = A_{1,1}$. A partir de (R3.3) on obtient pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\tilde{A}_{i,1} = A_{i,1} - \frac{v_i}{v_1} A_{1,1}$. Par construction $v_j = A_{j,1}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, ce qui donne $\tilde{A}_{i,1} = 0$.
La première colonne de $\tilde{\mathbb{A}}$ est $(1, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{t}}$.

◇

Exercice 4 : Méthode de Gauss, écriture algébrique

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Q. 1 *Montrer qu'il existe une matrice $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(\mathbb{G})| = 1$ et $\mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de C^n.*

Q. 2

a. *Montrer par récurrence sur l'ordre des matrices que pour toute matrice $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, il existe une matrice $\mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{S}_n| = 1$ et $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$ avec $\mathbb{U}_n$ matrice triangulaire supérieure inversible.*

b. *Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. En supposant connue la décompostion précédente $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$, expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

Q. 3 *Que peut-on dire si $\mathbb{A}$ est non inversible?*

Correction

R. 1 D'après le Lemme 2.2 de [2], si $A_{1,1} \neq 0$, le résultat est immédiat.
Dans l'énoncé rien ne vient corroborer cette hypothèse. Toutefois, comme la matrice $\mathbb{A}$ est inversible, il existe au moins un $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $A_{p,1} \neq 0$. On peut même choisir le premier indice p tel que $|A_{p,1}| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |A_{i,1}| > 0$ (pivot de l'algorithme de Gauss-Jordan). On note $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[1,p]}$ la matrice de permutation des lignes 1 et p (voir Lemme 2.1 de [2]).

$$|\det \mathbb{P}| = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}.$$

Par construction $(\mathbb{P}\mathbb{A})_{1,1} = A_{p,1} \neq 0$, et on peut alors appliquer le Lemme 2.2 de [2] à la matrice $(\mathbb{P}\mathbb{A})$ pour obtenir l'existence d'une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\det \mathbb{E} = 1$ et telle que

$$\mathbb{E}(\mathbb{P}\mathbb{A})\boldsymbol{e}_1 = A_{p,1}\boldsymbol{e}_1.$$

En posant $\mathbb{G} = \mathbb{E}\mathbb{P}$ et $\alpha = A_{p,1}$, on obtient bien $\mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$. De plus, on a

$$|\det \mathbb{G}| = |\det(\mathbb{E}\mathbb{P})| = |\det \mathbb{E} \times \det \mathbb{P}| = 1.$$

Remarque. *La matrice $\mathbb{G}$ étant inversible, on a*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \mathbb{G}\boldsymbol{b}$$

ce qui correspond à la première permutation/élimination de l'algorithme de Gauss-Jordan.

R. 2

a. On veut démontrer, par récurrence sur $n \geqslant 2$, la propriété suivante

$(\mathcal{P}_n)$

> $\forall \mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, $\exists \mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $|\det \mathbb{S}_n| = 1$, tel que la matrice $\mathbb{U}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{S}_n\mathbb{A}$ soit une triangulaire supérieure inversible.

Initialisation : Pour $n = 2$. Soit $\mathbb{A}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible. En utilisant la question précédente il existe $\mathbb{G}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{G}_2| = 1$ et $\mathbb{G}_2\mathbb{A}_2\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note $\mathbb{U}_2 = \mathbb{G}_2\mathbb{A}_2$. Cette matrice s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{U}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \bullet \\ 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

et elle est triangulaire supérieure. Les matrices $\mathbb{G}_2$ et $\mathbb{A}_2$ étant inversible, leur produit $\mathbb{U}_2$ l'est aussi. La proposition $(\mathcal{P}_2)$ est donc vérifiée avec $\mathbb{S}_2 = \mathbb{G}_2$.

Hérédité : Soit $n \geqslant 3$. On suppose que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vraie. Montrons que $(\mathcal{P}_n)$ est vérifiée.
Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible. En utilisant la question précédente il existe $\mathbb{G}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{G}_n| = 1$ et $\mathbb{G}_n\mathbb{A}_n\boldsymbol{e}_1 = \alpha_n\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha_n \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On note $\mathbb{V}_n = \mathbb{G}_n\mathbb{A}_n$. Cette matrice s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{V}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_n & \bullet & \dots & \bullet \\ \hdashline 0 & \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \dots & \bullet \end{array}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hdashline 0 & \\ \vdots & \mathbb{B}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right)$$

où $\boldsymbol{c}_{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $\mathbb{B}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Comme $\mathbb{G}_n$ et $\mathbb{A}_n$ sont inversibles, $\mathbb{V}_n$ l'est aussi. On en déduit donc que $\mathbb{B}_{n-1}$ est inversible car $0 \neq \det \mathbb{V}_n = \alpha_n \times \det \mathbb{B}_{n-1}$ et $\alpha_n \neq 0$.
On peut donc utiliser la propriété $(\mathcal{P}_{n-1})$ (hyp. de récurrence) sur la matrice $\mathbb{B}_{n-1}$: il existe donc $\mathbb{S}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, avec $|\det \mathbb{S}_{n-1}| = 1$, tel que la matrice $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{S}_{n-1}\mathbb{B}_{n-1}$ soit une triangulaire supérieure inversible.
Soit $\mathbb{Q}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{Q}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{S}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_n\mathbb{G}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{Q}_n\mathbb{V}_n &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{S}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hdashline 0 & \\ \vdots & \mathbb{B}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hdashline 0 & \\ \vdots & \mathbb{S}_{n-1}\mathbb{B}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hdashline 0 & \\ \vdots & \mathbb{U}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{U}_n \end{aligned}$$

La matrice $\mathbb{U}_n$ est triangulaire supérieure inversible car $\mathbb{U}_{n-1}$ l'est aussi et $\alpha_n \neq 0$.
On pose $\mathbb{S}_n = \mathbb{Q}_n\mathbb{G}_n$. On a donc

$$\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n.$$

De plus, comme on a $\det \mathbb{S}_n = \det \mathbb{Q}_n \times \det \mathbb{G}_n$, et $\det \mathbb{Q}_n = \det \mathbb{S}_{n-1}$, on obtient, en utilisant $|\det \mathbb{G}_n| = 1$ et l'hypothèse de récurrence $|\det \mathbb{S}_{n-1}| = 1$, que

$$|\det \mathbb{S}_n| = 1.$$

Ceci prouve la véracité de la proposition $(\mathcal{P}_n)$.

b. Comme $\mathbb{S}_n$ est inversible, on a en multipliant à gauche le système par $\mathbb{S}_n$

$$\mathbb{A}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{S}_n\mathbb{A}_n\boldsymbol{x} = \mathbb{S}_n\boldsymbol{b} \iff \mathbb{U}_n\boldsymbol{x} = \mathbb{S}_n\boldsymbol{b}$$

Pour déterminer le vecteur $\boldsymbol{x}$, on peut alors résoudre le dernier système par l'algorithme de remontée.

R. 3 Si $\mathbb{A}$ est non inversible, alors dans la première question nous ne sommes pas assurés d'avoir $\alpha \neq 0$. Cependant l'existence de la matrice $\mathbb{G}$ reste avérée.
Pour la deuxième question, le seul changement vient du fait que la matrice $\mathbb{U}_n$ n'est plus inversible.

◇

Exercice 5 : Vers la factorisation $\mathbb{LU}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre i, notées Δ_i, $i \in [\![1, n]\!]$.
Montrer par récurrence sur l'ordre n de la matrice $\mathbb{A}$ qu'il existe une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice $\mathbb{U}$ définie par

$$\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$$

soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i / (U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

Correction Soit $n \geqslant 2$, on va démontrer par récurrence sur n la proposition suivante

$(\mathcal{P}_n)$ Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, les sous-matrices principales d'ordre i de $\mathbb{A}$, notées Δ_i, sont inversibles, alors il existe une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i / (U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

Initialisation: $n = 2$ Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si $\Delta_1 = A_{1,1} \neq 0$ et $\Delta_2 = \mathbb{A}$ inversible. On va construire une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure.

