Exercices associés au cours d'*Analyse Numérique I*
Résolution de systèmes linéaires
Méthodes directes

References

[1] F. Cuvelier, *Analyse numérique I, rappels analyse et algèbre linéaire, résumé.* fichier pdf, https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/24-25/rappels_print-2by1.pdf.

[2] ——, *Analyse numérique I, résolution de systèmes linéaires, méthodes directes, résumé.* fichier pdf, https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/24-25/resume_RSLdirecte_print-2by1.pdf.

Exercice 1 : Résolution système triangulaire supérieur

Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.

Q. 1 *Expliquer comment calculer $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, solution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ et expliciter les formules permettant de calculer l'ensemble des composantes de $\boldsymbol{x}$.*

R. 1 On veut résoudre le système linéaire

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & \dots & A_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On remarque que l'on peut calculer successivement $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$, car il est possible de calculer x_i si on connait $x_{i+1}, \dots, x_n$: c'est la **méthode de remontée**. En effet, on a

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i = b_i,$$

et donc, par définition d'un produit matrice-vecteur,

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_j = b_i.$$

Comme $\mathbb{A}$ est une matrice triangulaire supérieure, on a (voir Définition 2.33 dans [1])

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \ i > j, \quad A_{i,j} = 0.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1, n]\!], \quad b_i &= \sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{A_{i,j}}_{=0} x_j + A_{i,i} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j} x_j \\ &= A_{i,i} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j} x_j. \end{aligned} \tag{R1.1}$$

Q. 2 *Ecrire la fonction* ResTriSup *permettant de résoudre le système triangulaire supérieur $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

R. 2

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_0}$

$\boxed{\text{Résoudre } \mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ en calculant successivement } x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1.}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

Pour $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire**(**pas de** -1)
  calculer x_i connaissant $x_{i+1}, \ldots, x_n$ à l'aide de l'équation (R1.1)
Fin Pour

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

Pour $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire**(**pas de** -1)
  $\boxed{\text{Calculer } x_i \text{ connaissant } x_{i+1}, \ldots, x_n \text{ à l'aide de l'équation (R1.1)}}$
Fin Pour

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

Pour $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire**(**pas de** -1)
  $S \leftarrow \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j}x_j$
  $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
Fin Pour

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

Pour $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire**(**pas de** -1)
  $\boxed{S \leftarrow \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} A_{i,j}x_j}$
  $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
Fin Pour

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_3}$

Pour $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire**(**pas de** -1)
  $S \leftarrow 0$
  Pour $j \leftarrow i + 1$ **à** n **faire**
    $S \leftarrow S + A(i, j) * x(j)$
  Fin Pour
  $x_i \leftarrow (b_i - S)/A_{i,i}$
Fin Pour

On obtient alors l'algorithme final

Algorithme 1 Fonction ResTriSup permettant de résoudre le système linéaire triangulaire supérieur inversible $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ supérieure inversible.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Fonction $\boldsymbol{x} \leftarrow$ ResTriSup($\mathbb{A}, \boldsymbol{b}$)
  Pour $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire**(**pas de** -1)
    $S \leftarrow 0$
    Pour $j \leftarrow i + 1$ **à** n **faire**
      $S \leftarrow S + A(i, j) * x(j)$
    Fin Pour
    $x(i) \leftarrow (b(i) - S)/A(i, i)$
  Fin Pour
Fin Fonction

Exercice 2 : Matrice de permutation

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$, on note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identitée dont on a permuté les lignes i et j.

Q. 1 *Représenter cette matrice et la définir proprement.*

R. 1

On note, dans toute la correction, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.
On peut définir cette matrice par ligne,

$$\left\{\begin{array}{lrcll} \forall r \in [\![1, n]\!] \backslash \{i, j\}, & P_{r,s} & = & \delta_{r,s}, & \forall s \in [\![1, n]\!], \\ & P_{i,s} & = & \delta_{j,s}, & \forall s \in [\![1, n]\!], \\ & P_{j,s} & = & \delta_{i,s}, & \forall s \in [\![1, n]\!]. \end{array}\right.$$

ou par colonne

$$\left\{\begin{array}{rrcll} \forall s \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\}, & P_{r,s} & = & \delta_{r,s}, & \forall r \in [\![1,n]\!], \\ & P_{r,i} & = & \delta_{r,j}, & \forall r \in [\![1,n]\!], \\ & P_{r,j} & = & \delta_{r,i}, & \forall r \in [\![1,n]\!]. \end{array}\right.$$

⚠ Ne pas utiliser les indices i et j qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

On peut noter que la matrice $\mathbb{P}$ est symétrique. Pour la représentation, on suppose $i < j$. On effectue une représentation bloc 5×5 avec des blocs diagonaux carrés sachant que tous les blocs non décrits sont nuls:

$$\mathbb{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \overleftrightarrow{i-1} & i & \overleftrightarrow{j-i-1} & j & \overleftrightarrow{n-j} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbb{I} & & & & \\ \hline & 0 & & 1 & \\ \hline & & \mathbb{I} & & \\ \hline & 1 & & 0 & \\ \hline & & & & \mathbb{I} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow i-1 \\ i \\ \updownarrow j-i-1 \\ j \\ \updownarrow n-j \end{array}$$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.On note $\boldsymbol{A}_{r,:}$ le r-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{:,s}$ le s-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$.

Q. 2

a. *Déterminer les lignes de la matrice* $\mathbb{D} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ *en fonction des vecteurs lignes de* $\mathbb{A}$.

b. *Déterminer les colonnes de la matrice* $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ *en fonction des vecteurs colonnes de* $\mathbb{A}$.

R. 2

a. On note $\mathbb{D} = \mathbb{P}\mathbb{A}$. Par définition du produit matriciel on a

$$D_{r,s} = \sum_{k=1}^{n} P_{r,k}A_{k,s}.$$

On obtient, $\forall s \in [\![1,n]\!]$,

$$\left\{\begin{array}{lcll} D_{r,s} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{r,k}A_{k,s} = A_{r,s}, & \forall r \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\}, \\ D_{i,s} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{j,k}A_{k,s} = A_{j,s}, & \\ D_{j,s} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}A_{k,s} = A_{i,s}. & \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{lcll} \boldsymbol{D}_{r,:} & = & \boldsymbol{A}_{r,:}, & \forall r \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\}, \\ \boldsymbol{D}_{i,:} & = & \boldsymbol{A}_{j,:}, & \\ \boldsymbol{D}_{j,:} & = & \boldsymbol{A}_{i,:}. & \end{array}\right.$$

Note: La notation $\boldsymbol{D}_{i,:}$ correspond au vecteur ligne $(D_{i,1},\dots,D_{i,n})$ et $\boldsymbol{D}_{:,j}$ correspond au vecteur colonne $\begin{pmatrix} D_{1,j} \\ \vdots \\ D_{n,j} \end{pmatrix}$

b. On note $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}$. Par définition du produit matriciel et par symétrie de $\mathbb{P}$ on a

$$E_{r,s} = \sum_{k=1}^{n} A_{r,k}P_{k,s} = \sum_{k=1}^{n} A_{r,k}P_{s,k}.$$

⚠ Ne pas utiliser les indices i et j qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

On obtient en raisonnant par colonne, $\forall r \in [\![1,n]\!]$,

$$\left\{\begin{array}{lcl} E_{r,s} & = & \sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{s,k} = A_{r,s}, \quad \forall s \in [\![1,n]\!] \backslash \{i,j\}, \\ E_{r,i} & = & \sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{j,k} = A_{r,j}, \\ E_{r,j} & = & \sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{i,k} = A_{r,i}. \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{E}_{:,s} & = & \boldsymbol{A}_{:,s}, \quad \forall s \in [\![1,n]\!] \backslash \{i,j\}, \\ \boldsymbol{E}_{:,i} & = & \boldsymbol{A}_{:,j}, \\ \boldsymbol{E}_{:,j} & = & \boldsymbol{A}_{:,i}. \end{array}\right.$$

Q. 3

a. Calculer le déterminant de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

b. Déterminer l'inverse de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

R. 3

a. $\det(\mathbb{P}) = -1$, si $i \neq j$ et $\det(\mathbb{P}) = 1$ sinon.

b. Immédiat par calcul direct on a $\mathbb{P}\mathbb{P} = \mathbb{I}$ et donc la matrice $\mathbb{P}$ est inversible et $\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}$.

