

Exercices associés au cours d'Analyse Numérique I
Résolution de systèmes linéaires
Méthodes itératives

1 Exercices du cours

EXERCICE 1

Soit $\mathbb{A}$ une matrice inversible décomposée sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ avec $\mathbb{M}$ inversible. On pose

$$\mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mathbf{c} = \mathbb{M}^{-1}\mathbf{b}.$$

Montrer que la suite définie par

$$\mathbf{x}^{[0]} \in \mathbb{K}^n \quad \text{et} \quad \mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{c}$$

converge vers $\bar{\mathbf{x}} = \mathbb{A}^{-1}\mathbf{b}$ quelque soit $\mathbf{x}^{[0]}$ si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

EXERCICE 2

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible décomposée en $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ où $\mathbb{M}$ est inversible. On note $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$.

Q. 1 Montrer que la matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne.

On suppose maintenant que $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est définie positive.

Q. 2 Soit $\mathbf{x}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$ et $\mathbf{y} = \mathbb{B}\mathbf{x}$.

a. Montrer que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbb{A}\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x} \rangle \quad (2.1)$$

et

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\mathbf{x}. \quad (2.2)$$

b. En déduire que

$$\langle \mathbf{x}, \mathbb{A}\mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbb{A}\mathbf{y} \rangle = \langle (\mathbf{x} - \mathbf{y}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle. \quad (2.3)$$

Q. 3 Montrer que si $\mathbb{A}$ est définie positive alors $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

On suppose $\rho(\mathbb{B}) < 1$ et on va démontrer, par l'absurde, que $\mathbb{A}$ est définie positive.

Q. 4 On suppose qu'il existe $\mathbf{x}^{[0]} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $\alpha_0 \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{x}^{[0]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[0]} \rangle \in \mathbb{C} \setminus]0, +\infty[$. On définit alors les suites

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{x}^{[k]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k-1]} \quad \text{et} \quad \alpha_k = \langle \mathbf{x}^{[k]}, \mathbb{A}\mathbf{x}^{[k]} \rangle.$$

a. Montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}^{[k]} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k = 0.$$

b. Montrer que $\alpha_0 \in]-\infty, 0]$.

c. Démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que

$$(\mathcal{P}_k) : \mathbf{x}^{[k]} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k-1]} \neq \mathbf{0}, \quad \text{et} \quad 0 \geq \alpha_{k-1} > \alpha_k.$$

d. Conclure.

EXERCICE 3

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $A_{i,j}$ la composante (i, j) de la matrice $\mathbb{A}$. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte. La méthode S.O.R. (successive over relaxation) est donnée par

$$x_i^{[k+1]} = \frac{w}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{[k+1]} - \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j^{[k]} \right) + (1-w)x_i^{[k]}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

Q. 1 Déterminer la matrice d'itération $\mathbb{B}$ et le vecteur $\mathbf{c}$ tels que

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{[k]} + \mathbf{c}$$

en fonction de $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, et $\mathbf{b}$.

EXERCICE 4

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $A_{i,j}$ la composante (i, j) de la matrice $\mathbb{A}$. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte. La matrice d'itération de la méthode S.O.R., notée $\mathcal{L}_w$, est donnée par

$$\mathcal{L}_w = \left(\frac{\mathbb{D}}{w} - \mathbb{E} \right)^{-1} \left(\frac{1-w}{w} \mathbb{D} + \mathbb{F} \right). \quad (4.1)$$

On pose $\mathbb{L} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{E}$ et $\mathbb{U} = \mathbb{D}^{-1}\mathbb{F}$.

Q. 1 Montrer que

$$\mathcal{L}_w = (\mathbb{I} - w\mathbb{L})^{-1} ((1-w)\mathbb{I} + w\mathbb{U}).$$

Q. 2 En déduire que

$$\rho(\mathcal{L}_w) \geq |w-1|. \quad (4.2)$$

EXERCICE 5

On note $\mathbb{T} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice tridiagonale

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Q. 1 Soit $\mu \in \mathbb{C}^*$. On note $\mathbb{Q}(\mu) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice diagonale de diagonale $(\mu, \mu^2, \dots, \mu^n)$.

a. Expliciter la matrice $\mathbb{T}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}(\mu)\mathbb{T}\mathbb{Q}^{-1}(\mu)$ en fonction des coefficients tridiagonaux de la matrice $\mathbb{T}$ et de μ .

b. Déterminer $\det(\mathbb{T}(\mu))$ en fonction de $\det(\mathbb{T})$.

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible dont les éléments diagonaux sont non nuls. On note $A_{i,j}$ la composante (i, j) de la matrice $\mathbb{A}$. On décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$, où $\mathbb{D}$ représente la diagonale de $\mathbb{A}$, $-\mathbb{E}$ la partie triangulaire inférieure stricte et $-\mathbb{F}$ la partie triangulaire supérieure stricte. On note respectivement $\mathbb{J} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{D}^{-1}(\mathbb{E} + \mathbb{F})$ et $\mathcal{L}_1 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}\mathbb{F}$ les matrices d'itérations des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.