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ E_{2,1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ 0 & U_{2,2} \end{pmatrix} = \mathbb{U}$$

On a donc $U_{2,1} = 0 = E_{2,1}A_{1,1} + A_{2,1}$. Comme par hypothèse, $A_{1,1} \neq 0$, on a $E_{2,1} = -A_{2,1}/A_{1,1}$, ce qui donne

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{A_{2,1}}{A_{1,1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} - \frac{A_{2,1}}{A_{1,1}} A_{1,2} \end{pmatrix} = \mathbb{U}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} U_{1,1} &= A_{1,1} = \det(\Delta_1), \\ U_{2,2} &= A_{2,2} - \frac{A_{2,1}}{A_{1,1}} A_{1,2} = \frac{A_{2,2}A_{1,1} - A_{2,1}A_{1,2}}{A_{1,1}} = \frac{\det \mathbb{A}}{U_{1,1}} = \frac{\det \Delta_2}{U_{1,1}}. \end{aligned}$$

Hérédité: Soit $n \geqslant 3$, on suppose que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vérifiée. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. dont toutes les sous-matrices principales d'ordre i de $\mathbb{A}$, notées Δ_i, $i \in [\![1, n]\!]$ sont inversibles. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme bloc

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{n-1} & \boldsymbol{g} \\ \hline \boldsymbol{f}^* & A_{n,n} \end{array}\right)$$

avec $\mathbb{A}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, $\boldsymbol{f} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $\boldsymbol{g} \in \mathbb{C}^{n-1}$. Comme les $n-1$ premières sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont les $n-1$ sous-matrices principales de $\mathbb{A}_{n-1}$, ces dernières sont, par hypothèse, inversibles. Par hypothèse de récurrence sur $\mathbb{A}_{n-1}$, il existe une matrice $\mathbb{E}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{E}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}$ soit triangulaire supérieure.

On va construire (si possible) une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure. La matrice $\mathbb{E}$ s'écrit sous forme bloc

$$\mathbb{E} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{h}^* & 1 \end{array}\right)$$

avec $\mathbb{X}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et $\boldsymbol{h} \in \mathbb{C}^{n-1}$.

On a alors

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{h}^* & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{n-1} & \boldsymbol{g} \\ \hline \boldsymbol{f}^* & A_{n,n} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{X}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1} & \mathbb{X}_{n-1}\boldsymbol{g} \\ \hline \boldsymbol{h}^*\mathbb{A}_{n-1} + \boldsymbol{f}^* & \boldsymbol{h}^*\boldsymbol{g} + A_{n,n} \end{array}\right)$$

Pour que la matrice $\mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure, il faut que $\mathbb{X}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}$ soit triangulaire supérieure et $\boldsymbol{h}^*\mathbb{A}_{n-1}+\boldsymbol{f}^*=0$. En choisissant $\mathbb{X}_{n-1}=\mathbb{E}_{n-1}$, on a $\mathbb{U}_{n-1}=\mathbb{X}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}$ triangulaire supérieure. La matrice $\mathbb{A}_{n-1}$ étant inversible, on a $\boldsymbol{h}^*=-\boldsymbol{f}^*\mathbb{A}_{n-1}^{-1}$

On obtient donc

$$\mathbb{E}\mathbb{A}=\left(\begin{array}{c|c}\mathbb{E}_{n-1} & \mathbf{0}\\ \hline \boldsymbol{h}^* & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathbb{A}_{n-1} & \boldsymbol{g}\\ \hline \boldsymbol{f}^* & A_{n,n}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}\mathbb{U}_{n-1} & \mathbb{E}_{n-1}\boldsymbol{g}\\ \hline 0 & A_{n,n}-\boldsymbol{h}^*\boldsymbol{g}\end{array}\right)=\mathbb{U}.$$

On a donc construit une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, $\mathbb{E}$, telle que $\mathbb{U}=\mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure. Par construction, on a

$$U_{i,j}=(\mathbb{U}_{n-1})_{i,j},\ \forall(i,j)\in[\![1,n-1]\!]^2$$

et donc, par hypothèse de récurrence sur $\mathbb{U}_{n-1}$, on obtient

$$U_{i,i}=\det\Delta_i/(U_{1,1}\times\cdots\times U_{i-1,i-1}),\quad \forall i\in[\![1,n-1]\!].$$

De plus on a,

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{E}\mathbb{A})&=\det(\mathbb{E})\det(\mathbb{A})\\&=\det(\mathbb{A}) && \text{car } \mathbb{E} \text{ tri. inf. à diag. unité}\\&=\det(\Delta_n). && \text{car } \Delta_n=\mathbb{A}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\det(\mathbb{U})&=\prod_{k=1}^{n}U_{k,k} && \text{car } \mathbb{U} \text{ tri. sup.}\\&=U_{n,n}\prod_{k=1}^{n-1}U_{k,k}\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{U}=\mathbb{E}\mathbb{A}$, on en déduit que la matrice $\mathbb{U}$ est inversible (car $\mathbb{E}$ et $\mathbb{A}$ le sont), que ses coefficients sont non nuls et, en prenant le déterminant:

$$\det(\Delta_n)=U_{n,n}\prod_{k=1}^{n-1}U_{k,k}$$

et donc

$$U_{n,n}=\frac{\det(\Delta_n)}{\prod_{k=1}^{n-1}U_{k,k}}.$$

La proposition $(\mathcal{P}_n)$ est donc vraie.

Conclusion: On a démontré par récurrence que la proposition $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n\geqslant 2$.

◇

Exercice 6 : factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$

Soit $\mathbb{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 *Montrer que s'il existe $\mathbb{L}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $\mathbb{A}=\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ alors $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.*

Q. 2 *Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive alors il existe $\mathbb{L}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $\mathbb{A}=\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$.*

Correction

R. 1 Soit $\mathbb{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ avec $\mathbb{L}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coeffcients diagonaux strictement positifs.
La matrice $\mathbb{A}$ est alors hermitienne car

$$\mathbb{A}^*=(\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*)^*=(\mathbb{L}^*)^*\mathbb{D}^*\mathbb{L}^*=\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*.$$

De plus $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \backslash\{0\}$ on a
$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{D}\mathbb{L}^*\boldsymbol{x}, \mathbb{L}^*\boldsymbol{x}\rangle$$
On pose $\boldsymbol{y} = \mathbb{L}^*\boldsymbol{x} \neq 0$ car $\boldsymbol{x} \neq 0$ et $\mathbb{L}^*$ inversible. On obtient alors
$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{D}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} D_{i,i}|y_i|^2 > 0$$
car $\mathbb{D}$ diagonale, $D_{i,i} > 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ et $\boldsymbol{y} \neq 0$.
La matrice hermitienne $\mathbb{A}$ est donc bien définie positive.

R. 2 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive.
D'après le Corollaire 2.6 de [2], la matrice $\mathbb{A}$ admet une unique factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.
D'après le Théorème 2.8, la matrice hermitienne $\mathbb{A}$ peut alors s'écrire sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ où $\mathbb{D}$ est diagonale à coefficients réels et $\mathbb{L}$ triangulaire inférieure à diagonale unité.
Il reste à démontrer que $D_{i,i} > 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.
Comme $\mathbb{A}$ est définie positive, on a $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \backslash\{0\}$, $\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle > 0$. Or on a
$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{D}\mathbb{L}^*\boldsymbol{x}, \mathbb{L}^*\boldsymbol{x}\rangle$$
On note $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$, la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et on rappelle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\langle \mathbb{D}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i\rangle = D_{i,i}$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. En choisissant $\boldsymbol{x} = (\mathbb{L}^*)^{-1}\boldsymbol{e}_i \neq 0$, on obtient alors
$$\langle \mathbb{D}\mathbb{L}^*\boldsymbol{x}, \mathbb{L}^*\boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{D}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i\rangle = D_{i,i} > 0.$$

◇

Exercice 7 : factorisation de Cholesky

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 *Montrer que si $\mathbb{A}$ admet une factorisation factorisation régulière de Cholesky alors $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.*

Q. 2 *Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive alors elle admet une factorisation factorisation régulière de Cholesky.*

Q. 3 *On suppose que $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.*

a. Montrer que $\mathbb{A}$ admet une factorisation positive de Cholesky.

b. Montrer que cette factorisation est unique.

Correction

R. 1 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation régulière de Cholesky $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$ avec $\mathbb{B}$ est une matrice triangulaire inférieure inversible.
La matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne car
$$\mathbb{A}^* = (\mathbb{B}\mathbb{B}^*)^* = (\mathbb{B}^*)^*\mathbb{B}^* = \mathbb{B}\mathbb{B}^* = \mathbb{A}.$$
Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \backslash\{0\}$, on a
$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{B}\mathbb{B}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{B}^*\boldsymbol{x}, \mathbb{B}^*\boldsymbol{x}\rangle = \|\mathbb{B}^*\boldsymbol{x}\|^2 > 0$$
car $\mathbb{B}^*\boldsymbol{x} \neq 0$ ($\mathbb{B}^*$ inversible et $\boldsymbol{x} \neq 0$). Donc la matrice $\mathbb{A}$ est bien hermitienne définie positive.

