Exercices associés au cours d'*Analyse Numérique I*
Résolution de systèmes linéaires
Méthodes itératives

References

[1] F. Cuvelier, *Analyse numérique I, rappels analyse et algèbre linéaire, résumé.* fichier pdf, `https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/24-25/rappels_print-2by1.pdf`.

1 Exercices du cours

Exercice 1

Soit $\mathbb{A}$ une matrice inversible décomposée sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ avec $\mathbb{M}$ inversible. On pose

$$\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{c} = \mathbb{M}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Montrer que la suite définie par

$$\boldsymbol{x}^{[0]} \in \mathbb{K}^n \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c}$$

converge vers $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ quelque soit $\boldsymbol{x}^{[0]}$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

Correction On rappelle tout d'abord le Théorème 2.60, page 17 de [1]:

Théorème. *Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^k = 0$,

b. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^k\boldsymbol{v} = 0$ *pour tout vecteur* $\boldsymbol{v}$,

c. $\rho(\mathbb{B}) < 1$,

d. $\|\mathbb{B}\| < 1$ *pour au moins une norme matricielle subordonnée* $\|\bullet\|$.

Comme $\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ (sans présupposer de la convergence) on a

$$\mathbb{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \mathbb{M}\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{N}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}$$

et, comme $\mathbb{M}$ est inversible

$$\bar{\boldsymbol{x}} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}\bar{\boldsymbol{x}} + \mathbb{M}^{-1}\boldsymbol{b} = \mathbb{B}\bar{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{c}$$

On obtient donc

$$\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}(\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[k]})$$

Or la suite $\boldsymbol{x}^{[k]}$ converge vers $\bar{\boldsymbol{x}}$ si et seulement si la suite $\boldsymbol{e}^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^{[k]}$ converge vers $\mathbf{0}$. On a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \boldsymbol{e}^{[k]} = \mathbb{B}^k\boldsymbol{e}^{[0]}.$$

D'après le théorème cité, on a $\lim_{k\to+\infty} \mathbb{B}^k\boldsymbol{e}^{[0]} = 0$, $\forall \boldsymbol{e}^{[0]} \in \mathbb{K}^n$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$. ◇

Exercice 2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible décomposée en $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ où $\mathbb{M}$ est inversible. On note $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$.

Q. 1 *Montrer que la matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne.*

R. 1 On a

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{M}^* + \mathbb{N}\right)^* &= \mathbb{M} + \mathbb{N}^* \\ &= \mathbb{A} + \mathbb{N} + \mathbb{N}^* = \mathbb{A}^* + \mathbb{N} + \mathbb{N}^* \quad \text{car } \mathbb{A} \text{ est hermitienne} \\ &= \mathbb{M}^* + \mathbb{N}.\end{aligned}$$

La matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est donc hermitienne.

On suppose maintenant que $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est définie positive.

Q. 2 *Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$ et $\boldsymbol{y} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}$.*

a. Montrer que

$$\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \mathbb{A}\boldsymbol{y}\rangle = \left\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle + \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle - \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle \tag{2.1}$$

et

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}. \tag{2.2}$$

b. En déduire que

$$\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \mathbb{A}\boldsymbol{y}\rangle = \langle (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\rangle. \tag{2.3}$$

R. 2

a. On a $\boldsymbol{y} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}$ avec $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$ ce qui donne

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \mathbb{B}\boldsymbol{x} = \left(\mathbb{I} - \mathbb{B}\right)\boldsymbol{x} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}.$$

L'équation (2.2) est donc démontrée. Pour prouver (2.1), on note que

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}$$

et donc

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{y}, \mathbb{A}\boldsymbol{y}\rangle &= \left\langle \boldsymbol{x} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\left(\boldsymbol{x} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right)\right\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle - \left\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle + \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle.\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement (2.1).

b. En utilisant (2.2), on obtient

$$\begin{aligned}\left\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \left(\mathbb{M}^* + \mathbb{N}\right)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\right\rangle &= \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \left(\mathbb{M}^* + \mathbb{N}\right)\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle \\ &= \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \left(\mathbb{M} + \mathbb{N}^*\right)\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle \quad \text{car } \mathbb{M}^* + \mathbb{N} \text{ hermitienne} \\ &= \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \left(\mathbb{M} + \mathbb{M}^* - \mathbb{A}^*\right)\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle \quad \text{car } \mathbb{N} = \mathbb{M} - \mathbb{A} \\ &= \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle + \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle - \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle \quad \text{car } \mathbb{A} \text{ hermitienne}\end{aligned}$$

Or, par propriété du produit scalaire, on a

$$\left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle = \left\langle \mathbb{M}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle = \left\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle = \left\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle.$$

Comme $\mathbb{A}$ est hermitienne, on obtient

$$\left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle = \left\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle.$$

On abouti alors à

$$\left\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \left(\mathbb{M}^* + \mathbb{N}\right)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\right\rangle = \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle + \left\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle - \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle.$$

L'équation (2.3) est obtenue en utilisant (2.1).

Q. 3 *Montrer que si $\mathbb{A}$ est définie positive alors $\rho(\mathbb{B}) < 1$.*

R. 3

On veut démontrer que sous les hypothèses $\mathbb{A}$ hermitienne définie positive et $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ (hermitienne) définie positive on a $\rho(\mathbb{B}) < 1$, c'est à dire que pour tout élément propre $(\lambda, \boldsymbol{u})$ de $\mathbb{B}$ alors $|\lambda| < 1$.
Soit $(\lambda, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ un élément propre de $\mathbb{B}$. On a $\mathbb{B}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$. En prenant $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$ dans **Q**.2, on a $\boldsymbol{y} = \mathbb{B}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ et donc $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = (1-\lambda)\boldsymbol{u}$. De (2.3) on obtient

$$\langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}\boldsymbol{u}\rangle - \langle \lambda\boldsymbol{u}, \lambda\mathbb{A}\boldsymbol{u}\rangle = \langle (1-\lambda)\boldsymbol{u}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})((1-\lambda)\boldsymbol{u})\rangle$$

c'est à dire

$$(1 - |\lambda|^2)\langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}\boldsymbol{u}\rangle = |1-\lambda|^2 \langle \boldsymbol{u}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})\boldsymbol{u}\rangle. \tag{R2.1}$$

On va montrer que $|1-\lambda| > 0$, c'est à dire $\lambda \neq 1$. Pour celà on effectue une démonstration par l'absurde.