Soit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ par la méthode de Gauss-Seidel ou par la méthode de Jacobi.

On suppose dans la suite que la matrice inversible $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \nu_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \nu_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

et que ses éléments diagonaux sont non nuls.

Q. 2

a. Montrer que les valeurs propres de $\mathbb{J}$ sont les racines du polynôme

$$q_{\mathbb{J}}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}).$$

b. En utilisant la question 1, montrer que $q_{\mathbb{J}}(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{D} - \lambda \mathbb{E} - \frac{1}{\lambda} \mathbb{F})$.

c. En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de $\mathbb{J}$ alors $-\lambda$ l'est aussi.

Q. 3

a. Montrer que les valeurs propres de $\mathcal{L}_1$ sont les racines du polynôme

$$q_{\mathcal{L}_1}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\lambda \mathbb{D} - \lambda \mathbb{E} - \mathbb{F}).$$

b. En déduire que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad q_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2) = \lambda^n q_{\mathbb{J}}(\lambda). \quad (5.3)$$

Q. 4

a. Comparer les valeurs propres de $\mathbb{J}$ à celles de $\mathcal{L}_1$.

b. Une des deux méthodes est-elle à privilégier dans ce cas?

2 Exercice supplémentaire

EXERCICE 6

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive et $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$.

Q. 1

Montrer les résultats suivant:

a. tous les éléments diagonaux de $\mathbb{A}$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$.

b. toutes les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont dans $\mathbb{R}_+^*$.

c. $\mathbb{A}$ est inversible.

On note $\mathbf{x}$ la solution de $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et on décompose la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$ où $\mathbb{D} = \text{diag}(\mathbb{A})$ est la matrice diagonale telle que, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $D_{i,i} = A_{i,i}$, $\mathbb{E}$ est triangulaire inférieure d'éléments diagonaux nuls, et, $\mathbb{F}$ est triangulaire supérieure d'éléments diagonaux nuls.

On va étudier une méthode itérative pour la résolution du système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Soit $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ donné. On définit la suite $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$(\mathbb{D} - \mathbb{E})\mathbf{x}_{k+1/2} = \mathbb{F}\mathbf{x}_k + \mathbf{b} \quad (6.1)$$

$$(\mathbb{D} - \mathbb{F})\mathbf{x}_{k+1} = \mathbb{E}\mathbf{x}_{k+1/2} + \mathbf{b} \quad (6.2)$$

Q. 2

a. Démontrer, en justifiant toutes les opérations utilisées, que le vecteur $\mathbf{x}_{k+1}$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbb{B}\mathbf{x}_k + \mathbf{c} \quad (6.3)$$

en déterminant le vecteur $\mathbf{c}$ et en montrant que

$$\mathbb{B} = (\mathbb{D} - \mathbb{F})^{-1} \mathbb{E} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} \mathbb{F}.$$

b. Montrer que

$$\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x} = \mathbb{B}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}).$$

c. Montrer que

$$\mathbb{D}^{-1} = (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1} - \mathbb{D}^{-1} \mathbb{E} (\mathbb{D} - \mathbb{E})^{-1}. \quad (6.4)$$

Soit $(\lambda, \mathbf{p})$ un élément propre de la matrice $\mathbb{B}$.

Q. 3

a. Montrer que

$$\lambda \mathbb{A} \mathbf{p} + (\lambda - 1) \mathbb{E} \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} = 0. \quad (6.5)$$

b. En déduire que

$$\lambda = \frac{\langle \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbb{A} \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbb{F} \mathbf{p}, \mathbb{D}^{-1} \mathbb{F} \mathbf{p} \rangle} \in [0, 1[. \quad (6.6)$$

c. En déduire la convergence $\mathbf{x}_k$ vers $\mathbf{x}$.

Q. 4

a. Ecrire une fonction algorithmique $[\mathbb{D}, \mathbb{E}, \mathbb{F}] \leftarrow \text{Decomp}(\mathbb{A})$ retournant la décomposition de la matrice $\mathbb{A}$ en $\mathbb{A} = \mathbb{D} - \mathbb{E} - \mathbb{F}$.

b. Ecrire une fonction algorithmique **RSLiter** utilisant (6.1)-(6.2) pour approcher la solution du système linéaire $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Pour cela on pourra utiliser les fonctions

- $\mathbf{x} \leftarrow \text{RSLtriinf}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ retourne la solution du système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où $\mathbb{A}$ est une matrice triangulaire inférieure inversible,
- $\mathbf{x} \leftarrow \text{RSLtrisup}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$ retourne la solution du système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où $\mathbb{A}$ est une matrice triangulaire supérieure inversible.

En aucun cas, il ne faudra utiliser les matrices inverses...