Exercices associés au cours d'Analyse Numérique I

Résolution de systèmes linéaires

Méthodes directes

EXERCICE 1 : Résolution système triangulaire supérieur

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire inversible et $b \in \mathbb{C}^n$.

Q.1 Expliquer comment calculer $x \in \mathbb{C}^n$, solution de $Ax = b$ et expliciter les formules permettant de calculer l'ensemble des composantes de x .

Q.2 Écrire la fonction `ResTriSup` permettant de résoudre le système triangulaire supérieur $Ax = b$.

EXERCICE 2 : Matrice de permutation

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j$, on note $P_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identité dont on a permuté les lignes i et j .

Q.1 Représenter cette matrice et la définir proprement.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $A_{r, \cdot}$ le r -ème vecteur ligne de A et $A_{\cdot, s}$ le s -ème vecteur colonne de A .

Q.2 a. Déterminer les lignes de la matrice $D = P_n^{[i,j]}A$ en fonction des vecteurs lignes de A .
b. Déterminer les colonnes de la matrice $E = AP_n^{[i,j]}$ en fonction des vecteurs colonnes de A .

Q.3 a. Calculer le déterminant de $P_n^{[i,j]}$.
b. Déterminer l'inverse de $P_n^{[i,j]}$.

EXERCICE 3 : Matrice d'élimination

Soit $v \in \mathbb{C}^n$ avec $v_1 \neq 0$. On note $E^{[v]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire inférieure à diagonale unité définie par

$$E^{[v]} = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -v_2/v_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -v_n/v_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) \quad (3.1)$$

Q.1 a. Calculer le déterminant de $E^{[v]}$.
b. Déterminer l'inverse de $E^{[v]}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_{1,1} \neq 0$. On note $A_{\cdot, j}$ le j -ème vecteur colonne de A et $A_{i, \cdot}$ son i -ème vecteur ligne. On pose $A_1 = A_{\cdot, 1}$.

Q.2 a. Calculer $\tilde{A} = E^{[A_1]}A$ en fonction des vecteurs lignes de A .
b. Montrer que la première colonne de $\tilde{A}$ est le vecteur $(A_{1,1}, 0, \dots, 0)^t$ i.e.

$$E^{[A_1]}Ae_1 = A_{1,1}e_1 \quad (3.2)$$

où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

EXERCICE 4 : Méthode de Gauss, écriture algébrique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Q.1 Montrer qu'il existe une matrice $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det(G)| = 1$ et $GAe_1 = \alpha e_1$ avec $\alpha \neq 0$ et e_1 premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Q.2 a. Montrer par récurrence sur l'ordre des matrices que pour toute matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, il existe une matrice $S_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|\det S_n| = 1$ et $S_n A_n = U_n$ avec U_n matrice triangulaire supérieure inversible.

b. Soit $b \in \mathbb{C}^n$. En supposant connue la décomposition précédente $S_n A_n = U_n$, expliquer comment résoudre le système $A_n x = b$.

Q.3 Que peut-on dire si A est non inversible?

EXERCICE 5 : Vers la factorisation LU

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales d'ordre i , notées Δ_i , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer par récurrence sur l'ordre n de la matrice A qu'il existe une matrice $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire inférieure à diagonale unité telle que la matrice U définie par

$$U = EA$$

soit triangulaire supérieure avec $U_{i,i} = \det \Delta_i / (U_{1,1} \times \dots \times U_{i-1,i-1})$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

EXERCICE 6 : factorisation LDL*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q.1 Montrer que s'il existe $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $A = LDL^*$ alors A est hermitienne définie positive.

Q.2 Montrer que si A est hermitienne définie positive alors il existe $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, matrice triangulaire inférieure à diagonale unité, et, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs, telle que $A = LDL^*$.

EXERCICE 7 : factorisation de Cholesky

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q.1 Montrer que si A admet une factorisation régulière de Cholesky alors A est hermitienne définie positive.

Q. 2 Montrer que si $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive alors elle admet une factorisation régulière de Cholesky.

Q. 3 On suppose que $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.

- Montrer que $\mathbb{A}$ admet une factorisation positive de Cholesky.
- Montrer que cette factorisation est unique.

EXERCICE 8 : Propriété de la matrice élémentaire de Householder

Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$. On note $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$\mathbb{H} = \mathbb{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*.$$

- Q. 1
- Montrer que $\mathbb{H}$ est hermitienne.
 - Montrer que $\mathbb{H}$ est unitaire.

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$. On note $\mathbf{x}_{\parallel} = \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}$ et $\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel}$.