Par l'absurde on suppose $\lambda = 1$. Dans ce cas, comme $\mathbb{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$, on a $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. De (2.2), on déduit alors $\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ et comme $\mathbb{A}$ et $\mathbb{M}^{-1}$ sont inversibles $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Or $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$ est un vecteur propre de $\mathbb{B}$, il ne peut donc être nul! On a une contradiction et donc, l'hypothèse de départ est fausse: on a démontré que $\lambda \neq 1$.

Comme par hypothèse, la matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ (hermitienne) est définie positive et $\boldsymbol{u} \neq 0$, on obtient

$$|1-\lambda|^2 \langle \boldsymbol{u}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})\boldsymbol{u}\rangle > 0.$$

On déduit alors de (R2.1) que

$$(1 - |\lambda|^2)\langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}\boldsymbol{u}\rangle > 0.$$

Comme $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive et $\boldsymbol{u} \neq 0$, on a

$$\langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}\boldsymbol{u}\rangle > 0$$

et donc $1 - |\lambda|^2 > 0$, c'est à dire $|\lambda| < 1$.

On suppose $\rho(\mathbb{B}) < 1$ et on va démontrer, par l'absurde, que $\mathbb{A}$ est définie positive.

Q. 4

On suppose qu'il existe $\boldsymbol{x}^{[0]} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ *tel que* $\alpha_0 \stackrel{\text{def}}{=} \langle \boldsymbol{x}^{[0]}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}^{[0]}\rangle \in \mathbb{C} \backslash]0, +\infty[$. *On défini alors les suites*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \boldsymbol{x}^{[k]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k-1]} \quad \textit{et} \quad \alpha_k = \left\langle \boldsymbol{x}^{[k]}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}^{[k]} \right\rangle.$$

a. *Montrer que*

$$\lim_{k \to +\infty} \boldsymbol{x}^{[k]} = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{k \to +\infty} \alpha_k = 0.$$

b. *Montrer que* $\alpha_0 \in]-\infty, 0]$.

c. *Démontrer par récurrence sur* $k \in \mathbb{N}^*$ *que*

$$(\mathcal{P}_k) \ : \ \boldsymbol{x}^{[k]} \neq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k-1]} \neq \boldsymbol{0}, \quad \textit{et} \ \ 0 \geqslant \alpha_{k-1} > \alpha_k.$$

d. *Conclure.*

R. 4

a. On a alors

$$\boldsymbol{x}^{[k]} = \mathbb{B}^k \boldsymbol{x}^{[0]}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

D'après le Théorème 2.60, page 17 de [1],

$$\rho(\mathbb{B}) < 1 \iff \lim_{k \to +\infty} \mathbb{B}^k \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n.$$

On a donc

$$\lim_{k \to +\infty} \boldsymbol{x}^{[k]} = \boldsymbol{0}.$$

Comme l'application $\boldsymbol{x} \mapsto \langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle$ est continue, on en déduit

$$\lim_{k \to +\infty} \alpha_k = \lim_{k \to +\infty} \left\langle \boldsymbol{x}^{[k]}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}^{[k]} \right\rangle = 0.$$

b. Pour une matrice quelconque $\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle \in \mathbb{C}$, or $\mathbb{A}$ étant hermitienne, on a $\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle \in \mathbb{R}$. En effet, par propriété du produit scalaire on a

$$\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{A}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle = \overline{\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle}.$$

Comme par hypothèse $\alpha_0 \in \mathbb{C} \backslash]0, +\infty[$, on en déduit $\alpha_0 \in]-\infty, 0]$.

c. Tout d'abord de l'égalité (2.3) avec $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{[k-1]}$ et $\boldsymbol{y} = \mathbb{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{[k]}$ on obtient

$$\left\langle \boldsymbol{x}^{[k-1]}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}^{[k-1]} \right\rangle - \left\langle \boldsymbol{x}^{[k]}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}^{[k]} \right\rangle = \left\langle (\boldsymbol{x}^{[k-1]} - \boldsymbol{x}^{[k]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\boldsymbol{x}^{[k-1]} - \boldsymbol{x}^{[k]}) \right\rangle$$

- **Initialisation :** montrons que $(\mathcal{P}_0)$ est vérifiée.
  On a $\boldsymbol{x}^{[0]} \neq 0$ et $\boldsymbol{x}^{[1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[0]}$.
  On montre par l'absurde que $\boldsymbol{x}^{[1]} \neq 0$. Supposons $\boldsymbol{x}^{[1]} = 0$, alors $\alpha_1 = 0$ et $\boldsymbol{x}^{[0]} - \boldsymbol{x}^{[1]} = \boldsymbol{x}^{[0]} \neq 0$. Comme $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne définie positive on obtient

  $$\alpha_0 - \alpha_1 = \left\langle (\boldsymbol{x}^{[0]} - \boldsymbol{x}^{[1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\boldsymbol{x}^{[0]} - \boldsymbol{x}^{[1]}) \right\rangle > 0$$