Exercice 3 : Matrice d'élimination

Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. On note $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline -v_2/v_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{3.1}$$

Q. 1

a. Calculer le déterminant de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.

b. Déterminer l'inverse de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$.

R. 1

a. La matrice $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$ est triangulaire : son déterminant est donc le produit de ses éléments diagonaux (Proposition 2.35 de [1]) On a alors $\det(\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}) = 1$.

b. Pour calculer son inverse qui existe puisque $\det(\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}) \neq 0$, on écrit $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$ sous forme bloc :

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array}\right)$$

avec $\boldsymbol{e} = (-v_2/v_1, \dots, -v_n/v_1)^{\mathsf{t}} \in \mathbb{C}^{n-1}$ On note $\mathbb{X} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son inverse qui s'écrit avec la même structure bloc

$$\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hline \boldsymbol{c} & \mathbb{D} \end{array}\right)$$

avec $a \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$.
La matrice $\mathbb{X}$ est donc solution de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} = \mathbb{I}$. Grace à l'écriture bloc des matrices on en déduit rapidement la

matrice $\mathbb{X}$. En effet, en utilisant les produits blocs des matrices, on obtient

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^{\mathsf{t}} \\ \hline \boldsymbol{e} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hline \boldsymbol{c} & \mathbb{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 \times a & 1 \times \boldsymbol{b}^* + \mathbf{0}_{n-1}^{\mathsf{t}} \times \mathbb{D} \\ \hline \boldsymbol{e} \times a + \mathbb{I}_{n-1} \times \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{b}^* + \mathbb{I}_{n-1} \times \mathbb{D} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hline a\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} \end{array}\right)$$

Comme $\mathbb{X}$ est l'inverse de $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}$, on a $\mathbb{E}^{[\boldsymbol{v}]}\mathbb{X} = \mathbb{I}$ et donc en écriture bloc

$$\left(\begin{array}{c|c} a & \boldsymbol{b}^* \\ \hline a\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c} & \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \mathbf{0}_{n-1}^{\mathsf{t}} \\ \hline \mathbf{0}_{n-1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array}\right).$$

Ceci revient à résoudre les 4 équations

$$a = 1, \quad \boldsymbol{b}^* = \mathbf{0}_{n-1}^{\mathsf{t}}, \quad a\boldsymbol{e} + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}_{n-1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{e}\boldsymbol{b}^* + \mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$$

qui donnent immédiatement $a = 1$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}_{n-1}$, $\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{e}$ et $\mathbb{D} = \mathbb{I}_{n-1}$. On obtient le résultat suivant

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline -\boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline \boldsymbol{e} & & \mathbb{I}_{n-1} & \end{array}\right) = \mathbb{I}_n.$$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. On note $\boldsymbol{A}_{:,j}$ le j-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{i,:}$ son i-ème vecteur ligne. On pose $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_{:,1}$.

Q. 2

a. *Calculer* $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}$ *en fonction des vecteurs lignes de* $\mathbb{A}$.

b. *Montrer que la première colonne de* $\tilde{\mathbb{A}}$ *est le vecteur* $(A_{1,1}, 0, \dots, 0)^{\boldsymbol{t}}$ *i.e.*

$$\mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1 \tag{3.2}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ *est le premier vecteur de la base canonique de* $\mathbb{C}^n$.

R. 2

a. Pour simplifier les notations, on note $\mathbb{E} = \mathbb{E}^{[\boldsymbol{A}_1]}$. Par définition du produit de deux matrices on a

$$\tilde{A}_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} E_{i,k}A_{k,j}, \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2.$$

Quand $i = 1$, on a par construction $E_{1,k} = \delta_{1,k}$ et donc

$$\tilde{A}_{1,j} = A_{1,j}, \ \forall j \in [\![1,n]\!] \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{A}}_{1,:} = \boldsymbol{A}_{1,:}. \tag{R3.2}$$

Pour $i \geqslant 2$, on a $E_{i,1} = -\frac{v_i}{v_1}$ et $E_{i,k} = \delta_{i,k}$, $\forall k \in [\![2,n]\!]$. On obtient alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$

$$\tilde{A}_{i,j} = E_{i,1}A_{1,j} + \sum_{k=2}^{n} E_{i,k}A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1}A_{1,j} + \sum_{k=2}^{n} \delta_{i,k}A_{k,j} = -\frac{v_i}{v_1}A_{1,j} + A_{i,j}$$

ce qui donne pour tout $i \in [\![2,n]\!]$

$$\tilde{A}_{i,j} = A_{i,j} - \frac{v_i}{v_1}A_{1,j}, \ \forall j \in [\![1,n]\!] \quad \Longleftrightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{A}}_{i,:} = -\frac{v_i}{v_1}\boldsymbol{A}_{1,:} + \boldsymbol{A}_{i,:} \tag{R3.3}$$

En conclusion, la matrice $\tilde{\mathbb{A}}$ s'écrit

$$\tilde{\mathbb{A}} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{A}_{1,:} \\ \hline \boldsymbol{A}_{2,:} - (v_2/v_1)\boldsymbol{A}_{1,:} \\ \hline \vdots \\ \hline \boldsymbol{A}_{n,:} - (v_n/v_1)\boldsymbol{A}_{1,:} \end{array}\right)$$

b. De (R3.2), on tire $\tilde{A}_{1,1} = A_{1,1}$. A partir de (R3.3) on obtient pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $\tilde{A}_{i,1} = A_{i,1} - \frac{v_i}{v_1} A_{1,1}$. Par construction $v_j = A_{j,1}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, ce qui donne $\tilde{A}_{i,1} = 0$.
La première colonne de $\tilde{\mathbb{A}}$ est $(1, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{t}}$.

Exercice 4 : Méthode de Gauss, écriture algébrique

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Q. 1

Montrer qu'il existe une matrice $\mathbb{G} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(\mathbb{G})| = 1$ et $\mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de C^n.

R. 1

D'après le Lemme 2.2 de [2], si $A_{1,1} \neq 0$, le résultat est immédiat.
Dans l'énoncé rien ne vient corroborer cette hypothèse. Toutefois, comme la matrice $\mathbb{A}$ est inversible, il existe au moins un $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $A_{p,1} \neq 0$. On peut même choisir le premier indice p tel que $|A_{p,1}| = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |A_{i,1}| > 0$ (pivot de l'algorithme de Gauss-Jordan). On note $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[1,p]}$ la matrice de permutation des lignes 1 et p (voir Lemme 2.1 de [2]).

$$|\det \mathbb{P}| = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}.$$

Par construction $(\mathbb{P}\mathbb{A})_{1,1} = A_{p,1} \neq 0$, et on peut alors appliquer le Lemme 2.2 de [2] à la matrice $(\mathbb{P}\mathbb{A})$ pour obtenir l'existence d'une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\det \mathbb{E} = 1$ et telle que

$$\mathbb{E}(\mathbb{P}\mathbb{A})\boldsymbol{e}_1 = A_{p,1}\boldsymbol{e}_1.$$

En posant $\mathbb{G} = \mathbb{E}\mathbb{P}$ et $\alpha = A_{p,1}$, on obtient bien $\mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$. De plus, on a

$$|\det \mathbb{G}| = |\det(\mathbb{E}\mathbb{P})| = |\det \mathbb{E} \times \det \mathbb{P}| = 1.$$

Remarque. *La matrice $\mathbb{G}$ étant inversible, on a*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{G}\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \mathbb{G}\boldsymbol{b}$$

ce qui correspond à la première permutation/élimination de l'algorithme de Gauss-Jordan.