Q. 2 Montrer que

$$\mathbb{H}(\mathbf{x}_{\perp} + \mathbf{x}_{\parallel}) = \mathbf{x}_{\perp} - \mathbf{x}_{\parallel}.$$

et

$$\mathbb{H}\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \text{si } \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = 0.$$

EXERCICE 9

Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$. On va chercher $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$, vérifiant

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}. \quad (9.1)$$

Q. 1 Montrer que si α et $\mathbf{u}$ vérifient (9.1) alors

a. on a
$$|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2 \quad (9.2)$$

b. on a
$$\mathbf{a} - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{u} = \alpha\mathbf{b} \quad (9.3)$$

c. on en déduit que
$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle|^2 = \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{2} \quad (9.4)$$

Nous allons maintenant établir une condition pour que (9.4) ait un sens.

Q. 2 On suppose que $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) [\pi]$

- Montrer que $\alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}$.
- Montrer que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle - \alpha \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in \mathbb{R}^{*+}$.

Q. 3 Soient α et $\mathbf{u}$ vérifiant (9.1). En déduire que si $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) [\pi]$ alors $\mathbf{u}$ est donné par

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle}(\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}). \quad (9.5)$$

et $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$.

EXERCICE 10

Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\mathbf{b}\|_2 = 1$.

Q. 1 Ecrire la fonction algorithmique **Householder** permettant de retourner une matrice de Householder $\mathbb{H}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$. Le choix du α est fait par le paramètre δ (0 ou 1) de telle sorte que $\arg \alpha = -\arg(\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle) + \delta\pi$ avec $|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2$.
Des fonctions comme **dot**($\mathbf{a}, \mathbf{b}$) (produit scalaire de deux vecteurs), **norm**($\mathbf{a}$) (norme 2 d'un vecteur), **arg**(z) (argument d'un nombre complexe), **matprod**($\mathbb{A}, \mathbb{B}$) (produit de deux matrices), **ctranspose**($\mathbb{A}$) (adjoint d'une matrice), ... pourront être utilisées

Q. 2 Proposer un programme permettant de tester cette fonction. On pourra utiliser la fonction **vecrand**(n) retournant un vecteur aléatoire de $\mathbb{C}^n$, les parties réelles et imaginaires de chacune de ses composantes étant dans $]0, 1[$ (loi uniforme).

Q. 3 Proposer un programme permettant de vérifier que $\delta = 1$ est le "meilleur" choix.

EXERCICE 11

Soit $n \geq 2$.

($\mathcal{P}_n$)

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{U}_n \mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \quad (11.1)$$

Q. 1 Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, (\mathcal{P}_n)$ est vraie.

Q. 2 Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice unitaire $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}.$$

($\mathcal{Q}_n$)

Soit $\mathbb{A}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Il existe une matrice orthogonale $\mathbb{U}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R}_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathbb{U}_n \mathbb{A}_n = \mathbb{R}_n. \quad (11.2)$$

Q. 3 La proposition ($\mathcal{Q}_n$) est-elle vérifiée pour tout $n \geq 2$? Justifier.

Q. 4 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = QR.$$

b. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficient diagonaux positifs ou nuls telles que

$$A = QR.$$

c. On suppose A inversible. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une unique matrice triangulaire supérieure $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficient diagonaux strictement positifs telles que

$$A = QR.$$

EXERCICE 12

Soit $A \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ la matrice bloc

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} m & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} U & F \\ E & V \end{array} \right) \end{matrix}.$$

On note $\mathbf{v} = \mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ le premier vecteur colonne de V et on suppose que $\mathbf{v}$ est non nul et non colinéaire à $\mathbf{e}_1^n$ (premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$).

Q. 1 Expliciter, en fonction de $\mathbf{v}$, le vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{v} = \alpha \mathbf{e}_1^n, \quad \text{avec } \mathbb{H}(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^*.$$

Q. 2 Soient $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$. On pose $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$. Déterminer $\mathbb{H}(\mathbf{w})$ en fonction de $\mathbb{H}(\mathbf{x})$ et de $\mathbb{H}(\mathbf{y})$.

Q. 3 On pose $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m+n}$.

a. Déterminer $\mathbb{H}(\mathbf{w})A$ en fonction de $\mathbb{H}(\mathbf{u})$.

b. Que peut-on dire de particulier sur le bloc (2, 2) de $\mathbb{H}(\mathbf{w})A$?

EXERCICE 13

Q. 1 Ecrire une fonction **FactQR** permettant de calculer la factorisation QR d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pourra utiliser la fonction **Householder** Exercice 10.

Q. 2 Ecrire un programme permettant de tester cette fonction.