

Exercices associés au cours d'Analyse Numérique I

Résolution de systèmes non linéaires

EXERCICE 1

Q. 1 Montrer que les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues. □

Soient I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$

Q. 2 On suppose que f' est bornée, i.e.

$$\exists L \in \mathbb{R}_+, \text{ tel que } \forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq L.$$

Montrer que f est lipschitzienne de rapport L . □

Q. 3 Soit $L \in \mathbb{R}_+$. On suppose f lipschitzienne de rapport L .

Montrer que f' est bornée. □

1 Recherche des zéros d'une fonction

EXERCICE 2 : Méthode de Dichotomie

On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, vérifie $f(a)f(b) < 0$ et qu'il existe un unique $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$. On définit les trois suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$,

- $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k, \quad b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} = x_k & \text{si } f(a_k)f(x_k) < 0. \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2.$$

Q. 1 a. Montrer que les suites (a_k) et (b_k) convergent vers α .

b. En déduire que la suite (x_k) converge vers α . □

Q. 2 a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$.

b. Soit $\epsilon > 0$. En déduire que si $k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$ alors $|x_k - \alpha| \leq \epsilon$. □

Q. 3 [Algo] Ecrire une fonction algorithmique, nommée **Dichotomie**, retournant une approximation de α avec une précision de ϵ ainsi que le nombre d'itérations nécessaire. □

EXERCICE 3

Soient $I = [0, \pi/2]$ et $\begin{cases} \Phi & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{cases}$. Soit $x_0 \in I \setminus \{0\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$x_{k+1} = \Phi(x_k).$$

Q. 1 a. Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

b. Montrer que la suite converge vers $\alpha \in I$ que l'on déterminera.

□

Q. 2 a. Montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = 1.$$

b. La convergence est-elle linéaire? Justifier.

□

EXERCICE 4

Soient $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et ϕ une fonction continue de $[a, b]$ dans lui même ($\phi([a, b]) \subset [a, b]$). Soit $x_0 \in [a, b]$. On considère la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

Q. 1 Montrer que la suite (4.1) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).

□

Q. 2 Montrer que si la suite (4.1) converge, alors elle converge vers un point fixe de ϕ .

□

Q. 3 Existence du point fixe : montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $\phi(\alpha) = \alpha$.

□

On suppose de plus que ϕ est contractante, c'est à dire que

$$\exists L \in [0, 1[, \text{ tel que, } \forall (x, y) \in [a, b]^2, |\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|.$$

Q. 4 a. Montrer que ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$.

b. Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers α , pour toute donnée initiale x_0 dans $[a, b]$.

□

Q. 5 [Algo] Écrire l'algorithme du point fixe (fonction **PointFixe**) permettant de résoudre l'équation $\phi(x) = x$.

□

EXERCICE 5

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, (par ex., avec $a < b$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $] - \infty, a]$ ou $\mathbb{R}$) et $\Phi : I \longrightarrow I$ une application contractante.

Soit $x_0 \in I$. On considère la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.1)$$

Q. 1 Montrer que la suite (5.1) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$). □

On va démontrer que la suite (5.1) est une suite de Cauchy.

Q. 2 a. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, |x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|. \quad (5.2)$$

b. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall l \geq 0, |x_{k+l} - x_{k+l-1}| \leq L^l |x_k - x_{k-1}|. \quad (5.3)$$

c. En déduire que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall p \geq 2, |x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} L^k |x_1 - x_0|. \quad (5.4)$$

□

Q. 3 a. Déduire de la question précédente que la suite (5.1) est une suite de Cauchy.

b. Montrer que la suite (5.1) converge vers un point fixe de Φ à l'ordre 1 au moins.

c. Montrer l'unicité du point fixe. □

EXERCICE 6

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $I =]\alpha_-, \alpha_+[$ un voisinage de α et $\phi \in \mathcal{C}^1(I)$. On suppose que α est un point fixe de ϕ tel que

$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

Q. 1 a. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, $|\phi'(x)| < 1$.

b. Montrer que ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$ et que $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.

c. Citer précisément le théorème du cours qui, à partir de Q. 1-a. et b, permet d'en déduire la convergence de l'algorithme du point fixe vers α au moins à l'ordre 1. □

Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ et la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe.

Q. 2 Montrer que, si $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{\alpha\}$, alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha). \quad (6.1)$$

□

Q. 3 Supposons maintenant que $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ et que

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \phi^{(i)}(\alpha) = 0.$$

a. Montrer que la méthode du point fixe est d'ordre $p + 1$ au moins.

b. Montrer que, si $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{\alpha\}$, alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \quad (6.2)$$

c. Que peut-on dire si $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$? □

EXERCICE 7

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ vérifiant $f(a)f(b) < 0$. et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Soit $x_0 \in [a, b]$ donné. La suite obtenue par la méthode de la corde est donnée par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}$.

Q. 1 Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leq f(x) \leq \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (7.1)$$

alors $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$. □

Q. 2 Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (7.2)$$

alors $|\Phi'(x)| < 1$. □

Q. 3 En déduire que sous les deux conditions précédentes la méthode de la corde converge vers l'unique solution $\alpha \in [a, b]$ de $f(x) = 0$. □

EXERCICE 8

En -1700 av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur $\sqrt{2}$, ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e-7$.



Q. 1 Comment feriez-vous pour trouver **à la main** une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant $\sqrt{2}$. □

Q. 2 Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt{a}$ où a est un réel positif. □

Q. 3 Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt[n]{a}$ où a est un réel positif et $n \in \mathbb{N}^*$. □

2 Dans $\mathbb{R}^n$

EXERCICE 9

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $U \subset \mathcal{B}$ un sous-ensemble fermé. On suppose que $\Phi : U \rightarrow U$ est une application contractante. Soit $\mathbf{x}^{[0]} \in U$. On note $(\mathbf{x}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$, la suite récurrente donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{x}^{[k+1]} = \Phi(\mathbf{x}^{[k]}). \quad (9.1)$$

Q. 1 Montrer que la suite (9.1) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$). □

On va démontrer que la suite (9.1) est une suite de Cauchy.

Q. 2 a. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq L^k \|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|. \quad (9.2)$$

b. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall l \geq 0, \quad \|x_{k+l} - x_{k+l-1}\| \leq L^l \|\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k-1]}\|. \quad (9.3)$$

c. En déduire que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geq 2, \quad \|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} L^k \|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|. \quad (9.4)$$

□

Q. 3 a. Déduire de la question précédente que la suite (9.1) est une suite de Cauchy.

b. Montrer que la suite (9.1) converge vers un point fixe de Φ à l'ordre 1 au moins.

c. Montrer l'unicité du point fixe.

□