  et contradiction avec $\alpha_0 \leqslant 0$.
  On montre ensuite par l'absurde que $\boldsymbol{x}^{[0]} \neq \boldsymbol{x}^{[1]}$. Supposons $\boldsymbol{x}^{[1]} = \boldsymbol{x}^{[0]}$. Par construction $\boldsymbol{x}^{[1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[0]}$, et dans ce cas, comme $\boldsymbol{x}^{[0]} \neq 0$, $(1, \boldsymbol{x}^{[0]})$ serait un élément propre de $\mathbb{B}$: contradiction avec $\rho(\mathbb{B}) < 1$.
  Comme $\boldsymbol{x}^{[0]} - \boldsymbol{x}^{[1]} \neq 0$, on a

  $$\alpha_0 - \alpha_1 = \left\langle (\boldsymbol{x}^{[0]} - \boldsymbol{x}^{[1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\boldsymbol{x}^{[0]} - \boldsymbol{x}^{[1]}) \right\rangle > 0$$

  et donc $0 \geqslant \alpha_0 > \alpha_1$.
- **Hérédité :** soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $(\mathcal{P}_k)$ vérifiée. On a alors $\boldsymbol{x}^{[k]} \neq 0$, $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]}$ et $\alpha_k \leqslant 0$.
  On montre par l'absurde que $\boldsymbol{x}^{[k+1]} \neq 0$. Supposons $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = 0$, alors $\alpha_{k+1} = 0$ et $\boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}^{[k]} \neq 0$. Comme $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne définie positive on obtient

  $$\alpha_k - \alpha_{k+1} = \left\langle (\boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k+1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k+1]}) \right\rangle > 0$$

  et contradiction avec $\alpha_k \leqslant 0$.
  On montre ensuite par l'absurde que $\boldsymbol{x}^{[k]} \neq \boldsymbol{x}^{[k+1]}$. Supposons $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}^{[k]}$. Par construction $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]}$, et dans ce cas, comme $\boldsymbol{x}^{[k]} \neq 0$, $(1, \boldsymbol{x}^{[k]})$ serait un élément propre de $\mathbb{B}$: contradiction avec $\rho(\mathbb{B}) < 1$.
  Comme $\boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k+1]} \neq 0$, on a

  $$\alpha_k - \alpha_{k+1} = \left\langle (\boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k+1]}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k+1]}) \right\rangle > 0$$

  et donc $0 \geqslant \alpha_k > \alpha_{k+1}$.
- **Conclusion :** la proposition est vérifiée pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

d. La suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante de premier terme $\alpha_0 \leqslant 0$: elle ne peut converger vers 0. On a donc une contradiction avec l'hypothèse initiale, $\mathbb{A}$ hermitienne non définie positive

Exercice 3

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $\mathrm{A}_{i,j}$ la composante (i, j) de la matrice $\mathbb{A}$. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.

La méthode S.O.R. (successive over relaxation) est donnée par

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{\mathrm{A}_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k]} \right) + (1 - w) x_i^{[k]}, \quad \forall i \in [\![1, n]\!]$$

Q. 1 *Déterminer la matrice d'itération $\mathbb{B}$ et le vecteur $\boldsymbol{c}$ tels que*

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{c}$$

en fonction de $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, et $\boldsymbol{b}$.

R. 1 Pour la **méthode S.O.R.** on a , $\forall i \in [\![1, n]\!]$,

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{\mathrm{A}_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{A}_{ij} x_j^{[k]} \right) + (1 - w) x_i^{[k]}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\frac{\mathrm{A}_{ii}}{w}x_i^{[k+1]} + \sum_{j=1}^{i-1}\mathrm{A}_{ij}x_j^{[k+1]} = b_i - \sum_{j=i+1}^{n}\mathrm{A}_{ij}x_j^{[k]} + \frac{1-w}{w}\mathrm{A}_{ii}x_i^{[k]}$$

et matriciellement on obtient

$$\left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \left(\frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}\right)\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{b}.$$

Comme la matrice $\left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)$ est inversible (car triangulaire inférieure à éléments diagonaux non nuls), on a

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}\right)\boldsymbol{x}^{[k]} + \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1}\boldsymbol{b}$$

La matrice d'itération de S.O.R. est $\mathbb{B} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}\right)$ et le vecteur $\boldsymbol{c} = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1}\boldsymbol{b}$.

Exercice 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $\mathrm{A}_{i,j}$ la composante (i,j) de la matrice $\mathbb{A}$. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.

La matrice d'itération de la méthode S.O.R., notée $\mathcal{L}_w$, est donnée par

$$\mathcal{L}_w = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E}\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{F}\right). \tag{4.1}$$

On pose $\mathbb{L} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}$ et $\mathbb{U} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}$.

Q. 1 *Montrer que*

$$\mathcal{L}_w = (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1}\left((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}\right).$$

R. 1 Comme $\mathbb{E} = \mathbb{D}\mathbb{L}$ et $\mathbb{F} = \mathbb{D}\mathbb{U}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_w &= \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{D}\mathbb{L}\right)^{-1}\left(\frac{1-w}{w}\mathbb{D} + \mathbb{D}\mathbb{U}\right)\\
&= \left(\frac{1}{w}\mathbb{D}[\mathbb{I} - w\mathbb{L}]\right)^{-1}\left(\frac{1}{w}\mathbb{D}[(1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}]\right)\\
&= (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1}\left(\frac{1}{w}\mathbb{D}\right)^{-1}\left(\frac{1}{w}\mathbb{D}\right)\left((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}\right)\\
&= (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1}\left((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}\right).
\end{aligned}$$

Q. 2 *En déduire que*

$$\rho(\mathcal{L}_w) \geqslant |w-1|. \tag{4.2}$$

R. 2 La matrice $\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure à diagonale nulle car elle est le produit d'une matrice diagonale (et donc triangulaire inférieure) $\mathbb{D}^{-1}$ et d'une matrice triangulaire inférieure $\mathbb{E}$ à diagonale nulle. De même la matrice $\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure à diagonale nulle.