Q. 2

a. *Montrer par récurrence sur l'ordre des matrices que pour toute matrice $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, il existe une matrice $\mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{S}_n| = 1$ et $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$ avec $\mathbb{U}_n$ matrice triangulaire supérieure inversible.*

b. *Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. En supposant connue la décompostion précédente $\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n$, expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.*

R. 2

a. On veut démontrer, par récurrence sur $n \geqslant 2$, la propriété suivante

$(\mathcal{P}_n)$

$\forall \mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, $\exists \mathbb{S}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $|\det \mathbb{S}_n| = 1$, tel que la matrice $\mathbb{U}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{S}_n\mathbb{A}$ soit une triangulaire supérieure inversible.

Initialisation : Pour $n = 2$. Soit $\mathbb{A}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ inversible. En utilisant la question précédente il existe $\mathbb{G}_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{G}_2| = 1$ et $\mathbb{G}_2\mathbb{A}_2\boldsymbol{e}_1 = \alpha\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note $\mathbb{U}_2 = \mathbb{G}_2\mathbb{A}_2$. Cette matrice s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{U}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \bullet \\ 0 & \bullet \end{pmatrix}$$

et elle est triangulaire supérieure. Les matrices $\mathbb{G}_2$ et $\mathbb{A}_2$ étant inversible, leur produit $\mathbb{U}_2$ l'est aussi. La proposition $(\mathcal{P}_2)$ est donc vérifiée avec $\mathbb{S}_2 = \mathbb{G}_2$.

Hérédité : Soit $n \geqslant 3$. On suppose que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vraie. Montrons que $(\mathcal{P}_n)$ est vérifiée.
Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible. En utilisant la question précédente il existe $\mathbb{G}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det \mathbb{G}_n| = 1$ et $\mathbb{G}_n\mathbb{A}_n\boldsymbol{e}_1 = \alpha_n\boldsymbol{e}_1$ avec $\alpha_n \neq 0$ et $\boldsymbol{e}_1$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On

note $\mathbb{V}_n = \mathbb{G}_n\mathbb{A}_n$. Cette matrice s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{V}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_n & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \bullet & \dots & \bullet \end{array}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{B}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right)$$

où $\boldsymbol{c}_{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $\mathbb{B}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Comme $\mathbb{G}_n$ et $\mathbb{A}_n$ sont inversibles, $\mathbb{V}_n$ l'est aussi. On en déduit donc que $\mathbb{B}_{n-1}$ est inversible car $0 \neq \det \mathbb{V}_n = \alpha_n \times \det \mathbb{B}_{n-1}$ et $\alpha_n \neq 0$.
On peut donc utiliser la propriété $(\mathcal{P}_{n-1})$ (hyp. de récurrence) sur la matrice $\mathbb{B}_{n-1}$: il existe donc $\mathbb{S}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, avec $|\det \mathbb{S}_{n-1}| = 1$, tel que la matrice $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{S}_{n-1}\mathbb{B}_{n-1}$ soit une triangulaire supérieure inversible.
Soit $\mathbb{Q}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{Q}_n = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{S}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_n\mathbb{G}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{Q}_n\mathbb{V}_n &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{S}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{B}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{S}_{n-1}\mathbb{B}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_n & \boldsymbol{c}_{n-1}^* \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{U}_{n-1} \\ 0 & \end{array}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{U}_n
\end{aligned}$$

La matrice $\mathbb{U}_n$ est triangulaire supérieure inversible car $\mathbb{U}_{n-1}$ l'est aussi et $\alpha_n \neq 0$.
On pose $\mathbb{S}_n = \mathbb{Q}_n\mathbb{G}_n$. On a donc

$$\mathbb{S}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{U}_n.$$

De plus, comme on a $\det \mathbb{S}_n = \det \mathbb{Q}_n \times \det \mathbb{G}_n$, et $\det \mathbb{Q}_n = \det \mathbb{S}_{n-1}$, on obtient, en utilisant $|\det \mathbb{G}_n| = 1$ et l'hypothèse de récurrence $|\det \mathbb{S}_{n-1}| = 1$, que

$$|\det \mathbb{S}_n| = 1.$$

Ceci prouve la véracité de la proposition $(\mathcal{P}_n)$.

b. Comme $\mathbb{S}_n$ est inversible, on a en multipliant à gauche le système par $\mathbb{S}_n$

$$\mathbb{A}_n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \mathbb{S}_n\mathbb{A}_n\boldsymbol{x} = \mathbb{S}_n\boldsymbol{b} \iff \mathbb{U}_n\boldsymbol{x} = \mathbb{S}_n\boldsymbol{b}$$

Pour déterminer le vecteur $\boldsymbol{x}$, on peut alors résoudre le dernier système par l'algorithme de remontée.

Q. 3 *Que peut-on dire si $\mathbb{A}$ est non inversible?*

R. 3 Si $\mathbb{A}$ est non inversible, alors dans la première question nous ne sommes pas assurés d'avoir $\alpha \neq 0$. Cependant l'existence de la matrice $\mathbb{G}$ reste avérée.
Pour la deuxième question, le seul changement vient du fait que la matrice $\mathbb{U}_n$ n'est plus inversible.

Exercice 5 : Vers la factorisation $\mathbb{LU}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre i, notées Δ_i, $i \in [\![1, n]\!]$.
Montrer par récurrence sur l'ordre n de la matrice $\mathbb{A}$ qu'il existe une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice $\mathbb{U}$ définie par

$$\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$$

soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i/(U_{1,1} \times \dots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

Correction Soit $n \geqslant 2$, on va démontrer par récurrence sur n la proposition suivante

$(\mathcal{P}_n)$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, les sous-matrices principales d'ordre i de $\mathbb{A}$, notées Δ_i, sont inversibles, alors il existe une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i/(U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

Initialisation: $n = 2$ Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Si $\Delta_1 = A_{1,1} \neq 0$ et $\Delta_2 = \mathbb{A}$ inversible. On va construire une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure.

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ E_{2,1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ 0 & U_{2,2} \end{pmatrix} = \mathbb{U}$$

On a donc $U_{2,1} = 0 = E_{2,1}A1, 1 + A_{2,1}$. Comme par hypothèse, $A_{1,1} \neq 0$, on a $E_{2,1} = -A_{2,1}/A_{1,1}$, ce qui donne

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{A_{2,1}}{A_{1,1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} - \frac{A_{2,1}}{A_{1,1}} A_{1,2} \end{pmatrix} = \mathbb{U}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} U_{1,1} &= A_{1,1} = \det(\Delta_1), \\ U_{2,2} &= A_{2,2} - \frac{A_{2,1}}{A_{1,1}} A_{1,2} = \frac{A_{2,2}A_{1,1} - A_{2,1}A_{1,2}}{A_{1,1}} = \frac{\det \mathbb{A}}{U_{1,1}} = \frac{\det \Delta_2}{U_{1,1}}. \end{aligned}$$

Hérédité: Soit $n \geqslant 3$, on suppose que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vérifiée. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. dont toutes les sous-matrices principales d'ordre i de $\mathbb{A}$, notées Δ_i, $i \in [\![1, n]\!]$ sont inversibles. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme bloc

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{A}_{n-1} & \boldsymbol{g} \\ \hdashline \boldsymbol{f}^* & A_{n,n} \end{array}\right)$$

avec $\mathbb{A}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, $\boldsymbol{f} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $\boldsymbol{g} \in \mathbb{C}^{n-1}$. Comme les $n-1$ premières sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont les $n-1$ sous-matrices principales de $\mathbb{A}_{n-1}$, ces dernières sont, par hypothèse, inversibles. Par hypothèse de récurrence sur $\mathbb{A}_{n-1}$, il existe une matrice $\mathbb{E}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{E}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}$ soit triangulaire supérieure.

On va construire (si possible) une matrice $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure. La matrice $\mathbb{E}$ s'écrit sous forme bloc

$$\mathbb{E} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{X}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \hdashline \boldsymbol{h}^* & 1 \end{array}\right)$$

avec $\mathbb{X}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et $\boldsymbol{h} \in \mathbb{C}^{n-1}$.