R. 2 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive.
D'après le Corollaire 2.9, il existe alors une matrice $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et une matrice $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficient strictement positifs telles que
$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*.$$

On note $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale inversible vérifiant $\mathbb{H}^2 = \mathbb{D}$ (i.e. $H_{i,i} = \pm\sqrt{D_{i,i}} \neq 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$). On a alors

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{H}\mathbb{H}\mathbb{L}^* = (\mathbb{L}\mathbb{H})(\mathbb{L}\mathbb{H})^*$$

En posant $\mathbb{B} = \mathbb{L}\mathbb{H}$, la matrice $\mathbb{B}$ est bien triangulaire inférieure inversible car produit d'une matrice triangulaire inférieure inversible par une matrice diagonale inversible et on a $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$.

R. 3

a. En choisissant, dans la question précédente,

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad H_{i,i} = \sqrt{D_{i,i}} > 0,$$

la matrice $\mathbb{B} = \mathbb{L}\mathbb{H}$ triangulaire inférieure a alors pour éléments diagonaux

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad B_{i,i} = H_{i,i} > 0.$$

b. Montrons qu'une factorisation positive de Cholesky est unique.
Soient $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$ deux factorisations positives de la matrice $\mathbb{A}$, on a donc

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}_1\mathbb{B}_1^* = \mathbb{B}_2\mathbb{B}_2^*.$$

En multipliant à gauche par $\mathbb{B}_2^{-1}$ et à droite par $(\mathbb{B}_1^*)^{-1}$ cette équation on obtient

$$\mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2^*(\mathbb{B}_1^*)^{-1} = \mathbb{B}_2^*(\mathbb{B}_1^{-1})^* = (\mathbb{B}_1^{-1}\mathbb{B}_2)^*$$

En notant $\mathbb{G} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1$, on tire de l'équation précédente

$$\mathbb{G} = (\mathbb{G}^{-1})^*. \tag{R7.4}$$

Or, on a

- Proposition 2.35: l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs est aussi une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs.
- Proposition 2.34: le produit de matrices triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs reste triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs.

On en déduit que les matrices $\mathbb{G} = \mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{G}^{-1} = \mathbb{B}_1^{-1}\mathbb{B}_2$ sont triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs.
De plus l'équation (R7.4) identifie la matrice triangulaire inférieure $\mathbb{G}$ à la matrice triangulaire supérieure $(\mathbb{G}^{-1})^*$: ce sont donc des matrices diagonales à coefficients diagonaux réels strictement positifs et on en déduit

$$(\mathbb{G}^{-1})^* = \mathbb{G}^{-1}$$

et

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (\mathbb{G}^{-1})_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{G}_{i,i}} > 0.$$

De l'équation (R7.4), on obtient alors $\mathbb{G} = \mathbb{G}^{-1}$ et donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \mathbb{G}_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{G}_{i,i}} > 0.$$

On en déduit alors que $\mathbb{G} = \mathbb{I}$ et donc

$$\mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1 = \mathbb{I}$$

c'est à dire $\mathbb{B}_2^{-1}$ est l'inverse de $\mathbb{B}_1$ qui est unique, donc $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$.

◇

Exercice 8 : Propriété de la matrice élémentaire de Householder

Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On note $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{H} = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.$$

Q. 1

a. Montrer que $\mathbb{H}$ est hermitienne.

b. Montrer que $\mathbb{H}$ est unitaire.

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$. On note $\boldsymbol{x}_{\|} = \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{x}_{\perp} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\|}$.

Q. 2

Montrer que

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{x}_{\perp} + \boldsymbol{x}_{\|}) = \boldsymbol{x}_{\perp} - \boldsymbol{x}_{\|}.$$

et

$$\mathbb{H}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad \text{si } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle = 0.$$

Correction

R. 1

a. Cette matrice est hermitienne car

$$\mathbb{H}^* = (\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)^* = \mathbb{I} - 2(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)^* = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* = \mathbb{H}.$$

b. La matrice $\mathbb{H}$ est unitaire si $\mathbb{H}^*\mathbb{H} = \mathbb{I}$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^*\mathbb{H} = \mathbb{H}\mathbb{H} &= (\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)(\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*) \\ &= \mathbb{I} - 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* + 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, on a $\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$ et donc

$$\mathbb{H}^*\mathbb{H} = \mathbb{I} - 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* + 4\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}^* = \mathbb{I}.$$

R. 2 On note que par construction $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_{\perp} \rangle = 0$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_{\perp} \rangle &= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\|} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_{\|} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u} \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \\ &= 0 \quad \text{car } \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \|\boldsymbol{u}\|_2^2 = 1.\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{H}(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}_{\perp} + \boldsymbol{x}_{\|}) = (\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)(\boldsymbol{x}_{\perp} + \boldsymbol{x}_{\|}) &= \boldsymbol{x}_{\perp} + \boldsymbol{x}_{\|} - 2u\, \underbrace{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{x}_{\perp}}_{=0} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{x}_{\|} \\ &= \boldsymbol{x}_{\perp} + \boldsymbol{x}_{\|} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\big(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}\big) = \boldsymbol{x}_{\perp} + \boldsymbol{x}_{\|} - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}\, \underbrace{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}}_{=1} \\ &= \boldsymbol{x}_{\perp} + \boldsymbol{x}_{\|} - 2\boldsymbol{x}_{\|} \\ &= \boldsymbol{x}_{\perp} - \boldsymbol{x}_{\|}.\end{aligned}$$

Si $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$ alors $\boldsymbol{x}_{\|} = 0$ et $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{\perp}$.

◇

Exercice 9

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$. On va chercher $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$, vérifiant

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}. \tag{9.1}$$

Q. 1 *Montrer que si α et $\boldsymbol{u}$ vérifient (9.1) alors*

a. on a

$$|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2 \tag{9.2}$$

b. on a

$$\boldsymbol{a} - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle \boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{b} \tag{9.3}$$

c. on en déduit que

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle|^2 = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle}{2} \tag{9.4}$$

Nous allons maintenant établir une condition pour que (9.4) ait un sens.

Q. 2 *On suppose que* $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle)\ [\pi]$

a. Montrer que $\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}^{*+}$.

Q. 3 *Soient α et $\boldsymbol{u}$ vérifiant* (9.1). *En déduire que si* $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle)\ [\pi]$ *alors $\boldsymbol{u}$ est donné par*

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle}(\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}). \tag{9.5}$$

et $\|u\|_2 = 1$.

Correction

R. 1 Par la suite, on pose $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\boldsymbol{u})$ pour alléger les notations.

a. On a

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{a}\|_2^2 = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle &= \langle \mathbb{H}^*\mathbb{H}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle \quad \text{car } \mathbb{H} \text{ unitaire} \\ &= \langle \mathbb{H}\boldsymbol{a}, \mathbb{H}\boldsymbol{a}\rangle \quad \text{par définition du produit scalaire} \\ &= \|\mathbb{H}\boldsymbol{a}\|_2^2 = \|\alpha\boldsymbol{b}\|_2^2 = |\alpha|^2\|\boldsymbol{b}\|_2^2 = |\alpha|^2. \end{aligned}$$

b. Pour établir (9.3), on écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b} &\iff (\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b} \\ &\iff \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{a}) = \alpha\boldsymbol{b} \\ &\iff \boldsymbol{a} - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle \boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

c. En effectuant le produit scalaire (à gauche) avec $\boldsymbol{a}$ de (9.3), on obtient

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$$

ce qui prouve (9.4).

R. 2

a. On a par définition de l'argument $\alpha = |\alpha|e^{\imath\arg\alpha}$ et $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = |\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle|e^{\imath\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle)}$ ce qui donne

$$\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = |\alpha||\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle|e^{\imath(\arg\alpha + \arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle))} \tag{R9.5}$$

et donc $\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ est réel si $\arg\alpha + \arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) = 0\ [\pi]$.

b. On vient de demontrer que $\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}$ et donc $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}$. Il reste donc à montrer que $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle > 0$.

- Si $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) + \pi\ [2\pi]$, alors de (R9.5) on obtient $\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \leqslant 0$ et donc $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \geqslant \|\boldsymbol{a}\|_2 > 0$ car $\boldsymbol{a} \neq 0$.
- Si $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle)\ [2\pi]$, alors de (R9.5) on obtient $\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \geqslant 0$.

Comme les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ ne sont pas colinéaires, on a inégalité stricte dans Cauchy-Schwarz :

$$|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle| < \|\boldsymbol{a}\|_2 \|\boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{a}\|_2 .$$

On obtient donc

$$0 \leqslant \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \leqslant |\alpha| |\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle| < |\alpha| \|\boldsymbol{a}\|_2 = \|\boldsymbol{a}\|_2^2$$

Attention, dans ce cas $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ peut-être très petit.