On sait que le déterminant d'une matrice est égale aux produits de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités. En notant n la dimension de la matrice $\mathcal{L}_w$, et en notant $\lambda_i(\mathcal{L}_w)$ ses n valeurs propres, on a donc

$$\det(\mathcal{L}_w) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i(\mathcal{L}_w).$$

Le rayon spectral de $\mathcal{L}_w$, noté $\rho(\mathcal{L}_w)$, correspond au plus grand des modules des valeurs propres. On a alors

$$\rho(\mathcal{L}_w) = \max_{i\in[\![1,n]\!]}|\lambda_i(\mathcal{L}_w)| \geqslant |\det(\mathcal{L}_w)|^{1/n}$$

De plus on a

$$\det(\mathcal{L}_w) = \det\left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1}\left((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}\right)\right) = \det\left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1}\right)\det\left(((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U})\right)$$

La matrice $\mathbb{I} - w\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure à diagonale unité donc son inverse aussi. On en déduit $\det\left((\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1}\right) = 1$. La matrice $(1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure avec tous ses éléments diagonaux valant $1-w$ et donc

$\det\left(((1-w)\mathbb{I}+w\mathbb{U})\right)=(1-w)^n$. On a alors $|\det(\mathcal{L}_w)|=|1-w|^n$ et
$$\rho(\mathcal{L}_w)\geqslant|\det(\mathcal{L}_w)|^{1/n}=|1-w|.$$

Exercice 5

On note $\mathbb{T}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice tridiagonale
$$\mathbb{T}=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0\\ b_2 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1}\\ 0 & \dots & 0 & b_n & a_n\end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Q. 1

Soit $\mu\in\mathbb{C}^*$. On note $\mathbb{Q}(\mu)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice diagonale de diagonale $(\mu,\mu^2,\dots,\mu^n)$.

a. *Expliciter la matrice $\mathbb{T}(\mu)\stackrel{\text{def}}{=}\mathbb{Q}(\mu)\mathbb{T}\mathbb{Q}^{-1}(\mu)$ en fonction des coefficients tridiagonaux de la matrice $\mathbb{T}$ et de μ.*

b. *Déterminer $\det(\mathbb{T}(\mu))$ en fonction de $\det(\mathbb{T})$.*

R. 1

a. On peut noter que la matrice $\mathbb{Q}(\mu)$ est inversible car elle est diagonale et $\mu\in\mathbb{C}^*$. Son inverse est la matrice diagonale de diagonale $(\mu^{-1},\mu^{-2},\dots,\mu^{-n})$.

1ère démonstration. On a
$$\begin{aligned}\mathbb{T}(\mu) &= \begin{pmatrix}\mu & 0 & \dots & 0\\ 0 & \mu^2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \mu^n\end{pmatrix}\mathbb{T}\begin{pmatrix}\frac{1}{\mu} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{1}{\mu^2} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\mu^n}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\mu a_1 & \mu c_1 & 0 & \dots & 0\\ \mu^2 b_2 & \mu^2 a_2 & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mu^{n-1}c_{n-1}\\ 0 & \dots & 0 & \mu^n b_n & \mu^n a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\mu} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{1}{\mu^2} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\mu^n}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}a_1 & \mu^{-1}c_1 & 0 & \dots & 0\\ \mu b_2 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mu^{-1}c_{n-1}\\ 0 & \dots & 0 & \mu b_n & a_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

2ème démonstration. Pour simplifier l'écriture, on pose $\mathbb{Q}\stackrel{\text{def}}{=}\mathbb{Q}(\mu)$. Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on a
$$\left(\mathbb{T}(\mu)\right)_{i,j}=\left(\mathbb{Q}\mathbb{T}\mathbb{Q}^{-1}\right)_{i,j}=\sum_{k=1}^n\left(\mathbb{Q}\mathbb{T}\right)_{i,k}\left(\mathbb{Q}^{-1}\right)_{k,j}$$
Or $\mathbb{Q}^{-1}$ est diagonale, donc $\left(\mathbb{Q}^{-1}\right)_{k,j}=0$, si $k\neq j$. Ceci donne
$$\begin{aligned}\left(\mathbb{T}(\mu)\right)_{i,j} &= \left(\mathbb{Q}\mathbb{T}\right)_{i,j}\left(\mathbb{Q}^{-1}\right)_{j,j}=\mu^{-j}\left(\mathbb{Q}\mathbb{T}\right)_{i,j}\\ &= \mu^{-j}\sum_{k=1}^n\mathbb{Q}_{i,k}\mathbb{T}_{k,j}.\end{aligned}$$
De même, $\mathbb{Q}$ est diagonale, donc $\mathbb{Q}_{i,k}=0$, si $k\neq i$. Ceci donne
$$\left(\mathbb{T}(\mu)\right)_{i,j}=\mu^{-j}\mathbb{Q}_{i,i}\mathbb{T}_{i,j}=\mu^{i-j}\mathbb{T}_{i,j}.$$
La matrice $\mathbb{T}$ étant tridiagonale, $\mathbb{T}(\mu)$ l'est aussi et on a
$$\begin{aligned}&\left(\mathbb{T}(\mu)\right)_{i,i}=\mathbb{T}_{i,i}=a_i, && \forall i\in[\![1,n]\!] && \text{(diagonale)}\\
&\left(\mathbb{T}(\mu)\right)_{i,i+1}=\mu^{-1}\mathbb{T}_{i,i+1}=\mu^{-1}c_i, && \forall i\in[\![1,n-1]\!] && \text{(sur-diagonale)}\\
&\left(\mathbb{T}(\mu)\right)_{i-1,i}=\mu\mathbb{T}_{i-1,i}=\mu^{-1}b_i, && \forall i\in[\![2,n]\!] && \text{(sous-diagonale)}\end{aligned}$$

b. On a
$$\det(\mathbb{T}(\mu)) = \det\left(\mathbb{Q}(\mu)\mathbb{T}\mathbb{Q}^{-1}(\mu)\right) = \det(\mathbb{Q}(\mu))\det(\mathbb{T})\det(\mathbb{Q}^{-1}(\mu)) = \det(\mathbb{T}),$$
car $\det(\mathbb{Q}(\mu))\det(\mathbb{Q}^{-1}(\mu)) = 1$.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $\mathrm{A}_{i,j}$ la composante (i,j) de la matrice $\mathbb{A}$. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte.