On a alors

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{X}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \hdashline \boldsymbol{h}^* & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{A}_{n-1} & \boldsymbol{g} \\ \hdashline \boldsymbol{f}^* & A_{n,n} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{X}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1} & \mathbb{X}_{n-1}\boldsymbol{g} \\ \hdashline \boldsymbol{h}^*\mathbb{A}_{n-1} + \boldsymbol{f}^* & \boldsymbol{h}^*\boldsymbol{g} + A_{n,n} \end{array}\right)$$

Pour que la matrice $\mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure, il faut que $\mathbb{X}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}$ soit triangulaire supérieure et $\boldsymbol{h}^*\mathbb{A}_{n-1} + \boldsymbol{f}^* = 0$. En choisissant $\mathbb{X}_{n-1} = \mathbb{E}_{n-1}$, on a $\mathbb{U}_{n-1} = \mathbb{X}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1}$ triangulaire supérieure. La matrice $\mathbb{A}_{n-1}$ étant inversible, on a $\boldsymbol{h}^* = -\boldsymbol{f}^*\mathbb{A}_{n-1}^{-1}$

On obtient donc

$$\mathbb{E}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{E}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \hdashline \boldsymbol{h}^* & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{A}_{n-1} & \boldsymbol{g} \\ \hdashline \boldsymbol{f}^* & A_{n,n} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{U}_{n-1} & \mathbb{E}_{n-1}\boldsymbol{g} \\ \hdashline 0 & A_{n,n} - \boldsymbol{h}^*\boldsymbol{g} \end{array}\right) = \mathbb{U}.$$

On a donc construit une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, $\mathbb{E}$, telle que $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$ soit triangulaire supérieure. Par construction, on a

$$U_{i,j} = (\mathbb{U}_{n-1})_{i,j}, \ \forall (i,j) \in [\![1, n-1]\!]^2$$

et donc, par hypothèse de récurrence sur $\mathbb{U}_{n-1}$, on obtient

$$U_{i,i} = \det \Delta_i/(U_{1,1} \times \cdots \times U_{i-1,i-1}), \quad \forall i \in [\![1, n-1]\!].$$

De plus on a,

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{E}\mathbb{A}) &= \det(\mathbb{E})\det(\mathbb{A}) \\
&= \det(\mathbb{A}) && \text{car } \mathbb{E} \text{ tri. inf. à diag. unité} \\
&= \det(\Delta_n). && \text{car } \Delta_n = \mathbb{A}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{U}) &= \prod_{k=1}^{n} U_{k,k} && \text{car } \mathbb{U} \text{ tri. sup.} \\
&= U_{n,n} \prod_{k=1}^{n-1} U_{k,k}
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathbb{A}$, on en déduit que la matrice $\mathbb{U}$ est inversible (car $\mathbb{E}$ et $\mathbb{A}$ le sont), que ses coefficients sont non nuls et, en prenant le déterminant:

$$\det(\Delta_n) = U_{n,n} \prod_{k=1}^{n-1} U_{k,k}$$

et donc

$$U_{n,n} = \frac{\det(\Delta_n)}{\prod_{k=1}^{n-1} U_{k,k}}.$$

La proposition $(\mathcal{P}_n)$ est donc vraie.

Conclusion: On a démontré par récurrence que la proposition $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

◇

Exercice 6 : factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 *Montrer que s'il existe $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ alors $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.*

R. 1 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coeffcients diagonaux strictement positifs.
La matrice $\mathbb{A}$ est alors hermitienne car

$$\mathbb{A}^* = (\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*)^* = (\mathbb{L}^*)^*\mathbb{D}^*\mathbb{L}^* = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*.$$

De plus $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ on a

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{D}\mathbb{L}^*\boldsymbol{x}, \mathbb{L}^*\boldsymbol{x}\rangle$$

On pose $\boldsymbol{y} = \mathbb{L}^*\boldsymbol{x} \neq 0$ car $\boldsymbol{x} \neq 0$ et $\mathbb{L}^*$ inversible. On obtient alors

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{D}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} D_{i,i}|y_i|^2 > 0$$

car $\mathbb{D}$ diagonale, $D_{i,i} > 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$ et $\boldsymbol{y} \neq 0$.
La matrice hermitienne $\mathbb{A}$ est donc bien définie positive.

Q. 2 *Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive alors il existe $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$.*

R. 2 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive.
D'après le Corollaire 2.6 de [2], la matrice $\mathbb{A}$ admet une unique factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.
D'après le Théorème 2.8, la matrice hermitienne $\mathbb{A}$ peut alors s'écrire sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ où $\mathbb{D}$ est diagonale à coefficients réels et $\mathbb{L}$ triangulaire inférieure à diagonale unité.
Il reste à démontrer que $D_{i,i} > 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

Comme $\mathbb{A}$ est définie positive, on a $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, $\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$. Or on a

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^* \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\mathbb{L}^* \boldsymbol{x}, \mathbb{L}^* \boldsymbol{x} \rangle$$

On note $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$, la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et on rappelle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\langle \mathbb{D}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i \rangle = D_{i,i}$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. En choisissant $\boldsymbol{x} = (\mathbb{L}^*)^{-1} \boldsymbol{e}_i \neq 0$, on obtient alors

$$\langle \mathbb{D}\mathbb{L}^* \boldsymbol{x}, \mathbb{L}^* \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{D}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i \rangle = D_{i,i} > 0.$$

Exercice 7 : factorisation de Cholesky

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1 *Montrer que si $\mathbb{A}$ admet une factorisation factorisation régulière de Cholesky alors $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.*

R. 1 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation régulière de Cholesky $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$ avec $\mathbb{B}$ est une matrice triangulaire inférieure inversible.
La matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne car

$$\mathbb{A}^* = (\mathbb{B}\mathbb{B}^*)^* = (\mathbb{B}^*)^* \mathbb{B}^* = \mathbb{B}\mathbb{B}^* = \mathbb{A}.$$

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, on a

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{B}\mathbb{B}^* \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \langle \mathbb{B}^* \boldsymbol{x}, \mathbb{B}^* \boldsymbol{x} \rangle = \|\mathbb{B}^* \boldsymbol{x}\|^2 > 0$$

car $\mathbb{B}^* \boldsymbol{x} \neq 0$ ($\mathbb{B}^*$ inversible et $\boldsymbol{x} \neq 0$). Donc la matrice $\mathbb{A}$ est bien hermitienne définie positive.

Q. 2 *Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive alors elle admet une factorisation factorisation régulière de Cholesky.*

R. 2 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive.
D'après le Corollaire 2.9, il existe alors une matrice $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et une matrice $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale à coefficient strictement positifs telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*.$$

On note $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale inversible vérifiant $\mathbb{H}^2 = \mathbb{D}$ (i.e. $H_{i,i} = \pm\sqrt{D_{i,i}} \neq 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$). On a alors

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{H}\mathbb{H}\mathbb{L}^* = (\mathbb{L}\mathbb{H})(\mathbb{L}\mathbb{H})^*$$

En posant $\mathbb{B} = \mathbb{L}\mathbb{H}$, la matrice $\mathbb{B}$ est bien triangulaire inférieure inversible car produit d'une matrice triangulaire inférieure inversible par une matrice diagonale inversible et on a $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$.

Q. 3 *On suppose que $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.*

a. Montrer que $\mathbb{A}$ admet une factorisation positive de Cholesky.

b. Montrer que cette factorisation est unique.