R. 3

On peut noter que $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle \neq 0$ car sinon, d'après (9.3), $\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b}$ or par hypothèse $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont non colinéaires. On obtient alors immédiatement (9.5) à partir de (9.3)
Vérifions que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On a

$$\|\boldsymbol{u}\|_2^2 = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = \frac{1}{4|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle|^2} \langle \boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}\rangle$$

En utilisant (9.4), on obtient

$$\begin{aligned} 4|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle|^2 &= 2(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) \\ &= 2\|\boldsymbol{a}\|_2^2 - 2\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}\rangle &= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \overline{\alpha} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + |\alpha|^2 \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle = \|\boldsymbol{a}\|_2^2 - \overline{\alpha} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + |\alpha|^2 \\ &= 2\|\boldsymbol{a}\|_2^2 - \overline{\alpha} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \\ &= 2\|\boldsymbol{a}\|_2^2 - 2\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \quad \text{car } \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \overline{(\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle)} = \overline{\alpha} \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$.

◇

EXERCICE 10

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$.

Q. 1 *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg(\alpha) = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) + \delta\pi$ avec $\delta \in [\![0, 1]\!]$.*

a. On suppose que $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, (i.e. $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ colinéaires). Exprimer $\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}$ en fonction de λ et $\boldsymbol{b}$.

b. Que peut-on dire si $\boldsymbol{a}$ est nul?

Q. 2 *Ecrire la fonction algorithmique Householder de paramètres $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\delta \in [\![0, 1]\!]$ retournant une matrice $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\alpha \in \mathbb{C}$ telles que*

- *si $\boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle \boldsymbol{b} = 0$ (i.e. $\boldsymbol{a}$ nul ou colinéaire à $\boldsymbol{b}$) alors $\mathbb{S}$ est la matrice identitée et $\alpha = 0$,*
- *sinon α est le nombre complexe défini en **Q. 1** (dépendant de δ) et $\mathbb{S}$ est la matrice élémentaire de Householder*

$$\mathbb{S} = \mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}\|_2}\right)$$

telle que $\mathbb{S}\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b}$.

Des fonctions comme dot$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ (produit scalaire de deux vecteurs), norm$(\boldsymbol{a})$ (norme 2 d'un vecteur), arg(z) (argument d'un nombre complexe), eye(n) (matrice identitée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), matprod$(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ (produit de deux matrices), ctranspose$(\mathbb{A})$ (adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées

Q. 3 *Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction vecrand(n) retournant un vecteur aléatoire de $\mathbb{C}^n$, les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans $]0, 1[$ (loi uniforme).*

Q. 4 *Proposer un programme permettant de vérifier que $\delta = 1$ est le "meilleur" choix.*

Correction

R. 1

a. On a

$$\|\boldsymbol{a}\|_2 = |\lambda| \, \|\boldsymbol{b}\|_2 = |\lambda|$$

et

$$\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \lambda \boldsymbol{b} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle = \lambda.$$

On rappelle que $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}$ et, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\arg(z) = -\arg(\overline{z})$. On a alors

$$\begin{aligned}
\arg(\alpha) &= -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) + \delta\pi \\
&= \arg(\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle) + \delta\pi \\
&= \arg(\lambda) + \delta\pi.
\end{aligned}$$

On a alors

- avec $\delta = 0$,

$$\alpha = |\alpha| e^{\imath \arg(\alpha)} = |\lambda| e^{\imath \arg(\lambda)} = \lambda$$

ce qui donne

$$\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},$$

- avec $\delta = 1$,

$$\alpha = |\alpha| e^{\imath \arg(\alpha)} = |\lambda| e^{\imath (\arg(\lambda) + \pi)} = -\lambda$$

$$\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b} = 2\lambda \boldsymbol{b}.$$

b. Si $\boldsymbol{a}$ est nul, on a $\alpha = 0$ et $\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

R. 2

Algorithme 2 fonction $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow \text{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \delta)$.

Retourne une matrice $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\alpha \in \mathbb{C}$ telles que

- si $\boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{b} = 0$ (i.e. $\boldsymbol{a}$ nul ou colinéaire à $\boldsymbol{b}$) alors $\mathbb{S}$ est la matrice identitée et $\alpha = 0$,
- sinon α est le nombre complexe défini par

$$|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2 \quad \text{et} \quad \arg(\alpha) = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) + \delta\pi,$$

et, $\mathbb{S}$ est la matrice élémentaire de Householder

$$\mathbb{S} = \mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha \boldsymbol{b}\|_2} \right)$$

telle que $\mathbb{S}\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b}$.

Données : $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$: deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ non nuls et non colinéaires.
δ : 0 ou 1, permet de déterminer α.

Résultat : $\mathbb{S}$: matrice de Householder ou indentité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
α : nombre complexe , de module $\|\boldsymbol{a}\|_2$ et d'argument $-\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle) + \delta\pi$.

```
Fonction [S, α] ← Householder( a, b, δ )
  ba ← dot(b, a)                                   ▷ dot(b, a) : b*a
  Si norm(a − ba ∗ b) < 1e − 15 alors
    S ← eye(n),  α ← 0
  Sinon
    α ← norm(a) ∗ exp(i ∗ (δ ∗ π + arg(ba)))
    u ← a − α ∗ b
    u ← u/norm(u)
    S ← eye(n) − 2 ∗ matprod(u, ctranspose(u))
  Fin Si
Fin Fonction
```

R. 3

$n \leftarrow 100$
$\boldsymbol{a} \leftarrow \text{vecrand}(n)$
$\boldsymbol{b} \leftarrow \text{vecrand}(n)$
$\boldsymbol{b} \leftarrow \boldsymbol{b}/\text{norm}(\boldsymbol{b}, 2)$
$[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow \text{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 0)$
$\text{error} \leftarrow \text{norm}(\mathbb{H} * \boldsymbol{a} - \alpha * \boldsymbol{b}, 2)$

R. 4

Ici, l'objectif est d'illustrer le fait qu'avec $\boldsymbol{a}$ *presque* colinéaire à $\boldsymbol{b}$, on a (voir **Q. 1**)

- si $\delta = 1$, alors $\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b} \approx 2\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{b}$
- si $\delta = 0$, alors $\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b} \approx \boldsymbol{0}$ et ceci est source d'ennuis numériques (précision machine) lors du calcul du vecteur

$$\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}.$$

$n \leftarrow 100$
$\boldsymbol{b} \leftarrow \text{vecrand}(n)$
$\boldsymbol{b} \leftarrow \boldsymbol{b}/\text{norm}(\boldsymbol{b}, 2)$
$\boldsymbol{a} \leftarrow \boldsymbol{a} + \text{tol} * \text{vecrand}(n)$
$[\mathbb{H}_1, \alpha_1] \leftarrow \text{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 1)$
$[\mathbb{H}_0, \alpha_0] \leftarrow \text{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 0)$
$\text{error0} \leftarrow \text{norm}(\mathbb{H}_0 * \boldsymbol{a} - \alpha_0 * \boldsymbol{b}, 2)/(1 + \text{abs}(\alpha_0))$
$\text{error1} \leftarrow \text{norm}(\mathbb{H}_1 * \boldsymbol{a} - \alpha_1 * \boldsymbol{b}, 2)/(1 + \text{abs}(\alpha_1))$

Dans la figure qui suit, on représente en échelle logarithmique, et, en fonction de l'ordre des matrices, l'erreur obtenue avec $\delta = 1$, $\delta = 0$ et $\text{tol} = 1e - 12$ lors de l'utilisation de la fonction Householder avec un vecteur $\boldsymbol{a}$ *presque* colinéaire à $\boldsymbol{b}$. En Figure 2, la représentation est faite avec $\text{tol} = 1e - 6$.

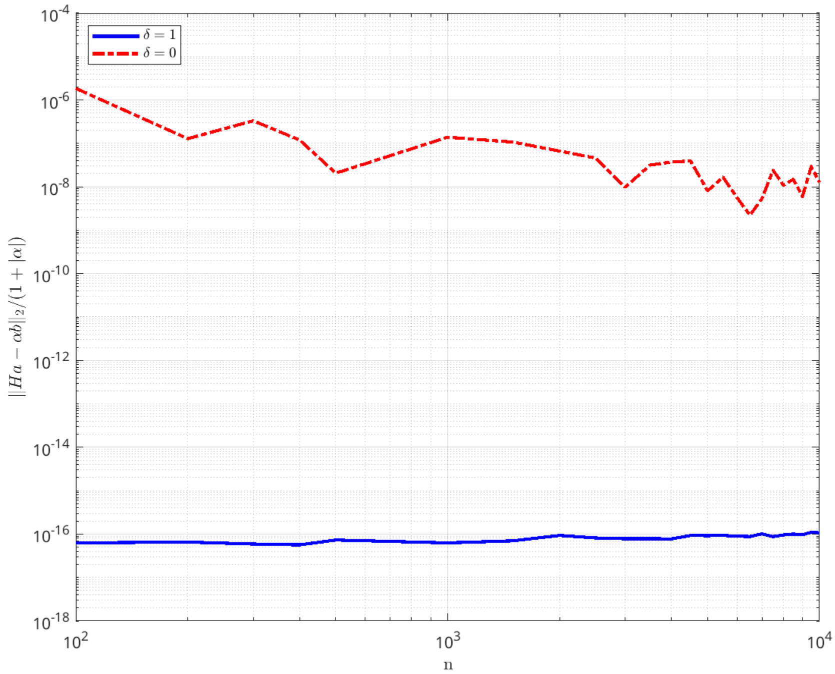

Figure 1: Choix de α dans Householder : erreur relative en norme L_2 avec $\text{tol} = 1e - 12$