On note respectivement $\mathbb{J} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E}+\mathbb{F})$ et $\mathcal{L}_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}$ les matrices d'itérations des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.

Soit $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ par la méthode de Gauss-Seidel ou par la méthode de Jacobi.

On suppose dans la suite que la matrice inversible $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \nu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \nu_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{5.2}$$
et que ses éléments diagonaux sont non nuls.

Q. 2

a. Montrer que les valeurs propres de $\mathbb{J}$ sont les racines du polynôme
$$q_{\mathbb{J}}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}).$$

b. En utilisant la question 1, montrer que $q_{\mathbb{J}}(\lambda) = \det(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F})$.

c. En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $\mathbb{J}$ alors $-\lambda$ l'est aussi.

R. 2

a. Les valeurs propres de $\mathbb{J}$ sont les racines de son polynôme caractéristique
$$P_{\mathbb{J}}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{J}).$$

Or on a
$$\begin{aligned} P_{\mathbb{J}}(\lambda) &= \det\left(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E}+\mathbb{F})\right) \\ &= \det\left(\mathbb{D}^{-1}(\lambda\mathbb{D} - (\mathbb{E}+\mathbb{F}))\right) \\ &= \det(\mathbb{D}^{-1})\det\left(\lambda\mathbb{D} - (\mathbb{E}+\mathbb{F})\right) \\ &= \det(\mathbb{D}^{-1})q_{\mathbb{J}}(\lambda). \end{aligned}$$

Comme $\det(\mathbb{D}^{-1}) \neq 0$, les valeurs propres de $\mathbb{J}$ sont aussi les racines de $q_{\mathbb{J}}(\lambda)$.

b. En reprenant les notations de la question 1, et en notant $\mathbb{T}$ la matrice
$$\mathbb{T} = \lambda\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 & \nu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & \lambda\alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \nu_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \beta_n & \lambda\alpha_n \end{pmatrix}$$
la matrice $\mathbb{T}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\lambda)\mathbb{T}\mathbb{Q}^{-1}(\lambda)$ correspond alors à
$$\mathbb{T}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 & \frac{1}{\lambda}\nu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda\beta_2 & \lambda\alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{\lambda}\nu_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda\beta_n & \lambda\alpha_n \end{pmatrix} = \lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}.$$

D'après la question 1, on a $\det(\mathbb{T}(\lambda)) = \det(\mathbb{T})$ ce qui donne
$$\det\left(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right) = \det\left(\lambda\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}\right) = q_{\mathbb{J}}(\lambda).$$

c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\mathbb{J}$. On a donc $P_{\mathbb{J}}(\lambda) = 0$. Or on a

$$P_{\mathbb{J}}(\lambda) = \det(\mathbb{D}^{-1}) q_{\mathbb{J}}(\lambda) = \det(\mathbb{D}^{-1}) \det\left(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right)$$

et donc

$$\begin{array}{rcl} P_{\mathbb{J}}(-\lambda) & = & \det(\mathbb{D}^{-1}) \det\left(-\lambda\mathbb{D} + \lambda\mathbb{E} + \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right) \\ & = & (-1)^n \det(\mathbb{D}^{-1}) \det\left(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right) \\ & = & (-1)^n P_{\mathbb{J}}(\lambda) \\ & = & 0 \end{array}$$

c'est à dire $-\lambda$ est aussi une valeur propre de $\mathbb{J}$.

Q. 3

a. Montrer que les valeurs propres de $\mathcal{L}_1$ sont les racines du polynôme

$$q_{\mathcal{L}_1}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \mathbb{F}).$$

b. En déduire que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad q_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2) = \lambda^n q_{\mathbb{J}}(\lambda). \tag{5.3}$$

R. 3

a. Les valeurs propres de $\mathcal{L}_1$ sont les racines de son polynôme caractéristique

$$P_{\mathcal{L}_1}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda\mathbb{I} - \mathcal{L}_1).$$

Or on a

$$\begin{array}{rcl} P_{\mathcal{L}_1}(\lambda) & = & \det\left(\lambda\mathbb{I} - (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\right) \\ & = & \det\left((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}(\lambda(\mathbb{D} - \mathbb{E}) - \mathbb{F})\right) \\ & = & \det((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}) \det\left(\lambda(\mathbb{D} - \mathbb{E}) - \mathbb{F}\right) \\ & = & \det((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}) q_{\mathcal{L}_1}(\lambda). \end{array}$$

Comme $\det((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}) = \det(\mathbb{D}^{-1}) \neq 0$, les valeurs propres de $\mathcal{L}_1$ sont aussi les racines de $q_{\mathcal{L}_1}(\lambda)$.

b. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On a

$$\begin{array}{rcl} q_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2) & = & \det\left(\lambda^2(\mathbb{D} - \mathbb{E}) - \mathbb{F}\right) \\ & = & \det\left(\lambda(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F})\right) \\ & = & \lambda^n \det\left(\lambda\mathbb{D} - \lambda\mathbb{E} - \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}\right). \end{array}$$

Et donc on obtient bien (5.3).

Q. 4

a. Comparer les valeurs propres de $\mathbb{J}$ à celles de $\mathcal{L}_1$.

b. Une des deux méthodes est-elle à privilégier dans ce cas?