R. 3

a. En choisissant, dans la question précédente,

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad H_{i,i} = \sqrt{D_{i,i}} > 0,$$

la matrice $\mathbb{B} = \mathbb{L}\mathbb{H}$ triangulaire inférieure a alors pour éléments diagonaux

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad B_{i,i} = H_{i,i} > 0.$$

b. Montrons qu'une factorisation positive de Cholesky est unique.
Soient $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$ deux factorisations positives de la matrice $\mathbb{A}$, on a donc

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}_1\mathbb{B}_1^* = \mathbb{B}_2\mathbb{B}_2^*.$$

En multipliant à gauche par $\mathbb{B}_2^{-1}$ et à droite par $(\mathbb{B}_1^*)^{-1}$ cette équation on obtient

$$\mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2^*(\mathbb{B}_1^*)^{-1} = \mathbb{B}_2^*(\mathbb{B}_1^{-1})^* = (\mathbb{B}_1^{-1}\mathbb{B}_2)^*$$

En notant $\mathbb{G} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1$, on tire de l'équation précédente

$$\mathbb{G} = (\mathbb{G}^{-1})^*. \tag{R7.4}$$

Or, on a

- Proposition 2.35: l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs est aussi une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs.
- Proposition 2.34: le produit de matrices triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs reste triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement positifs.

On en déduit que les matrices $\mathbb{G} = \mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{G}^{-1} = \mathbb{B}_1^{-1}\mathbb{B}_2$ sont triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs.

De plus l'équation (R7.4) identifie la matrice triangulaire inférieure $\mathbb{G}$ à la matrice triangulaire supérieure $(\mathbb{G}^{-1})^*$: ce sont donc des matrices diagonales à coefficients diagonaux réels strictement positifs et on en déduit

$$(\mathbb{G}^{-1})^* = \mathbb{G}^{-1}$$

et

$$\forall i \in_f cset1n, \quad (\mathbb{G}^{-1})_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{G}_{i,i}} > 0.$$

De l'équation (R7.4), on obtient alors $\mathbb{G} = \mathbb{G}^{-1}$ et donc

$$\forall i \in_f cset1n, \mathbb{G}_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{G}_{i,i}} > 0.$$

On en déduit alors que $\mathbb{G} = \mathbb{I}$ et donc

$$\mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1 = \mathbb{I}$$

c'est à dire $\mathbb{B}_2^{-1}$ est l'inverse de $\mathbb{B}_1$ qui est unique, donc $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$.

Exercice 8 : Propriété de la matrice élémentaire de Householder

Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On note $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{H} = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.$$

Q. 1

a. *Montrer que $\mathbb{H}$ est hermitienne.*

b. *Montrer que $\mathbb{H}$ est unitaire.*

R. 1

a. Cette matrice est hermitienne car

$$\mathbb{H}^* = (\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)^* = \mathbb{I} - 2(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)^* = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* = \mathbb{H}.$$

b. La matrice $\mathbb{H}$ est unitaire si $\mathbb{H}^*\mathbb{H} = \mathbb{I}$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^*\mathbb{H} = \mathbb{H}\mathbb{H} &= (\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)(\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)\\ &= \mathbb{I} - 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* + 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, on a $\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$ et donc

$$\mathbb{H}^*\mathbb{H} = \mathbb{I} - 4\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^* + 4\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}^* = \mathbb{I}.$$

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$. On note $\boldsymbol{x}_{\|} = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{x}_{\perp} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\|}$.

Q. 2

Montrer que

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{x}_{\perp} + \boldsymbol{x}_{\|}) = \boldsymbol{x}_{\perp} - \boldsymbol{x}_{\|}.$$

et

$$\mathbb{H}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad si \ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle = 0.$$

R. 2 On note que par construction $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_\perp \rangle = 0$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_\perp \rangle &= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\parallel \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}_\parallel \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u} \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \\
&= 0 \ \text{ car } \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \|\boldsymbol{u}\|_2^2 = 1.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel) = (\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)\,(\boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel) &= \boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel - 2\boldsymbol{u}\,\underbrace{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{x}_\perp}_{=0} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{x}_\parallel \\
&= \boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\big(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}\big) = \boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}\,\underbrace{\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{u}}_{=1} \\
&= \boldsymbol{x}_\perp + \boldsymbol{x}_\parallel - 2\boldsymbol{x}_\parallel \\
&= \boldsymbol{x}_\perp - \boldsymbol{x}_\parallel.
\end{aligned}$$

Si $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$ alors $\boldsymbol{x}_\parallel = 0$ et $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\perp$.

Exercice 9

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$. On va chercher $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$, vérifiant

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha \boldsymbol{b}. \tag{9.1}$$

Q. 1 *Montrer que si α et $\boldsymbol{u}$ vérifient (9.1) alors*

a. on a

$$|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2 \tag{9.2}$$

b. on a

$$\boldsymbol{a} - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{b} \tag{9.3}$$

c. on en déduit que

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle|^2 = \frac{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle - \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle}{2} \tag{9.4}$$

R. 1 Par la suite, on pose $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\boldsymbol{u})$ pour alléger les notations.

a. On a

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a}\|_2^2 = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle &= \langle \mathbb{H}^*\mathbb{H}\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \quad \text{car } \mathbb{H} \text{ unitaire} \\
&= \langle \mathbb{H}\boldsymbol{a}, \mathbb{H}\boldsymbol{a} \rangle \quad \text{par définition du produit scalaire} \\
&= \|\mathbb{H}\boldsymbol{a}\|_2^2 = \|\alpha \boldsymbol{b}\|_2^2 = |\alpha|^2\,\|\boldsymbol{b}\|_2^2 = |\alpha|^2.
\end{aligned}$$

b. Pour établir (9.3), on écrit

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b} &\iff (\mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b} \\
&\iff \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{a}) = \alpha\boldsymbol{b} \\
&\iff \boldsymbol{a} - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

c. En effectuant le produit scalaire (à gauche) avec $\boldsymbol{a}$ de (9.3), on obtient

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle - 2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a} \rangle \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$$

ce qui prouve (9.4).

Nous allons maintenant établir une condition pour que (9.4) ait un sens.

Q. 2

On suppose que $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle)\ [\pi]$

a. *Montrer que* $\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}$.

b. *Montrer que* $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}^{*+}$.

R. 2

a. On a par définition de l'argument $\alpha = |\alpha|e^{\imath\arg\alpha}$ et $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = |\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle|e^{\imath\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle)}$ ce qui donne

$$\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = |\alpha||\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle|e^{\imath(\arg\alpha+\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle))} \tag{R9.5}$$

et donc $\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ est réel si $\arg\alpha + \arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) = 0\ [\pi]$.

b. On vient de demontrer que $\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}$ et donc $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \in \mathbb{R}$. Il reste donc à montrer que $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle > 0$.

- Si $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle)+\pi\ [2\pi]$, alors de (R9.5) on obtient $\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \leqslant 0$ et donc $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle-\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \geqslant \|\boldsymbol{a}\|_2 > 0$ car $\boldsymbol{a} \neq 0$.
- Si $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle)\ [2\pi]$, alors de (R9.5) on obtient $\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \geqslant 0$.
  Comme les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ ne sont pas colinéaires, on a inégalité stricte dans Cauchy-Schwarz :

  $$|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle| < \|\boldsymbol{a}\|_2 \|\boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{a}\|_2 .$$

  On obtient donc

  $$0 \leqslant \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \leqslant |\alpha||\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle| < |\alpha|\,\|\boldsymbol{a}\|_2 = \|\boldsymbol{a}\|_2^2$$

  Attention, dans ce cas $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle$ peut-être très petit.

Q. 3

Soient α *et* $\boldsymbol{u}$ *vérifiant* (9.1). *En déduire que si* $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle)\ [\pi]$ *alors* $\boldsymbol{u}$ *est donné par*

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{2\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle}(\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}). \tag{9.5}$$

et $\|u\|_2 = 1$.

R. 3

On peut noter que $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle \neq 0$ car sinon, d'après (9.3), $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$ or par hypothèse $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont non colinéaires. On obtient alors immédiatement (9.5) à partir de (9.3)
Vérifions que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On a

$$\|\boldsymbol{u}\|_2^2 = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle = \frac{1}{4|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle|^2}\langle \boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\rangle$$

En utilisant (9.4), on obtient

$$\begin{aligned} 4|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{a}\rangle|^2 &= 2(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) \\ &= 2\|\boldsymbol{a}\|_2^2 - 2\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\rangle &= \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle - \overline{\alpha}\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + |\alpha|^2\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\rangle = \|\boldsymbol{a}\|_2^2 - \overline{\alpha}\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + |\alpha|^2 \\ &= 2\|\boldsymbol{a}\|_2^2 - \overline{\alpha}\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle - \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \\ &= 2\|\boldsymbol{a}\|_2^2 - 2\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \quad \text{car } \alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \overline{(\alpha\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle)} = \overline{\alpha}\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$.