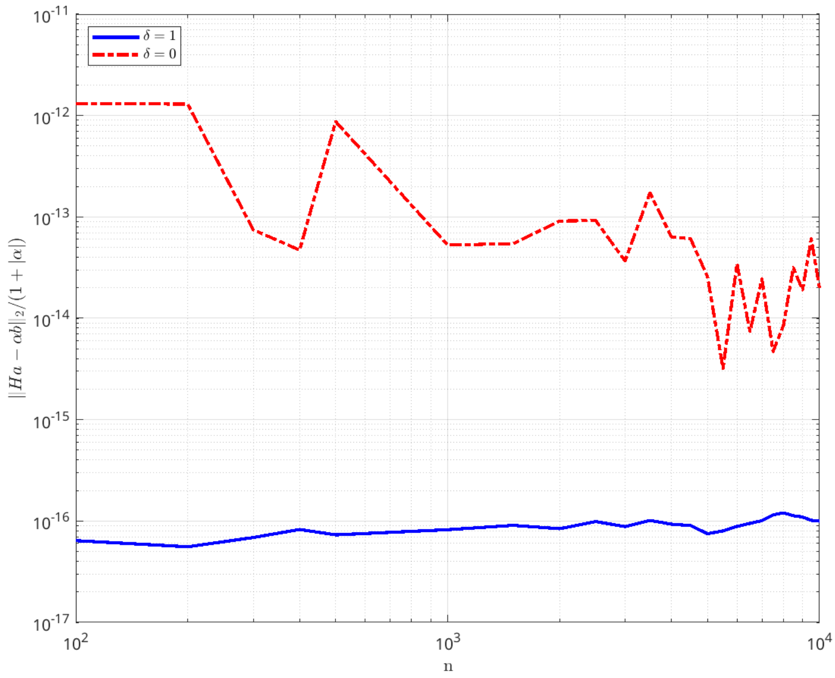

Figure 2: Choix de α dans Householder : erreur relative en norme L_2 avec tol $= 1e-6$

◇

Exercice 11

Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$ non nul et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
Montrer qu'il existe $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = -\|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath \arg(a_1)} \boldsymbol{e}_1. \tag{11.1}$$

Correction Avec $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1$, on est sous les conditions du théorème 2.15. On défini alors $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2 \quad \text{et} \quad \arg\alpha = -\arg\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \delta\pi, \quad \text{avec } \delta \in [\![0, 1]\!].$$

On a donc

$$\arg\alpha = -\arg(\overline{a_1}) + \delta\pi = \arg(a_1) + \delta\pi.$$

le choix $\delta = 1$ étant numériquement préférable (voir Exercice ...) Le théorème permet alors d'affirmer que

$$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}.$$

Or , on a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{a} - |\alpha| e^{\imath \arg(\alpha)} \boldsymbol{e}_1 \\ &= \boldsymbol{a} - \|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath(\arg(a_1) + \delta\pi)} \boldsymbol{e}_1 \end{aligned}$$

Avec le choix $\delta = 1$, on obtient

$$\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath \arg(a_1)} \boldsymbol{e}_1.$$

On obtient alors

$$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} + \|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath \arg(a_1)} \boldsymbol{e}_1}{\left\|\boldsymbol{a} + \|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath \arg(a_1)} \boldsymbol{e}_1\right\|_2}\right)\boldsymbol{a} = -\|\boldsymbol{a}\|_2 \, e^{\imath \arg(a_1)} \boldsymbol{e}_1$$

◇

Exercice 12

Soit $n \geqslant 2$.

$(\mathcal{P}_n)$

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{U}_n \mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \tag{12.1}$$

Q. 1 *Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.*

Q. 2 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une matrice unitaire $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

$(\mathcal{Q}_n)$

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Il existe une matrice orthogonale $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathbb{U}_n \mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \tag{12.2}$$

Q. 3 *La proposition $(\mathcal{Q}_n)$ est-elle vérifiée pour tout $n \geqslant 2$? Justifier.*

Q. 4 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

a. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

b. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficient diagonaux positifs ou nuls telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

c. On suppose $\mathbb{A}$ inversible. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une unique matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficient diagonaux strictement positifs telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

Correction

R. 1

- **Initialisation** : on va montrer que $(\mathcal{P}_2)$ est vraie
  Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On note $\boldsymbol{a} = \mathbb{A}_{:,1}$ (première colonne de $\mathbb{A}$) et $\mathbb{b} = (1, 0)^{\mathsf{t}}$.

  - Si $\boldsymbol{a} \neq 0$ et si $\boldsymbol{a}$ non colinéaire à $\boldsymbol{b}$, on est sous les conditions du théorème 2.15. On défini alors $\alpha \in \mathbb{C}$ $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg \alpha = -\arg \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \delta\pi$ (choix $\delta = 1$ préférable) Dans ce cas on a

    $$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}.$$

    On pose $\mathbb{U} = \mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)$ qui est une matrice unitaire.
  - Si $\boldsymbol{a} = 0$ ou si $\boldsymbol{a}$ est colinéaire à $\boldsymbol{b}$, alors $\boldsymbol{a}_2 = \mathbb{A}_{2,1} = 0$ et on pose $\mathbb{U} = \mathbb{I}$, qui est unitaire, et $\alpha = \pm\boldsymbol{a}_1 (= \pm\mathbb{A}_{1,1})$.

  Dans les 2 cas, on obtient

  $$\mathbb{U}\mathbb{A} = \mathbb{U}\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{:,1} & \mathbb{A}_{:,2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}\mathbb{A}_{:,1} & \mathbb{U}\mathbb{A}_{:,2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha\boldsymbol{b} & \mathbb{U}\mathbb{A}_{:,2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\alpha \\ 0\end{matrix} & \mathbb{U}\mathbb{A}_{:,2} \end{array}\right) = \mathbb{R}$$

  où $\mathbb{R}$ est triangulaire supérieure et la matrice $\mathbb{U}$ est soit l'indentité, soit une matrice élémentaire de Housholder.
- **Hérédité** : soit $n \geqslant 2$, on suppose que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vérifiée, on va alors montrer que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.
  Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\boldsymbol{a} = \mathbb{A}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ (première colonne de $\mathbb{A}$) et $\mathbb{b} = \boldsymbol{e}_1$, premier vecteur de la base canonique ($\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{b}_i = \delta_{1,i}$).

– Si $\boldsymbol{a} \neq 0$ et si $\boldsymbol{a}$ non colinéaire à $\boldsymbol{b}$, on est sous les conditions du théorème 2.15. On défini alors $\alpha \in \mathbb{C}$ $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg \alpha = -\arg \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \delta\pi$ (choix $\delta = 1$ préférable) Dans ce cas on a

$$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}.$$

On pose $\mathbb{H} = \mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)$ qui est une matrice unitaire.

– Si $\boldsymbol{a} = 0$ ou si $\boldsymbol{a}$ est colinéaire à $\boldsymbol{b}$, alors $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $\boldsymbol{a}_i = \mathbb{A}_{i,1} = 0$. On pose $\mathbb{H} = \mathbb{I}$, qui est unitaire, et $\alpha = \pm\boldsymbol{a}_1 (= \pm\mathbb{A}_{1,1})$.

Dans les 2 cas, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{H}\mathbb{A} &= \mathbb{H}\left(\mathbb{A}_{:,1} \middle| \mathbb{A}_{:,2} \middle| \ldots \middle| \mathbb{A}_{:,n} \right) = \left(\mathbb{H}\mathbb{A}_{:,1} \middle| \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,2} \middle| \ldots \middle| \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,n} \right) \\ &= \left(\alpha\boldsymbol{e}_1 \middle| \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,2} \middle| \ldots \middle| \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,n} \right) \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbb{H}\mathbb{A}$ s'écrit aussi sous la forme

$$\mathbb{H}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \ldots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{A}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

où $\mathbb{A}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. On peut donc appliquer à $\mathbb{A}_{n-1}$ l'hypothèse de récurrence: $\exists \mathbb{U}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ unitaire et $\exists \mathbb{R}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que

$$\mathbb{U}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1} = \mathbb{R}_{n-1}.$$

On défini alors

$$\mathbb{U} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

On a

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}^* & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}\mathbb{U}_{n-1}^* & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Comme $\mathbb{U}_{n-1}$ est unitaire, on en déduit que $\mathbb{U}$ est aussi unitaire. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{U}\left(\mathbb{H}\mathbb{A}\right) &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \ldots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{A}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \ldots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \ldots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{R}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{R}_{n-1}$ est triangulaire supérieure, on en déduit que $\mathbb{R}_n$ est aussi triangulaire supérieure. On pose $\mathbb{U}_n = \mathbb{U}\mathbb{H}$. Cette matrice est unitaire, car produit de deux matrices unitaires, et on a

$$\mathbb{U}_n\mathbb{A} = \mathbb{R}_n.$$

La proposition $(\mathcal{P}_n)$ est donc vérifiée.