R. 4

a. Si λ est une valeur propre de $\mathbb{J}$ alors λ^2 est une valeur propre de $\mathcal{L}_1$. Si $\mu \neq 0$ est une valeur propre de $\mathcal{L}_1$ alors ses racines carrées complexes $\sqrt{\mu}$ et $-\sqrt{\mu}$ sont valeurs propres de $\mathbb{J}$.

b. On a $\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(\mathbb{J})^2$, et donc $\rho(\mathcal{L}_1) < 1 \Leftrightarrow \rho(\mathbb{J}) < 1$. Les deux méthodes convergent donc simultanément. Toutefois, lorsqu'il y a convergence, on a

$$\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(\mathbb{J})^2 < \rho(\mathbb{J}) < 1$$

et donc, Il faut privilégier la méthode de Gauss-Seidel car une méthode itérative converge d'autant plus vite que le rayon spectral de sa matrice d'itération est petit.

2 Exercice supplémentaire

Exercice 6

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.

Q. 1

Montrer les résultats suivant:

a. tous les éléments diagonaux de $\mathbb{A}$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$.

b. toutes les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$.

c. $\mathbb{A}$ est inversible.

R. 1

a. Soit $i \in [\![1, n]\!]$ et $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{C}^n$, le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On a

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \mathbb{A}\boldsymbol{e}_i \rangle = A_{i,i}.$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{e}_i, \mathbb{A}\boldsymbol{e}_i \rangle &= \langle \mathbb{A}^*\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i \rangle && \text{par propriété du produit scalaire} \\ &= \langle \mathbb{A}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i \rangle && \text{car } \mathbb{A} \text{ est hermitienne} \\ &= \overline{\langle \boldsymbol{e}_i, \mathbb{A}\boldsymbol{e}_i \rangle} && \text{par propriété du produit scalaire} \end{aligned}$$

et donc $\mathrm{A}_{i,i} = \overline{\mathrm{A}_{i,i}}$, c'est à dire $\mathrm{A}_{i,i} \in \mathbb{R}$.

Comme $\mathbb{A}$ est hemitienne définie positive, et, comme $\boldsymbol{e}_i \neq \boldsymbol{0}$, on a

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i \rangle > 0$$

et donc $\mathrm{A}_{i,i} > 0$.

b. Soit $(\lambda, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \backslash \{\boldsymbol{0}\}$ un élément propre de $\mathbb{A}$. On a

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \lambda\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \overline{\lambda} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle$$

et

$$\langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}\boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \lambda\boldsymbol{u} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle.$$

Or $\mathbb{A}$ est hermitienne, donc on a

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}^*\boldsymbol{u} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}\boldsymbol{u} \rangle.$$

On en déduit que

$$\overline{\lambda} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle.$$

le vecteur $\boldsymbol{u}$ étant non nul, on a $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \|u\|_2^2 \neq 0$ et donc $\lambda = \overline{\lambda}$, c'est à dire $\lambda \in \mathbb{R}$.

De plus, $\mathbb{A}$ est définie positive entraine que

$$\lambda \|u\|_2^2 = \langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle > 0$$

et donc $\lambda > 0$.

c. Comme toutes les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont non nulles (puique strictement positives), $\mathbb{A}$ est inversible.

On note $\underline{\boldsymbol{x}}$ la solution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ et on décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$ où $\mathbb{D} = \mathrm{diag}(\mathbb{A})$ est la matrice diagonale telle que, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $D_{i,i} = A_{i,i}$, $\mathbb{E}$ est triangulaire inférieure d'éléments diagonaux nuls, et, $\mathbb{F}$ est triangulaire supérieure d'éléments diagonaux nuls.

On va étudier une méthode itérative pour la résolution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

Soit $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ donné. On définit la suite $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$(\mathbb{D} - \mathbb{E})\boldsymbol{x}_{k+1/2} = \mathbb{F}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{b} \tag{6.1}$$

$$(\mathbb{D} - \mathbb{F})\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbb{E}\boldsymbol{x}_{k+1/2} + \boldsymbol{b} \tag{6.2}$$

Q. 2

a. Démontrer, en justifiant toutes les opérations utilisées, que le vecteur $\boldsymbol{x}_{k+1}$ peut s'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{c} \tag{6.3}$$

en déterminant le vecteur $\boldsymbol{c}$ *et en montrant que*

$$\mathbb{B} = (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}.$$

b. Montrer que

$$\boldsymbol{x}_{k+1} - \underline{\boldsymbol{x}} = \mathbb{B}(\boldsymbol{x}_k - \underline{\boldsymbol{x}}).$$

c. Montrer que

$$\mathbb{D}^{-1} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}. \tag{6.4}$$

R. 2

a. La matrice diagonale $\mathbb{D}$ est inversible car, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{D}_{i,i} = \mathrm{A}_{i,i} > 0$.

On en déduit que les matrices $\mathbb{D} - \mathbb{E}$ (triangulaire inférieure de diagonale la diagonale de $\mathbb{D}$) et $\mathbb{D} - \mathbb{F}$ (triangulaire supérieure de diagonale la diagonale de $\mathbb{D}$) sont inversibles.

De (6.1), on obtient en multipliant à gauche par $(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}$

$$\boldsymbol{x}_{k+1/2} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{x}_k + (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\boldsymbol{b}.$$

En remplaçant cette expression de $\boldsymbol{x}_{k+1/2}$ dans (6.2), on a

$$\begin{aligned}
(\mathbb{D} - \mathbb{F})\boldsymbol{x}_{k+1} &= \mathbb{E}\left((\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{x}_k + (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\boldsymbol{b}\right) + \boldsymbol{b} \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{x}_k + \left(\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} + \mathbb{I}\right)\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

En multipliant à gauche cette équation par $(\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1}$, on abouti a

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{x}_k(\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1}\left(\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} + \mathbb{I}\right)\boldsymbol{b}$$

En posant

$$\begin{aligned}
\mathbb{B} &= (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F} \\
\boldsymbol{c} &= (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1}\left(\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} + \mathbb{I}\right)\boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

on obtient (6.3).