Exercice 10

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$.

Q. 1

Ecrire la fonction algorithmique Householder *permettant de retourner une matrice de Householder* $\mathbb{H}$ *et* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tels que* $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$. *Le choix du* α *est fait par le paramètre* δ *(*0 *ou* 1*) de telle sorte que* $\arg\alpha = -\arg(\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) + \delta\pi$ *avec* $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$.
Des fonctions comme dot$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *(produit scalaire de deux vecteurs),* norm$(\boldsymbol{a})$ *(norme 2 d'un vecteur),* arg(z) *(argument d'un nombre complexe),* matprod$(\mathbb{A}, \mathbb{B})$ *(produit de deux matrices),* ctranspose$(\mathbb{A})$ *(adjoint d'une matrice), ...*

pourront être utilisées

R. 1

Soient $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{C}^n$.

Les données du problème sont $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et δ. On veut calculer α et la matrice $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$.

Algorithme 2 Calcul du α et de la matrice de Householder $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$ telle que $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$.

Données : $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$: deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$ non nuls et non colinéaires.
δ : 0 ou 1, permet de déterminer α.
Résultat : $\mathbb{H}$: matrice de Householder dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
α : nombre complexe, de module $\|\boldsymbol{a}\|_2$ et d'argument $-\arg(\langle\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle) + \delta\pi$.

```
Fonction [H, α] ← Householder( a, b, δ )
    ab ← dot(a, b)                                  ▷ dot(a, b) = Σ_{i=1}^n conj(a_i) b_i
    α ← norm(a) * exp(i * (δ * π − arg(ab)))
    u ← a − α * b
    u ← u/norm(u)
    H ← eye(n) − 2 * matprod(u, ctranspose(u))
Fin Fonction
```

Q. 2

Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction vecrand(n) *retournant un vecteur aléatoire de* $\mathbb{C}^n$*, les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans* $]0, 1[$ *(loi uniforme).*

R. 2

```
n ← 100
a ← vecrand(n)
b ← vecrand(n)
b ← b/norm(b, 2)
[H, α] ← Householder(a, b, 0)
error ← norm(H * a − α * b, 2)
```

Q. 3

Proposer un programme permettant de vérifier que $\delta = 1$ *est le "meilleur" choix.*

R. 3

```
n ← 100
a ← vecrand(n)
b ← a + 1e − 6 * vecrand(n)
b ← b/norm(b, 2)
[H_1, α_1] ← Householder(a, b, 1)
[H_0, α_0] ← Householder(a, b, 0)
error0 ← norm(H_0 * a − α_0 * b, 2)/(1 + abs(α_0))
error1 ← norm(H_1 * a − α_1 * b, 2)/(1 + abs(α_1))
```

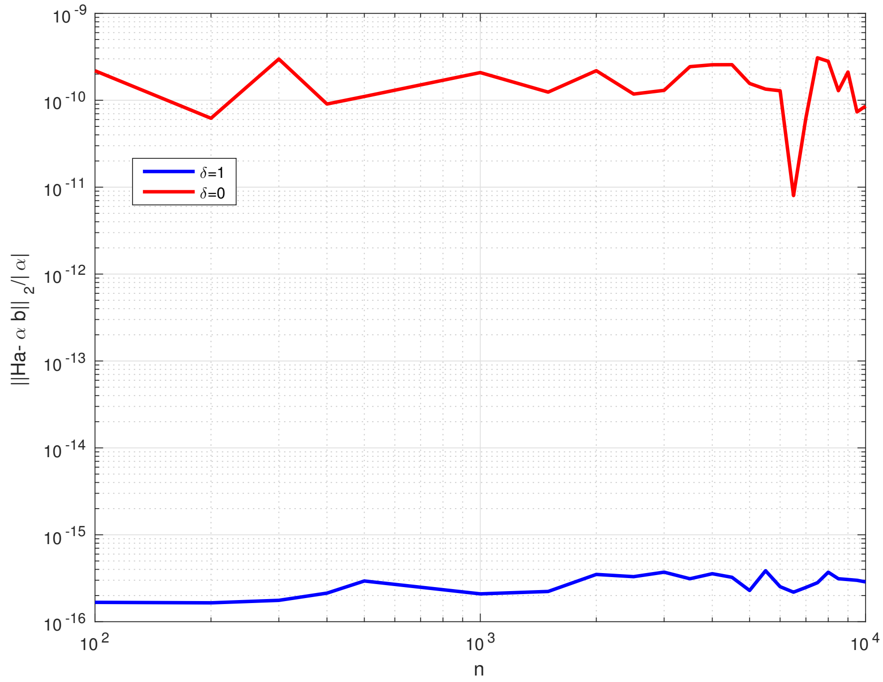

Figure 1: Choix de α dans Householder : erreur relative en norme L_2

Exercice 11

Soit $n \geqslant 2$.

$(\mathcal{P}_n)$

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{U}_n \mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \tag{11.1}$$

Q. 1 *Démontrer par récurrence que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(\mathcal{P}_n)$ *est vraie.*

R. 1

- **Initialisation** : on va montrer que $(\mathcal{P}_2)$ est vraie
  Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On note $\boldsymbol{a} = \mathbb{A}_{:,1}$ (première colonne de $\mathbb{A}$) et $\mathbb{b} = (1,0)^{\mathsf{t}}$.
  - Si $\boldsymbol{a} \neq 0$ et si $\boldsymbol{a}$ non colinéaire à $\boldsymbol{b}$, on est sous les conditions du théorème ??. On défini alors $\alpha \in \mathbb{C}$ $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg\alpha = -\arg\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \delta\pi$ (choix $\delta = 1$ préférable) Dans ce cas on a
  $$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}.$$
  On pose $\mathbb{U} = \mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)$ qui est une matrice unitaire.
  - Si $\boldsymbol{a} = 0$ ou si $\boldsymbol{a}$ est colinéaire à $\boldsymbol{b}$, alors $\boldsymbol{a}_2 = \mathbb{A}_{2,1} = 0$ et on pose $\mathbb{U} = \mathbb{I}$, qui est unitaire, et $\alpha = \pm\boldsymbol{a}_1 (= \pm\mathbb{A}_{1,1})$.

  Dans les 2 cas, on obtient
  $$\mathbb{U}\mathbb{A} = \mathbb{U}\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{:,1} & \mathbb{A}_{:,2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}\mathbb{A}_{:,1} & \mathbb{U}\mathbb{A}_{:,2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha\boldsymbol{b} & \mathbb{U}\mathbb{A}_{:,2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha & \mathbb{U}\mathbb{A}_{:,2} \\ 0 & \end{array}\right) = \mathbb{R}$$
  où $\mathbb{R}$ est triangulaire supérieure.

- **Hérédité** : soit $n \geqslant 2$, on suppose que $(\mathcal{P}_{n-1})$ est vérifiée, on va alors montrer que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.
  Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\boldsymbol{a} = \mathbb{A}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ (première colonne de $\mathbb{A}$) et $\mathbb{b} = \boldsymbol{e}_1$, premier vecteur de la base canonique ($\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{b}_i = \delta_{1,i}$).
  - Si $\boldsymbol{a} \neq 0$ et si $\boldsymbol{a}$ non colinéaire à $\boldsymbol{b}$, on est sous les conditions du théorème ??. On défini alors $\alpha \in \mathbb{C}$ $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg\alpha = -\arg\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \delta\pi$ (choix $\delta = 1$ préférable) Dans ce cas on a
  $$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}.$$

On pose $\mathbb{H} = \mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}-\alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)$ qui est une matrice unitaire.