- **Conclusion** : on vient de démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.

R. 2

D'après la proposition $(\mathcal{P}_n)$, Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{U}\mathbb{A} = \mathbb{R}.$$

Comme $\mathbb{U}$ est unitaire, on a $\mathbb{U}^* = \mathbb{U}^{-1}$ et donc
$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^*\mathbb{R}.$$
En posant $\mathbb{Q} = \mathbb{U}^*$, qui est unitaire, on obtient le résultat demandé.

R. 3

La proposition $(\mathcal{Q}_n)$ est toujours vérifiée. En effet, en reprenant la démonstration par récurrence dans le cas complexe, on peut noter que toutes les matrices sont réelles y compris les matrices de Householder utilisées car les coefficients α sont nécessairement réels ($\arg\alpha = -\arg\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \delta\pi = \delta\pi$), et Les matrices unitaires réelles sont orthogonales.

R. 4

a. D'après la proposition $(\mathcal{Q}_n)$, Il existe une matrice orthogonale $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que
$$\mathbb{U}\mathbb{A} = \mathbb{R}.$$
Comme $\mathbb{U}$ est orthogonale, on a $\mathbb{U}^{\mathsf{t}} = \mathbb{U}^{-1}$ et donc
$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^{\mathsf{t}}\mathbb{R}.$$
En posant $\mathbb{Q} = \mathbb{U}^{\mathsf{t}}$, qui est orthogonale, on obtient le résultat demandé.

b. D'après la proposition $(\mathcal{Q}_n)$, Il existe une matrice orthogonale $\widetilde{\mathbb{U}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\widetilde{\mathbb{R}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que
$$\widetilde{\mathbb{U}}\mathbb{A} = \widetilde{\mathbb{R}}.$$
Soit S l'application telle que $S(x) = -1$, si $x < 0$ et $S(x) = +1$, si $x \geqslant 0$. Soit $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice diagonale telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{D}_{i,i} = S(\widetilde{\mathbb{R}}_{i,i})$. Cette matrice est orthogonale.
On a alors
$$\mathbb{D}\widetilde{\mathbb{U}}\mathbb{A} = \mathbb{D}\widetilde{\mathbb{R}}.$$
On pose $\mathbb{U} = \mathbb{D}\widetilde{\mathbb{U}}$ et $\mathbb{R} = \mathbb{D}\widetilde{\mathbb{R}}$. Comme le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale, la matrice $\mathbb{U}$ est orthogonale. La matrice $\mathbb{R}$ est triangulaire supérieure car le produit d'une matrice diagonale par une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure. De plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a
$$\mathbb{R}_{i,i} = \mathbb{D}_{i,i}\widetilde{\mathbb{R}}_{i,i} = S(\widetilde{\mathbb{R}}_{i,i})\widetilde{\mathbb{R}}_{i,i} = |\widetilde{\mathbb{R}}_{i,i}| \geqslant 0.$$
En posant $\mathbb{Q} = \mathbb{U}^{\mathsf{t}}$, on obtient le résultat souhaité.

c. On vient de démontrer, en **Q. 4** b., qu'il l existe une matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficient diagonaux positifs ou nuls telles que $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$.
Comme $\mathbb{A}$ inversible, on a
$$\det(\mathbb{A}) = \det(\mathbb{Q})\det(\mathbb{R}) \neq 0.$$
On en déduit que $\det(\mathbb{R}) \neq 0$. De plus, $\mathbb{R}$ étant triangulaire supérieure, on obtient
$$\det(\mathbb{R}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}_{i,i} \neq 0 \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{R}_{i,i} \neq 0.$$
et donc, tous les coefficient diagonaux de $\mathbb{R}$ sont strictement positifs.
Pour montrer l'unicité d'une telle factorisation, on note $\mathbb{Q}_1$, $\mathbb{Q}_2$, deux matrices orthogonales et $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_2$, deux matrices triangulaires à coefficients diagonaux strictements positifs telles que
$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}_1\mathbb{R}_1 = \mathbb{Q}_2\mathbb{R}_2.$$
On a alors
$$\mathbb{I} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{Q}_1\mathbb{R}_1\big(\mathbb{Q}_2\mathbb{R}_2\big)^{-1} = \mathbb{Q}_1\mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1}\mathbb{Q}_2^{-1}$$
et donc
$$\mathbb{Q}_1^{-1}\mathbb{Q}_2 = \mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathbb{T}.$$
Comme $\mathbb{Q}_1$ est orthogonale on a $\mathbb{T} = \mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2$ et
$$\mathbb{T}^{\mathsf{t}}\mathbb{T} = (\mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2)^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}_2^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_1\mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2 = \mathbb{I}.$$
La matrice $\mathbb{T}$ est donc orthogonal. De plus $\mathbb{T} = \mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs puisque produit de triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. La matrice $\mathbb{I}$ étant symétrique définie positive, d'après le Théorème 3.15(factorisation positive de Cholesky) il existe une unique matrice $\mathbb{L}$ triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $\mathbb{L}\mathbb{L}^{\mathsf{t}} = \mathbb{I}$. Cette matrice $\mathbb{L}$ est évidemment la matrice identité. On en déduit que $\mathbb{T} = \mathbb{L}^{\mathsf{t}} = \mathbb{I}$ et donc $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}_2$ et $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_2$.

◇

Exercice 13

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ la matrice bloc

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \end{array}.$$

On note $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ le premier vecteur colonne de $\mathbb{V}$ et on suppose que $\boldsymbol{v}$ est non nul et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^n$ (premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$).

Q. 1 *Expliciter, en fonction de $\boldsymbol{v}$, le vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$, tel que*

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{e}_1^n, \quad \text{avec } \mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.$$

Q. 2 *Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ et $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$. On pose $\boldsymbol{w} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{x} \\ \hline \boldsymbol{y} \end{array}\right) \in \mathbb{C}^{m+n}$. Déterminer $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})$ en fonction de $\mathbb{H}(\boldsymbol{x})$ et de $\mathbb{H}(\boldsymbol{y})$.*

Q. 3 *On pose $\boldsymbol{w} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{0}_m \\ \hline \boldsymbol{u} \end{array}\right) \in \mathbb{C}^{m+n}$.*

a. *Déterminer $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$ en fonction de $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$.*

b. *Que peut-on dire de particulier sur le bloc $(2,2)$ de $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$?*

Correction

R. 1 On a

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1^n}{\|\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1^n\|} \text{ avec } \alpha = \|\boldsymbol{v}\|_2 \, e^{\imath(\delta\pi - \arg\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1^n\rangle)}, \; \delta \in \{0, 1\}.$$

Comme $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1^n\rangle = \overline{v_1}$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$, on obtient

$$\alpha = \|\boldsymbol{v}\|_2 \, e^{\imath(\arg(v_1) + \delta\pi)}$$

ce qui donne avec le choix $\delta = 1$

$$\alpha = -\|\boldsymbol{v}\|_2 \, e^{\imath \arg(v_1)}.$$

R. 2 On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(\boldsymbol{w}) &= \mathbb{I}_{m+n} - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^* \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) - 2\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{x} \\ \hline \boldsymbol{y} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{x}^* & \boldsymbol{y}^* \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) - 2\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^* & \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^* \\ \hline \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^* & \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^* \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{H}(\boldsymbol{x}) & -2\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^* \\ \hline -2\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^* & \mathbb{H}(\boldsymbol{y}) \end{array}\right)
\end{aligned}$$

R. 3

a. De la question précédente, on déduit

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{w}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{m,m} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}). \end{array}\right)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A} &= \left(\begin{array}{c|c}\mathbb{I}_{m,m} & \mathbb{O}_{m,n}\\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}).\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c}\mathbb{U} & \mathbb{F}\\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V}\end{array}\right)\\ &= \left(\begin{array}{c|c}\mathbb{U} & \mathbb{F}\\ \hline \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{E} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V}\end{array}\right).\end{aligned}$$

b. le bloc $(2,2)$ de $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$ correspond à la matrice $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la première colonne vaut $\alpha \boldsymbol{e}_1^n$. On a alors

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} = \left(\begin{array}{c|ccc}\alpha & \bullet & \cdots & \bullet\\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet\end{array}\right).$$

◇

Exercice 14

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 *Expliquer comment construire une matrice $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, produit d'au plus $n-1$ matrices élémentaires de Householder, et, $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire supérieure telles $\mathbb{H}\mathbb{A} = \mathbb{R}$.*

Q. 2 *Ecrire une fonction* FactQR *permettant de calculer la factorisation $\mathbb{Q}\mathbb{R}$ d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pourra utiliser la fonction* Householder *Exercice* **??**.