b. La matrice $\mathbb{A}$ est inversible et donc $\underline{\boldsymbol{x}}$ est bien définie. De l'équation (6.1), on déduit

$$(\mathbb{D} - \mathbb{E})\boldsymbol{x}_{k+1/2} = \mathbb{F}\boldsymbol{x}_k + \mathbb{A}\underline{\boldsymbol{x}} = \mathbb{F}\boldsymbol{x}_k + (\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F})\underline{\boldsymbol{x}}$$

et donc

$$(\mathbb{D} - \mathbb{E})(\boldsymbol{x}_{k+1/2} - \underline{\boldsymbol{x}}) = \mathbb{F}(\boldsymbol{x}_k - \underline{\boldsymbol{x}}) \tag{R6.2}$$

De la même manière à partir de l'équation (6.2), on déduit

$$(\mathbb{D} - \mathbb{F})(\boldsymbol{x}_{k+1} - \underline{\boldsymbol{x}}) = \mathbb{E}(\boldsymbol{x}_{k+1/2} - \underline{\boldsymbol{x}}) \tag{R6.3}$$

En utilisant (R6.2), l'équation (R6.4) devient

$$(\mathbb{D} - \mathbb{F})(\boldsymbol{x}_{k+1} - \underline{\boldsymbol{x}}) = \mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}(\boldsymbol{x}_k - \underline{\boldsymbol{x}})$$

c'est à dire

$$\boldsymbol{x}_{k+1} - \underline{\boldsymbol{x}} = \mathbb{B}(\boldsymbol{x}_k - \underline{\boldsymbol{x}}).$$

c. L'expression à démontrer est bien définie car $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D} - \mathbb{E}$ inversibles. De plus on a

$$\mathbb{I} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}$$

En multipliant à gauche cette équation par $\mathbb{D}^{-1}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}^{-1} &= \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{D} - \mathbb{E})(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \\
&= (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}.
\end{aligned}$$

Soit $(\lambda, \boldsymbol{p})$ un élément propre de la matrice $\mathbb{B}$.

Q. 3

a. Montrer que

$$\lambda \mathbb{A}\boldsymbol{p} + (\lambda-1)\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p} = 0. \tag{6.5}$$

b. En déduire que

$$\lambda = \frac{\langle \mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\rangle}{\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{A}\boldsymbol{p}\rangle + \langle \mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\rangle} \in [0, 1[. \tag{6.6}$$

c. En déduire la convergence $\boldsymbol{x}_k$ vers $\underline{\boldsymbol{x}}$.

R. 3

a. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p} &\Leftrightarrow (\mathbb{D}-\mathbb{F})^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p} \\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p} = \lambda(\mathbb{D}-\mathbb{F})\boldsymbol{p} \\
&\Leftrightarrow \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p} = \lambda\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{D}-\mathbb{F})\boldsymbol{p}
\end{aligned}$$

De (6.4), on a

$$\mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}(\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1} = (\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p} &\Leftrightarrow \left((\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\right)\mathbb{F}\boldsymbol{p} = \lambda\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{D}-\mathbb{F})\boldsymbol{p} \\
&\Leftrightarrow (\mathbb{D}-\mathbb{E})\left((\mathbb{D}-\mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1}\right)\mathbb{F}\boldsymbol{p} = \lambda(\mathbb{D}-\mathbb{E})\mathbb{D}^{-1}(\mathbb{D}-\mathbb{F})\boldsymbol{p} \\
&\Leftrightarrow \left(\mathbb{I}-\mathbb{I}+\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\right)\mathbb{F}\boldsymbol{p} = \lambda(\mathbb{I}-\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1})(\mathbb{D}-\mathbb{F})\boldsymbol{p} \\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p} = \lambda(\mathbb{D}-\mathbb{E}-\mathbb{F}+\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F})\boldsymbol{p} \\
&\Leftrightarrow \mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p} = \lambda(\mathbb{A}+\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F})\boldsymbol{p}
\end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\lambda\mathbb{A}\boldsymbol{p} + (\lambda-1)\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p} = 0.$$

b. On déduit de l'équation (6.5)

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \boldsymbol{p}, \lambda\mathbb{A}\boldsymbol{p} + (\lambda-1)\mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle \\
&= \lambda\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{A}\boldsymbol{p}\rangle + (\lambda-1)\left\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle
\end{aligned}$$

et donc

$$\lambda\left(\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{A}\boldsymbol{p}\rangle + \left\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle\right) = \left\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle \tag{R6.4}$$

Comme la matrice $\mathbb{A}$ est définie positive, on a $\langle \mathbb{A}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\rangle > 0$ car $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{0}$ (vecteur propre) et donc

$$\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{A}\boldsymbol{p}\rangle = \overline{\langle \mathbb{A}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\rangle} = \langle \mathbb{A}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\rangle > 0.$$

De plus on a

$$\left\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle = \left\langle \mathbb{E}^*\boldsymbol{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle.$$

La matrice $\mathbb{A}$ étant hermitienne, on a $\mathbb{E}^* = \mathbb{F}$ et donc

$$\left\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{E}\mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle = \left\langle \mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle.$$

La matrice $\mathbb{A}$ étant définie positive, la matrice diagonale $\mathbb{D}$ est définie positive car $d_{i,i} > 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, et donc $\mathbb{D}^{-1}$ aussi. Comme $\mathbb{F}\boldsymbol{p}$ n'est pas nécessairement non nul, on a

$$\left\langle \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle \in \mathbb{R}^+.$$

On en déduit

$$\left\langle \mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle = \overline{\left\langle \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle} = \left\langle \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle \geqslant 0.$$

De l'équation (R6.4), on obtient

$$\lambda(\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{A}\boldsymbol{p}\rangle + \left\langle \mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle) = \left\langle \mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle.$$