- Si $\boldsymbol{a} = 0$ ou si $\boldsymbol{a}$ est colinéaire à $\boldsymbol{b}$, alors $\forall i \in [\![2, n]\!]$, $\boldsymbol{a}_i = \mathbb{A}_{i,1} = 0$. On pose $\mathbb{H} = \mathbb{I}$, qui est unitaire, et $\alpha = \pm\boldsymbol{a}_1 (= \pm\mathbb{A}_{1,1})$.

Dans les 2 cas, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{H}\mathbb{A} &= \mathbb{H}\left(\ \mathbb{A}_{:,1} \mid \mathbb{A}_{:,2} \mid \dots \mid \mathbb{A}_{:,n}\ \right) = \left(\ \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,1} \mid \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,2} \mid \dots \mid \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,n}\ \right)\\ &= \left(\ \alpha\boldsymbol{e}_1 \mid \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,2} \mid \dots \mid \mathbb{H}\mathbb{A}_{:,n}\ \right)\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbb{H}\mathbb{A}$ s'écrit aussi sous la forme

$$\mathbb{H}\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{A}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

où $\mathbb{A}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. On peut donc appliquer à $\mathbb{A}_{n-1}$ l'hypothèse de récurrence: $\exists \mathbb{U}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ unitaire, produit d'au plus $(n-2)$ matrices de Householder, et, $\exists \mathbb{R}_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que

$$\mathbb{U}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1} = \mathbb{R}_{n-1}.$$

On défini alors

$$\mathbb{U} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

On a

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}^* & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}\mathbb{U}_{n-1}^* & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Comme $\mathbb{U}_{n-1}$ est unitaire, on en déduit que $\mathbb{U}$ est aussi unitaire. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{U}(\mathbb{H}\mathbb{A}) &= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{A}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{U}_{n-1}\mathbb{A}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right)\\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{R}_{n-1} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{R}_{n-1}$ est triangulaire supérieure, on en déduit que $\mathbb{R}_n$ est aussi triangulaire supérieure. On pose $\mathbb{U}_n = \mathbb{U}\mathbb{H}$. Cette matrice est unitaire, car produit de deux matrices unitaires, et on a

$$\mathbb{U}_n\mathbb{A} = \mathbb{R}_n.$$

La proposition $(\mathcal{P}_n)$ est donc vérifiée.

- **Conclusion** : on vient de démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie.

Q. 2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice unitaire $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

R. 2

D'après la proposition $(\mathcal{P}_n)$, Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{U}\mathbb{A} = \mathbb{R}.$$

Comme $\mathbb{U}$ est unitaire, on a $\mathbb{U}^* = \mathbb{U}^{-1}$ et donc
$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^*\mathbb{R}.$$
En posant $\mathbb{Q} = \mathbb{U}^*$, qui est unitaire, on obtient le résultat demandé.

$(\mathcal{Q}_n)$

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Il existe une matrice orthogonale $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que
$$\mathbb{U}_n\mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \tag{11.2}$$

Q. 3 *La proposition $(\mathcal{Q}_n)$ est-elle vérifiée pour tout $n \geqslant 2$? Justifier.*

R. 3 La proposition $(\mathcal{Q}_n)$ est toujours vérifiée. En effet, en reprenant la démonstration par récurrence dans le cas complexe, on peut noter que toutes les matrices sont réelles y compris les matrices de Householder utilisées car les coefficients α sont nécessairement réels, et Les matrices unitaires réelles sont orthogonales.

Q. 4 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

a. *Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que*
$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

b. *Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficient diagonaux positifs ou nuls telles que*
$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

c. *On suppose $\mathbb{A}$ inversible. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une unique matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficient diagonaux strictement positifs telles que*
$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

R. 4

a. D'après la proposition $(\mathcal{Q}_n)$, Il existe une matrice orthogonale $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que
$$\mathbb{U}\mathbb{A} = \mathbb{R}.$$
Comme $\mathbb{U}$ est orthogonale, on a $\mathbb{U}^t = \mathbb{U}^{-1}$ et donc
$$\mathbb{A} = \mathbb{U}^t\mathbb{R}.$$
En posant $\mathbb{Q} = \mathbb{U}^t$, qui est orthogonale, on obtient le résultat demandé.

b. D'après la proposition $(\mathcal{Q}_n)$, Il existe une matrice orthogonale $\tilde{\mathbb{U}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\tilde{\mathbb{R}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que
$$\tilde{\mathbb{U}}\mathbb{A} = \tilde{\mathbb{R}}.$$
Soit S l'application telle que $S(x) = -1$, si $x < 0$ et $S(x) = +1$, si $x \geqslant 0$. Soit $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice diagonale telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{D}_{i,i} = S(\tilde{\mathbb{R}}_{i,i})$. Cette matrice est orthogonale.
On a alors
$$\mathbb{D}\tilde{\mathbb{U}}\mathbb{A} = \mathbb{D}\tilde{\mathbb{R}}.$$
On pose $\mathbb{U} = \mathbb{D}\tilde{\mathbb{U}}$ et $\mathbb{R} = \mathbb{D}\tilde{\mathbb{R}}$. Comme le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale, la matrice $\mathbb{U}$ est orthogonale. La matrice $\mathbb{R}$ est triangulaire supérieure car le produit d'une matrice diagonale par une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure. De plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a
$$\mathbb{R}_{i,i} = \mathbb{D}_{i,i}\tilde{\mathbb{R}}_{i,i} = S(\tilde{\mathbb{R}}_{i,i})\tilde{\mathbb{R}}_{i,i} = |\tilde{\mathbb{R}}_{i,i}| \geqslant 0.$$
En posant $\mathbb{Q} = \mathbb{U}^t$, on obtient le résultat souhaité.

c. On vient de démontrer, en **Q. 4** b., qu'il l existe une matrice orthogonale $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficient diagonaux positifs ou nuls telles que $\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}$.
Comme $\mathbb{A}$ inversible, on a
$$\det(\mathbb{A}) = \det(\mathbb{Q})\det(\mathbb{R}) \neq 0.$$

On en déduit que $\det(\mathbb{R}) \neq 0$. De plus, $\mathbb{R}$ étant triangulaire supérieure, on obtient

$$\det(\mathbb{R}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{R}_{i,i} \neq 0 \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{R}_{i,i} \neq 0.$$

et donc, tous les coefficient diagonaux de $\mathbb{R}$ sont strictement positifs.

Pour montrer l'unicité d'une telle factorisation, on note $\mathbb{Q}_1$, $\mathbb{Q}_2$, deux matrices orthogonales et $\mathbb{R}_1$, $\mathbb{R}_2$, deux matrices triangulaires à coefficients diagonaux strictements positifs telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}_1\mathbb{R}_1 = \mathbb{Q}_2\mathbb{R}_2.$$

On a alors

$$\mathbb{I} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{Q}_1\mathbb{R}_1\left(\mathbb{Q}_2\mathbb{R}_2\right)^{-1} = \mathbb{Q}_1\mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1}\mathbb{Q}_2^{-1}$$

et donc

$$\mathbb{Q}_1^{-1}\mathbb{Q}_2 = \mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{T}.$$

Comme $\mathbb{Q}_1$ est orthogonale on a $\mathbb{T} = \mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2$ et

$$\mathbb{T}^{\mathsf{t}}\mathbb{T} = (\mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2)^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2 = \mathbb{Q}_2^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_1\mathbb{Q}_1^{\mathsf{t}}\mathbb{Q}_2 = \mathbb{I}.$$

La matrice $\mathbb{T}$ est donc orthogonal. De plus $\mathbb{T} = \mathbb{R}_1\mathbb{R}_2^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs puisque produit de triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. La matrice $\mathbb{I}$ étant symétrique définie positive, d'après le Théorème 3.15(factorisation positive de Cholesky) il existe une unique matrice $\mathbb{L}$ triangulaire inférieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $\mathbb{L}\mathbb{L}^{\mathsf{t}} = \mathbb{I}$. Cette matrice $\mathbb{L}$ est évidemment la matrice identité. On en déduit que $\mathbb{T} = \mathbb{L}^{\mathsf{t}} = \mathbb{I}$ et donc $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}_2$ et $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R}_2$.