Q. 3 *Ecrire un programme permettant de tester cette fonction. On dispose des fonctions:*

- MatRand(m,n) *retournant une matrice aléatoire de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ chacune des parties imaginaires et réelles de ses éléments étant une variable aléatoire suivant la loi uniforme $[0,1]$.*
- NormInf$(\mathbb{A})$ *retournant la norme infinie d'une matrice carrée $\mathbb{A}$.*

Correction

R. 1

Remarque. *Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $j \in \mathcal{M}_1(n)$. On dit que la colonne j de $\mathbb{A}$ est colonne supérieure si, $\forall i \in [\![j+1,n]\!]$, $\mathbb{A}i,j = 0$, c'est à dire*

$$\mathbb{A}:,j = \mathrm{Vect}\left(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_j\right).$$

En notant $\mathbb{A}^{[0]} = \mathbb{A}$, l'idée générale est la suivante:
Pour j allant successivement de 1 à $n-1$, on va déterminer $\mathbb{H}^{[j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne j de $\mathbb{A}^{[j]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[j]}\mathbb{A}^{[j-1]}$ soit colonne supérieure sans modifier les colonnes 1 à j de $\mathbb{A}^{[j-1]}$.

Etape 1: il faut déterminer $\mathbb{H}^{[1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne 1 de $\mathbb{A}^{[1]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[1]}\mathbb{A}^{[0]}$ soit colonne supérieure .

- Si $\mathbb{A}^{[0]}_{:,1}$ est nulle ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$ alors on prend $\mathbb{H}^{[1]} = \mathbb{I}_n$ qui est unitaire.
- Sinon, $\mathbb{A}^{[0]}_{:,1}$ est non nulle et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$: on est sous les hypothèse du Corollaire 2.16 de [2] avec $\boldsymbol{a} = \mathbb{A}^{[0]}_{:,1}$. On en déduit alors qu'avec le vecteur $\boldsymbol{u}_1 \in \mathbb{C}^n$ donné par

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{a} - \|\boldsymbol{a}\|_2\, e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)}\boldsymbol{e}_1}{\left\|\boldsymbol{a} - \|\boldsymbol{a}\|_2\, e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)}\boldsymbol{e}_1\right\|_2}$$

on a

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a} = -\|\boldsymbol{a}\|_2\, e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)}\boldsymbol{e}_1.$$

En posant $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_1)$ et $\alpha_1 = -\left\|\boldsymbol{a}\right\|_2 e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)}$, on obtient

$$\mathbb{A}^{[1]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}_1\mathbb{A}^{[0]} = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right).$$

Etape 2: il faut déterminer $\mathbb{H}^{[2]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne 2 de $\mathbb{A}^{[2]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[2]}\mathbb{A}^{[1]}$ soit colonne supérieure sans modifier la colonne 1 de $\mathbb{A}^{[1]}$. Pour celà on va utiliser le Lemme 2.17 de [2] en posant

$$\mathbb{A}^{[1]} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ n-1 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & n-1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \end{array}, \quad \text{avec} \;\; \mathbb{U} = \alpha_1,\; \mathbb{E} = \mathbb{O}_{n-1,1},\; \mathbb{F} = \mathbb{A}^{[1]}_{1,2:n},\; \mathbb{V} = \mathbb{A}^{[1]}_{2:n,2:n}$$

- Si $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^{n-1}$, est nulle ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^{n-1}$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^{n-1}$, alors on pose $\mathbb{H}^{[2]} = \mathbb{I}_n$ qui est unitaire.
- Sinon, $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^{n-1}$, est non nulle et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^{n-1}$, et le Lemme peut s'appliquer. On en déduit alors qu'avec le vecteur $\boldsymbol{u}_2 \in \mathbb{C}^{n-1}$ donné par

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\mathbb{V}_{1,:} - \alpha_2\boldsymbol{e}_1^{n-1}}{\left\|\mathbb{V}_{1,:} - \alpha_2\boldsymbol{e}_1^{n-1}\right\|} \text{ avec } \alpha_2 = -\left\|\mathbb{V}_{1,:}\right\|_2 e^{\imath \arg(\mathbb{V}_{1,1})}$$

on a $\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{V}_{1,:} = \alpha_2\boldsymbol{e}_1^{n-1}$ et donc

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{V} = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_2 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right).$$

De plus, en posant

$$\boldsymbol{w}_2 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \\ \end{array}\right) \in \mathbb{C}^n \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^{[2]} = \mathbb{H}(\boldsymbol{w}_2) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2) \\ 0 & \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

on a

$$\mathbb{A}^{[2]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[2]}\mathbb{A}^{[1]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{E} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{V} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbb{F} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{V} \\ 0 & \end{array}\right)$$

En récrivant la matrice $\mathbb{A}^{[2]}$ sous forme de 2×2 blocs de dimensions 2 et $n-2$, on obtient

$$\mathbb{A}^{[2]} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{\;\;2\;\;} & \overleftrightarrow{\;\;n-2\;\;} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc} \alpha_1 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \alpha_2 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \updownarrow 2 \\ \\ \updownarrow n-2 \\ \\ \end{array}.$$

...

Etape j: il faut déterminer $\mathbb{H}^{[j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne j de $\mathbb{A}^{[j]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[j]}\mathbb{A}^{[j-1]}$ soit colonne supérieure tout en ayant les $(j-1)$ premières colonnes identiques à celles $\mathbb{A}^{[j-1]}$.
Pour celà on utilise le Lemme 2.17 de [2] en posant, $p = j-1$, $q = n-p$ et

$$\mathbb{A}^{[j-1]} = \begin{array}{c} \\ p \\ q \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & q \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \end{array}, \quad \text{avec} \;\; \mathbb{U} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{j-1} \end{pmatrix},\; \mathbb{E} = \mathbb{O}_{q,p},\; \mathbb{F} = \mathbb{A}^{[j-1]}_{1:p,j:n},\; \mathbb{V} = \mathbb{A}^{[j-1]}_{j:n,j:n}$$

- Si $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^q$, est nulle ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^q$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^q$, alors on prend $\mathbb{H}^{[j]} = \mathbb{I}_n$ qui est unitaire.

- Sinon, $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^q$, est non nulle et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^q$, et le Lemme peut s'appliquer. On en déduit alors qu'avec le vecteur $\boldsymbol{u}_j \in \mathbb{C}^q$ donné par

$$\boldsymbol{u}_j = \frac{\mathbb{V}_{1,:} - \alpha_j \boldsymbol{e}_1^q}{\|\mathbb{V}_{1,:} - \alpha_j \boldsymbol{e}_1^q\|} \text{ avec } \alpha_j = - \|\mathbb{V}_{1,:}\|_2 \, e^{\imath \arg(\mathbb{V}_{1,1})}$$

on a $\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{V}_{1,:} = \alpha_j \boldsymbol{e}_1^q$ et donc

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{V} = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_j & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right).$$

De plus, en posant

$$\boldsymbol{w}_j = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{0}_p \\ \hline \boldsymbol{u}_j \end{array}\right) \in \mathbb{C}^n \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^{[j]} = \mathbb{H}(\boldsymbol{w}_j) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_{p,q} \\ \hline \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j) \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

on a alors

$$\mathbb{A}^{[j]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[j]}\mathbb{A}^{[j-1]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{E} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{V} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{V} \end{array}\right).$$

En récrivant la matrice $\mathbb{A}^{[j]}$ sous forme de 2×2 blocs de dimensions j et $n-j$, on obtient

$$\mathbb{A}^{[j]} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{j}{\longleftrightarrow} & \overset{n-j}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|ccc} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_j & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow j \\ \updownarrow n-j \end{array}$$

Etape $n-1$: faire l'Etape j avec $j = n-1$.