Or

$$\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{A}\boldsymbol{p}\rangle + \left\langle \mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\right\rangle > 0 \quad \text{donc} \quad \neq 0$$

ce qui donne

$$\lambda = \frac{\langle \mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\rangle}{\langle \boldsymbol{p}, \mathbb{A}\boldsymbol{p}\rangle + \langle \mathbb{F}\boldsymbol{p}, \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}\boldsymbol{p}\rangle}.$$

On a alors $\lambda \in [0, 1[$.

c. En posant $\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{x}_k - \underline{\boldsymbol{x}}$ on a alors

$$\boldsymbol{e}_k = \mathbb{B}^k\boldsymbol{e}_0, \quad \forall k \geqslant 0.$$

Or la suite $\boldsymbol{x}_k$ converge vers $\underline{\boldsymbol{x}}$ si et seulement si la suite $\boldsymbol{e}_k$ converge vers $\boldsymbol{0}$. Pour celà, d'après le Théorème 2.60, page 17 de [1], il est nécessaire et suffisant d'avoir $\rho(\mathbb{B}) < 1$. Comme toutes les valeurs propres de $\mathbb{B}$ sont dans $[0, 1[$, on a $\rho(\mathbb{B}) < 1$ et donc la convergence est assurée.

Q. 4

a. Ecrire une fonction algorithmique $[\mathbb{D}, \mathbb{E}, \mathbb{F}] \leftarrow$ Decomp$(\mathbb{A})$ *retournant la décomposition de la matrice* $\mathbb{A}$ *en* $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$.

b. Ecrire une fonction algorithmique RSLiter *utilisant* (6.1)-(6.2) *pour approcher la solution du système linéaire* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. *Pour celà on pourra utiliser les fonctions*

- $\boldsymbol{x} \leftarrow$ RSLtriinf$(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$ *retourne la solution du système* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *où* $\mathbb{A}$ *est une matrice triangulaire inférieure inversible,*
- $\boldsymbol{x} \leftarrow$ RSLtrisup$(\mathbb{A}, \boldsymbol{b})$ *retourne la solution du système* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *où* $\mathbb{A}$ *est une matrice triangulaire supérieure inversible.*

En aucun cas, il ne faudra utiliser les matrices inverses...

R. 4

a. Voici une correction possible:

Algorithme 1 Décomposition d'une matrice $\mathbb{A}$ en $\mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$

Données :
$\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Résultat :
$\mathbb{D}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale,
$\mathbb{E}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire inférieure à diagonale nulle,
$\mathbb{F}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure à diagonale nulle.

Fonction $[\mathbb{D}, \mathbb{E}, \mathbb{F}] \leftarrow$ Decomp($\mathbb{A}$)
  $\mathbb{D} \leftarrow \mathbb{0}_{n,n}$, $\mathbb{E} \leftarrow \mathbb{0}_{n,n}$, $\mathbb{F} \leftarrow \mathbb{0}_{n,n}$
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
      $\mathbb{E}(i,j) \leftarrow -\mathbb{A}(i,j)$
    Fin Pour
    $\mathbb{D}(i,i) \leftarrow \mathbb{A}(i,i)$
    Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**
      $\mathbb{F}(i,j) \leftarrow -\mathbb{A}(i,j)$
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Fonction

b. Connaissant les vecteurs $\boldsymbol{x}_k$ et $\boldsymbol{b}$, ainsi que les matrices $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$, il est possible de déterminer $\boldsymbol{x}_{k+1}$ en effectuant les opérations suivantes:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{k+1/2} &\leftarrow \text{RSLtriinf}(\mathbb{D} - \mathbb{E}, \mathbb{F}\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{b}) \\
\boldsymbol{x}_{k+1} &\leftarrow \text{RSLtrisup}(\mathbb{D} - \mathbb{F}, \mathbb{E}\boldsymbol{x}_{k+1/2} + \boldsymbol{b})
\end{aligned}$$

car les matrices $\mathbb{D} - \mathbb{E}$ et $\mathbb{D} - \mathbb{F}$ sont respectivement triangulaire inférieure et triangulaire supérieure.
Voici une correction possible:

Algorithme 2 Méthode itérative de l'exercice pour la résolution d'un système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Données :

$\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'éléments diagonaux non nuls
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{K}^n$,
$\boldsymbol{x}^0$: vecteur initial de $\mathbb{K}^n$,
ε : la tolérence, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$,
kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

$\boldsymbol{X}$: un vecteur de $\mathbb{K}^n$

Fonction $\boldsymbol{X} \leftarrow \mathrm{RSLiter}(\ \mathbb{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}^0, \varepsilon, \mathrm{kmax}\ )$
  $k \leftarrow 0$, $\boldsymbol{X} \leftarrow \varnothing$
  $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{r} \leftarrow \boldsymbol{b} - \mathbb{A} * \boldsymbol{x}$,
  $\mathrm{tol} \leftarrow \varepsilon(\|\boldsymbol{b}\| + 1)$
  $[\mathbb{D}, \mathbb{E}, \mathbb{F}] \leftarrow \mathrm{Decomp}(\mathbb{A})$
  $\mathbb{L} \leftarrow \mathbb{D} - \mathbb{E}$, $\mathbb{U} \leftarrow \mathbb{D} - \mathbb{F}$
  Tantque $\|\boldsymbol{r}\| > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\boldsymbol{x} \leftarrow \mathrm{RSLtriinf}(\mathbb{L}, \mathbb{F} * \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b})$
    $\boldsymbol{x} \leftarrow \mathrm{RSLtrisup}(\mathbb{U}, \mathbb{E} * \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b})$
    $\boldsymbol{r} \leftarrow \boldsymbol{b} - \mathbb{A} * \boldsymbol{x}$,
  Fin Tantque
  Si $\|\boldsymbol{r}\| \leqslant \mathrm{tol}$ **alors**
    $\boldsymbol{X} \leftarrow \boldsymbol{x}$
  Fin Si
Fin Fonction