Exercice 12

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ la matrice bloc

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \end{array}.$$

On note $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ le premier vecteur colonne de $\mathbb{V}$ et on suppose que $\boldsymbol{v}$ est non nul et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^n$ (premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$).

Q. 1 *Expliciter, en fonction de $\boldsymbol{v}$, le vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que*

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{e}_1^n, \quad \textit{avec } \mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.$$

R. 1 On a

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} - \alpha\boldsymbol{e}_1^n}{\|\boldsymbol{v} - \alpha\boldsymbol{e}_1^n\|} \text{ avec } \alpha = \|\boldsymbol{v}\|_2\, e^{\imath(\delta\pi - \arg\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_1^n\rangle)},\ \delta \in \{0,1\}.$$

Comme $\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{e}_1^n\rangle = \overline{v_1}$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$, on obtient

$$\alpha = \|\boldsymbol{v}\|_2\, e^{\imath(\arg(v_1)+\delta\pi)}$$

ce qui donne avec le choix $\delta = 1$

$$\alpha = -\|\boldsymbol{v}\|_2\, e^{\imath\arg(v_1)}.$$

Q. 2 *Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ et $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$. On pose $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \hline \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$. Déterminer $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})$ en fonction de $\mathbb{H}(\boldsymbol{x})$ et de $\mathbb{H}(\boldsymbol{y})$.*

R. 2 On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(\boldsymbol{w}) &= \mathbb{I}_{m+n} - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^* \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) - 2\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{x} \\ \hline \boldsymbol{y} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{x}^* & \boldsymbol{y}^* \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) - 2\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^* & \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^* \\ \hline \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^* & \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^* \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{H}(\boldsymbol{x}) & -2\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^* \\ \hline -2\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^* & \mathbb{H}(\boldsymbol{y}) \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Q. 3

On pose $\boldsymbol{w} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{0}_m \\ \hline \boldsymbol{u} \end{array}\right) \in \mathbb{C}^{m+n}$.

a. *Déterminer* $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$ *en fonction de* $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$.

b. *Que peut-on dire de particulier sur le bloc* $(2,2)$ *de* $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$?

R. 3

a. De la question précédente, on déduit

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{w}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{m,m} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}). \end{array}\right)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A} &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{m,m} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}). \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} \end{array}\right).
\end{aligned}$$

b. le bloc $(2,2)$ de $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$ correspond à la matrice $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la première colonne vaut $\alpha\boldsymbol{e}_1^n$. On a alors

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} = \left[\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right].$$

Exercice 13

Q. 1

Ecrire une fonction FactQR *permettant de calculer la factorisation* $\mathbb{QR}$ *d'une matrice* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On pourra utiliser la fonction Householder *Exercice 10.*

R. 1 L'objectif est de déterminer les matrices $\mathbb{Q}$, matrice unitaire, et $\mathbb{R}$ matrice triangulaire supérieure telle que $\mathbb{A} = \mathbb{QR}$.

Données :	$\mathbb{A}$	:	matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Résultat :	$\mathbb{Q}$	:	matrice unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
	$\mathbb{R}$	:	matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On rappelle la technique utilisée dans la correction de l'exercice **??** pour déterminer l'ensemble des matrices de Householder permettant de transformer la matrice $\mathbb{A}$ en une matrice triangulaire supérieure. On pose

$$\mathbb{A}^{[0]} = \mathbb{A}, \quad \mathbb{A}^{[k+1]} = \mathbb{H}^{[k+1]}\mathbb{A}^{[k]}, \ \forall k \in [\![0, n-2]\!]$$

où $\mathbb{H}^{[k+1]}$ est soit une matrice de Householder soit la matrice identité. Plus précisément, on note $\underline{\boldsymbol{s}} \in \mathbb{K}^{n-k}$ le vecteur composé des $n-k$ dernières composantes de la $k+1$-ème colonne de $\mathbb{A}^{[k]}$ et $\boldsymbol{a} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{0}_k \\ \hdashline \underline{\boldsymbol{s}} \end{array}\right)$.

- Si $\underline{s}_1 = 0$ ou $\underline{\boldsymbol{s}}$ colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^{n-k}$ premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^{n-k}$ alors

$$\mathbb{H}^{[k+1]} = \mathbb{I}.$$

  En notant $\boldsymbol{e}_{k+1}^n$ le $k+1$-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, cette matrice peut-être calculée avec la fonction Householder par

$$[\mathbb{H}^{[k+1]}, \alpha] \leftarrow \text{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_{k+1}^n, 1)$$

- sinon $\mathbb{H}^{[k+1]} = \mathbb{I}$.

On a vu que dans ce cas $\mathbb{A}^{[n-1]}$ est triangulaire supérieure. On pose $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$ qui est une matrice unitaire. On a alors $\mathbb{R} = \mathbb{A}^{[n-1]} = \mathbb{H}\mathbb{A}$ et $\mathbb{Q} = \mathbb{H}^*$.

Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_0}$

Calculer $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$
$\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $k \leftarrow 0$ **à** $n-2$ **faire**
  Calculer $\mathbb{H}^{[k+1]}$ à partir de $\mathbb{A}^{[k]}$
  $\mathbb{A}^{[k+1]} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{A}^{[k]}$
  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{H}$
Fin Pour
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$ ▷ ou $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Il est inutile de stocker les matrices $\mathbb{A}^{[k]}$ et $\mathbb{H}^{[k+1]}$:

Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$, $\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $k \leftarrow 0$ **à** $n-2$ **faire**
  Calculer $\mathbb{H}^{[k+1]}$ à partir de $\mathbb{A}^{[k]}$
  $\mathbb{A}^{[k+1]} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{A}^{[k]}$
  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[k+1]} * \mathbb{H}$
Fin Pour
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_3}$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$, $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $k \leftarrow 0$ **à** $n-2$ **faire**
  Calculer $\mathbb{S}(=\mathbb{H}^{[k+1]})$ à partir de $\mathbb{R}(=\mathbb{A}^{[k]})$
  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{R}$ ▷ compute $\mathbb{A}^{[k+1]}$
  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{H}$
Fin Pour
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_3}$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$, $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $k \leftarrow 0$ **à** $n-2$ **faire**
  Calculer $\mathbb{S}(=\mathbb{H}^{[k+1]})$ à partir de $\mathbb{R}$
  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{R}$
  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{H}$
Fin Pour
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Algorithme 3 $\boxed{\mathcal{R}_4}$

$\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{I}$, $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $k \leftarrow 0$ **à** $n-2$ **faire**
  $\boldsymbol{a} \leftarrow [\boldsymbol{0}_k; \mathbb{R}(k+1:n, k+1)]$
  $\boldsymbol{e}_{k+1}^n \in \mathbb{C}^n$, $e_{k+1}^n(i) = \delta_{k+1,i}$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.
  $[\mathbb{R}, \alpha] \leftarrow \text{Householder}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_{k+1}^n, 1)$
  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{S} * \mathbb{R}$
  $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{S}\mathbb{H}$
Fin Pour
$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$

Algorithme 3 Fonction FactQR

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Résultat : $\mathbb{Q}$: matrice unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$\mathbb{R}$: matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

```
Fonction [Q, R] ← FactQR( A )
  H ← I
  R ← A
  Pour k ← 0 à n − 2 faire
    a ← 0_n
    Pour i ← k + 1 à n faire
      a(i) ← R(i, k + 1)
    Fin Pour
    e ← 0_n, e(k + 1) ← 1
    [S, α] ← Householder(a, e, 1)
    R ← S * R
    H ← S * H
  Fin Pour
  Q ← H*
Fin Fonction
```

Q. 2 *Ecrire un programme permettant de tester cette fonction.*

R. 2 A faire!