Au final, on a donc

$$\mathbb{H}^{[n-1]} \ldots \mathbb{H}^{[1]}\mathbb{A} = \mathbb{R}$$

où $\mathbb{R}$ est triangulaire supérieure, et, les matrices $\mathbb{H}^{[j]}$, $j \in [\![1, n-1]\!]$ sont, soit la matrice identité, soit une matrice élémentaire de Householder: elles sont donc unitaires.
On note $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{[n-1]} \ldots \mathbb{H}^{[1]}$, cette matrice est donc le produit d'au plus $(n-1)$ matrices élémentaires de Householder. Comme le produit de matrices unitaires reste une matrice unitaire, on a $\mathbb{H}$ unitaire et

$$\mathbb{A} = \mathbb{H}^*\mathbb{R}.$$

On pose $\mathbb{Q} = \mathbb{H}^*$. La matrice $\mathbb{Q}$ est alors unitaire et on a

$$\mathbb{Q} = \left(\mathbb{H}^{[1]}\right)^* \ldots \left(\mathbb{H}^{[n-1]}\right)^*.$$

Les matrices élémentaires de Householer étant hermitiennes, on obtient

$$\mathbb{Q} = \mathbb{H}^{[1]} \ldots \mathbb{H}^{[n-1]}$$

et donc $\mathbb{Q}$ est aussi le produit d'au plus $(n-1)$ matrices élémentaires de Householder.

R. 2

Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_0}$

1: $\boxed{\text{Calculer } \mathbb{Q} \text{ et } \mathbb{R}}$

Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

1: Calculer $\mathbb{H}^{[1]}$ à $\mathbb{H}^{[n-1]}$
2: $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$
3: $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$
4: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$ ou $\mathbb{H}^{[1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[n-1]}$

Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

1: $\boxed{\text{Calculer } \mathbb{H}^{[1]} \text{ à } \mathbb{H}^{[n-1]}}$
2: $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$
3: $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$
4: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$ ou $\mathbb{H}^{[1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[n-1]}$

Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

1: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
2: $\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
3: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
4: Calculer $\mathbb{H}^{[j]}$ à partir de $\mathbb{A}^{[j-1]}$
5: $\mathbb{A}^{[j]} \leftarrow \mathbb{H}^{[j]} * \mathbb{A}^{[j-1]}$
6: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}^{[j]}$
7: **Fin Pour**
8: $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$

Etape j: On suppose les $j-1$ premières colonnes de $\mathbb{A}^{[j-1]}$ sous forme triangulaire supérieure.
On pose $p = j-1$, $q = n-p$ et on décompose la matrice $\mathbb{A}^{[j-1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en 2×2 blocs:

$$\mathbb{A}^{[j-1]} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} p & q \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) & \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \end{array}$$

avec, par hypothèse, $\mathbb{U}$ triangulaire supérieure et $\mathbb{E}$ matrice nulle.
Pour calculer $\mathbb{H}^{[j-1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à partir de $\mathbb{A}^{[j-1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on défini le vecteur $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^q$ comme étant le premier vecteur colonne de $\mathbb{V}$. On note $\boldsymbol{e}_1 \in \mathbb{C}^q$, le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^q$.

- Si $\boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{e}_1 = 0$, i.e. $\boldsymbol{v}$ est nul ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$, alors $\mathbb{H}^{[j-1]} = \mathbb{I}_n$. On a alors

$$\mathbb{A}^{[j]} = \mathbb{H}^{[j]} \mathbb{A}^{[j-1]} = \mathbb{A}^{[j-1]}$$

  et les j premières colonnes de $\mathbb{A}^{[j]}$ sont alors sous forme triangulaire supérieure.
- Sinon, en utilisant le Lemme 2.17 de [2], on défini le vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^q$ par

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1\|} \text{ avec } \alpha = -\|\boldsymbol{v}\|_2 \, e^{\imath \arg(\boldsymbol{v}_1)}$$

  et, la matrice élémentaire de Householder $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$ vérifie alors

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = \alpha_j \boldsymbol{e}_1.$$

  En posant

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}_p \\ \hline \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^{[j]} = \mathbb{H}(\boldsymbol{w}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$

  où la matrice élémentaire de Householder $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})$ est donnée par

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{w}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I}_n - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^* = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_{p,q} \\ \hline \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \end{array}\right).$$

  On a alors

$$\mathbb{A}^{[j]} = \mathbb{H}^{[j]} \mathbb{A}^{[j-1]} \quad = \quad \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} \end{array}\right)$$

  et les j premières colonnes de $\mathbb{A}^{[j]}$ sont alors sous forme triangulaire supérieure.

Pour déterminer la matrice $\mathbb{H}^{[j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il suffit donc de connaitre $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^q$. On va donc utiliser une fonction réalisant cette opération dans l'algorithme de factorisation $\mathbb{QR}$

Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
$\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
  $\boxed{\text{Calculer } \mathbb{H}^{[j]} \text{ à partir de } \mathbb{A}^{[j-1]}}$
  $\mathbb{A}^{[j]} \leftarrow \mathbb{H}^{[j]} * \mathbb{A}^{[j-1]}$
  $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}^{[j]}$
Fin Pour
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$

Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_3}$

$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
$\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
  $\boldsymbol{v} \leftarrow \mathbb{A}^{[j-1]}_{j:n,j}$
  $[\mathbb{H}^{[j]}, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder4QRstep}(\boldsymbol{v}, n)$
  $\mathbb{A}^{[j]} \leftarrow \mathbb{H}^{[j]} * \mathbb{A}^{[j-1]}$
  $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}^{[j]}$
Fin Pour
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$

La fonction MatHouseholder4QRstep étant donnée par:

Algorithme 4 fonction $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder4QRstep}(\boldsymbol{v}, n)$.

A partir d'un vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^q$, $q \in [\![2, n]\!]$, retourne une matrice $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\alpha \in \mathbb{C}$ telles que

- si $\boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{e}_1 = 0$ (i.e. $\boldsymbol{v}$ nul ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$) alors $\mathbb{S}$ est la matrice identitée et $\alpha = 0$,
- sinon, en définissant $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^q$ par
$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1\|} \text{ avec } \alpha = -\|\boldsymbol{v}\|_2 \, e^{\imath \arg(\boldsymbol{v}_1)}$$
on prend $\mathbb{S}$ comme étant la matrice élémentaire de Householder:
$$\mathbb{S} = \mathbb{H}(\boldsymbol{w}) \quad \text{avec } \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}_p \\ \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Données : $\boldsymbol{v}$: vecteur de $\mathbb{C}^q$, $q \in [\![2, n]\!]$,
n : dimension de
Résultat : $\mathbb{S}$: matrice de Householder ou identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
α : nombre complexe.

Fonction $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder4QRstep}(\ \boldsymbol{v}, n\ )$
  $\boldsymbol{e} \leftarrow \boldsymbol{0}_q,\ \boldsymbol{e}(1) \leftarrow 1$
  $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow \text{Householder}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}, 1)$
  $\mathbb{S} \leftarrow \text{eye}(n)$
  Si $\alpha \neq 0$ **alors**
    $p \leftarrow n - q$
    $I \leftarrow p + 1 : n$
    $\mathbb{S}(I, I) \leftarrow \mathbb{H}$
  Fin Si
Fin Fonction

Bien évidemment, on peut simplifier/améliorer l'écriture de l'Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_3}$ en ne stockant pas les suites de matrices:

Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_3}$

$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
$\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
  $\boldsymbol{v} \leftarrow \mathbb{A}^{[j-1]}_{j:n,j}$
  $[\mathbb{H}^{[j]}, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder4QRstep}(\boldsymbol{v}, n)$
  $\mathbb{A}^{[j]} \leftarrow \mathbb{H}^{[j]} * \mathbb{A}^{[j-1]}$
  $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}^{[j]}$
Fin Pour
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$

Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_4}$

$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
  $\boldsymbol{v} \leftarrow \mathbb{R}_{j:n,j}$
  $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder4QRstep}(\boldsymbol{v}, n)$
  Si $\alpha \neq 0$ **alors** $\qquad \triangleright$ Sinon $\mathbb{H} = \mathbb{I}$!
    $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{R}$
  Fin Si
  $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}$
Fin Pour

Voici (enfin) l'agorithme final:

Algorithme 3 Fonction FactQR

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Résultat : $\mathbb{Q}$: matrice unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
$\mathbb{R}$: matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Fonction $[\mathbb{Q}, \mathbb{R}] \leftarrow$ FactQR($\mathbb{A}$)
  $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}$
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
    $\boldsymbol{v} \leftarrow \mathbb{R}(j:n, j)$
    $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow$ MatHouseholder4QRstep$(\boldsymbol{v}, n)$
    Si $\alpha \neq 0$ **alors** ▷ Sinon $\mathbb{H} = \mathbb{I}$!
      $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{R}$
    Fin Si
    $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}$
  Fin Pour
Fin Fonction

R. 3

$\mathbb{A} \leftarrow$ MatRand$(50, 50)$
$[\mathbb{Q}, \mathbb{R}] \leftarrow$ FactQR$(\mathbb{A})$
err $\leftarrow$ NormInf$(\mathbb{A} - \mathbb{Q} * \mathbb{R})$ ▷ doit être très petit!

◇