Exercices associés au cours d'*Analyse Numérique I*
Résolution de systèmes non linéaires

Exercice 1

Q. 1 *Montrer que les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues.* □

Soient I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^1(I; R)$

Q. 2 *On suppose que f' est bornée, i.e.*

$$\exists L \in \mathbb{R}_+, \text{ tel que } \forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant L.$$

Montrer que f est lipschitzienne de rapport L. □

Q. 3 *Soit $L \in \mathbb{R}_+$. On suppose f lipschitzienne de rapport L.*
Montrer que f' est bornée. □

1 Recherche des zéros d'une fonction

Exercice 2 : Méthode de Dichotomie

On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, vérifie $f(a)f(b) < 0$ et qu'il existe un unique $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$. On défini les trois suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k,\ b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = x_k & \text{si } f(a_k)f(x_k) < 0. \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2.$$

Q. 1 *a. Montrer que les suites (a_k) et (b_k) convergent vers α.*

b. En déduire que la suite (x_k) converge vers α.

□

Q. 2 *a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}$.*

b. Soit $\epsilon > 0$. En déduire que si $k \geqslant \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$ alors $|x_k - \alpha| \leqslant \epsilon$.

□

Q. 3 [Algo] *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* Dichotomie, *retournant une approximation de α avec une précision de ϵ ainsi que le nombre d'itérations nécessaire.* □

Exercice 3

Soient $I = [0, \pi/2]$ et $\left\{ \begin{array}{ccccc} \Phi & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right.$. Soit $x_0 \in I \backslash \{0\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$x_{k+1} = \Phi(x_k).$$

Q. 1 *a. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien définie.*

b. Montrer que la suite converge vers $\alpha \in I$ que l'on déterminera.

□

Q. 2 *a. Montrer que*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = 1.$$

b. La convergence est-elle linéaire? Justifier.

□

Exercice 4

Soient $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et ϕ une fonction continue de $[a, b]$ dans lui même ($\phi([a, b]) \subset [a, b]$). Soit $x_0 \in [a, b]$. On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Q. 1 *Montrer que la suite (4.1) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).* □

Q. 2 *Montrer que si la suite (4.1) converge, alors elle converge vers un point fixe de ϕ.* □

Q. 3 *Existence du point fixe : montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $\phi(\alpha) = \alpha$.* □

On suppose de plus que ϕ est contractante, c'est à dire que

$$\exists\, L \in [0, 1[, \text{tel que}, \forall (x, y) \in [a, b]^2,\ |\phi(x) - \phi(y)| \leqslant L|x - y|.$$

Q. 4 *a. Montrer que ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$.*

b. Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers α, pour toute donnée initiale x_0 dans $[a, b]$.

□

Q. 5 [Algo] *Écrire l'algorithme du point fixe (fonction PointFixe) permettant de résoudre l'équation $\phi(x) = x$.* □

Exercice 5

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, (par ex., avec $a < b$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$ ou $\mathbb{R}$) et $\Phi : I \longrightarrow I$ une application contractante.
Soit $x_0 \in I$. On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{5.1}$$

Q. 1 *Montrer que la suite* (5.1) *est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).* □

On va démontrer que la suite (5.1) est une suite de Cauchy.

Q. 2 *a. Montrer que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |x_{k+1} - x_k| \leqslant L^k |x_1 - x_0|. \tag{5.2}$$

b. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall l \geqslant 0, \quad |x_{k+l} - x_{k+l-1}| \leqslant L^l |x_k - x_{k-1}|. \tag{5.3}$$

c. En déduire que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall p \geqslant 2, \quad |x_{k+p} - x_k| \leqslant \frac{1 - L^p}{1 - L} L^k |x_1 - x_0|. \tag{5.4}$$

□

Q. 3 *a. Déduire de la question précédente que la suite* (5.1) *est une suite de Cauchy.*

b. Montrer que la suite (5.1) *converge vers un point fixe de Φ à l'ordre 1 au moins.*

c. Montrer l'unicité du point fixe.

□

Exercice 6

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $I =]\alpha_-, \alpha_+[$ un voisinage de α et $\phi \in \mathcal{C}^1(I)$. On suppose que α est un point fixe de ϕ tel que

$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

Q. 1 *a. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, $|\phi'(x)| < 1$.*

b. Montrer que ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$ et que $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.

c. Citer précisemment le théorème du cours qui, à partir de Q. 1-*a. et b,permet d'en déduire la convergence de l'algorithme du point fixe vers α au moins à l'ordre 1.*

□

Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ et la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe.

Q. 2 *Montrer que, si $x_0 \in \mathcal{V} \backslash \{\alpha\}$, alors*

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha). \tag{6.1}$$

□

Q. 3 *Supposons maintenant que $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ et que*

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \phi^{(i)}(\alpha) = 0.$$

a. Montrer que la méthode du point fixe est d'ordre $p + 1$ au moins.

b. Montrer que, si $x_0 \in \mathcal{V} \backslash \{\alpha\}$, alors

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \tag{6.2}$$

c. Que peut-on dire si $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$?

□

Exercice 7

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ vérifiant $f(a)f(b)<0$. et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Soit $x_0 \in [a,b]$ donné. La suite obtenue par la méthode de la corde est donnée par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}$.

Q. 1 *Montrer que si pour tout $x \in [a,b]$ on a*

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leqslant f(x) \leqslant \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \tag{7.1}$$

alors $\Phi([a,b]) \subset [a,b]$. □

Q. 2 *Montrer que si pour tout $x \in [a,b]$ on a*

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \tag{7.2}$$

alors $|\Phi'(x)| < 1$. □

Q. 3 *En déduire que sous les deux conditions précédentes la méthode de la corde converge vers l'unique solution $\alpha \in [a,b]$ de $f(x) = 0$.* □

Exercice 8

En -1700 av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur $\sqrt{2}$, ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e-7$.

Q. 1 *Comment feriez-vous pour trouver **à la main** une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant $\sqrt{2}$.* □

Q. 2 *Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt{a}$ où a est un réel positif.* □

Q. 3 *Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt[n]{a}$ où a est un réel positif et $n \in \mathbb{N}^*$.* □

2 Dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 9

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $U \subset \mathcal{B}$ un sous-ensemble fermé. On suppose que $\boldsymbol{\Phi} : U \longrightarrow U$ est une application contractante. Soit $\boldsymbol{x}^{[0]} \in U$. On note $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$, la suite récurrente donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}^{[k]}). \tag{9.1}$$

Q. 1 *Montrer que la suite* (9.1) *est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).* □

On va démontrer que la suite (9.1) est une suite de Cauchy.

Q. 2 *a. Montrer que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left\| \boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\| \leqslant L^k \left\| \boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]} \right\|. \tag{9.2}$$

b. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall l \geqslant 0, \quad \|x_{k+l} - x_{k+l-1}\| \leqslant L^l \left\| \boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k-1]} \right\|. \tag{9.3}$$

c. En déduire que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall p \geqslant 2, \quad \left\| \boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\| \leqslant \frac{1 - L^p}{1 - L} L^k \left\| \boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]} \right\|. \tag{9.4}$$

□

Q. 3 *a. Déduire de la question précédente que la suite* (9.1) *est une suite de Cauchy.*

b. Montrer que la suite (9.1) *converge vers un point fixe de Φ à l'ordre 1 au moins.*

c. Montrer l'unicité du point fixe.

□