

# Exercices associés au cours d'Analyse Numérique I

## Résolution de systèmes non linéaires

### EXERCICE 1

**Q. 1** Montrer que les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues. □

Soient  $I$  un intervalle et  $f \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$

**Q. 2** On suppose que  $f'$  est bornée, i.e.

$$\exists L \in \mathbb{R}_+, \text{ tel que } \forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq L.$$

Montrer que  $f$  est lipschitzienne de rapport  $L$ . □

**Q. 3** Soit  $L \in \mathbb{R}_+$ . On suppose  $f$  lipschitzienne de rapport  $L$ .

Montrer que  $f'$  est bornée. □

### Correction

**R. 1** Par hypothèse, on a

$$\exists K \in \mathbb{R}_+, \text{ tel que, } \forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Si  $K = 0$ , la fonction  $f$  est alors constante et donc uniformément continue.

On suppose maintenant que  $K > 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour avoir  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ , il suffit d'avoir  $K|x - y| < \varepsilon$ . En posant  $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ , on a  $\delta > 0$  et  $\forall (x, y) \in I^2$ ,

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq K|x - y| < K\delta < \varepsilon.$$

et donc  $f$  est uniformément continue sur  $I$ .

**R. 2** Soit  $(x, y) \in I^2$ ,  $x \neq y$ . D'après la formule de Taylor-Lagrange (ou théorème des accroissements finis), il existe  $\xi \in ]x, y[$  tel que

$$f(x) - f(y) = (x - y)f'(\xi)$$

et donc

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

La fonction  $f$  est donc  $L$ -lipschitzienne.

**R. 3** Soient  $x \in I$  et  $h \in \mathbb{R}^*$  tel que  $x + h \in I$ . D'après la formule de Taylor-Lagrange (ou théorème des accroissements finis), il existe  $\xi_h \in ]\min(x, x + h), \max(x, x + h)[$  tel que

$$f(x + h) - f(x) = hf'(\xi_h)$$

De plus,  $f$  étant  $L$ -lipschitzienne, on a

$$|f(x + h) - f(x)| \leq L|h|.$$

Comme  $h \neq 0$ , on en déduit

$$|f'(\xi_h)| \leq L.$$

On a  $\xi_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} x$ , et comme  $f'$  continue,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f'(\xi_h) = f'(\lim_{h \rightarrow 0} \xi_h) = f'(x).$$

En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient alors

$$|f'(x)| \leq L.$$

◇

## 1 Recherche des zéros d'une fonction

### EXERCICE 2 : Méthode de Dichotomie

On suppose que la fonction  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , vérifie  $f(a)f(b) < 0$  et qu'il existe un unique  $\alpha \in ]a, b[$  tel que  $f(\alpha) = 0$ . On définit les trois suites  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  par

- $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$  et  $x_0 = \frac{a+b}{2}$ ,
- $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k & \text{si } f(a_k)f(x_k) < 0. \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2.$$

**Q. 1** a. Montrer que les suites  $(a_k)$  et  $(b_k)$  convergent vers  $\alpha$ .

b. En déduire que la suite  $(x_k)$  converge vers  $\alpha$ .

□

**Q. 2** a. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$ .

b. Soit  $\epsilon > 0$ . En déduire que si  $k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$  alors  $|x_k - \alpha| \leq \epsilon$ .

□

**Q. 3 [Algo]** Ecrire une fonction algorithmique, nommée **Dichotomie**, retournant une approximation de  $\alpha$  avec une précision de  $\epsilon$  ainsi que le nombre d'itérations nécessaire.

□



### Correction

**R. 1** a. Supposons qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $f(x_k) = 0$ , (i.e.  $x_k = \alpha$  car  $x_k \in [a, b]$ ) alors par construction  $a_{k+i} = b_{k+i} = x_{k+i} = \alpha$  pour tout  $i \in \mathbb{N}^*$ . Ceci assure la convergence des 3 suites vers  $\alpha$ .

Supposons maintenant que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $f(x_k) \neq 0$ . Par construction, nous avons  $a_k \leq a_{k+1} \leq b$ ,  $a \leq b_{k+1} \leq b_k$  et  $a_k \leq b_k$ . La suite  $(a_k)$  est convergente car elle est croissante et majorée. La suite  $(b_k)$  est décroissante et minorée : elle est donc convergente. De plus  $0 \leq b_k - a_k \leq \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}$  et donc  $0 \leq b_k - a_k \leq \frac{b-a}{2^k}$ . On en déduit que les suites  $(a_k)$  et  $(b_k)$  ont même limite. Comme par construction,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in [a_k, b_k]$  ceci entraîne que  $\alpha$  est la limite de ces 2 suites.

- b. Par construction,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k \leq x_k \leq b_k$ . D'après le théorème des gendarmes, les suites  $(a_k)$  et  $(b_k)$  convergeant vers  $\alpha$ , on obtient la convergence de la suite  $(x_k)$  vers  $\alpha$ .

**R. 2** a. On a  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$  et  $a_k \leq \alpha \leq b_k$  d'où  $|x_k - \alpha| \leq \frac{b_k - a_k}{2}$ . Ce qui donne

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b - a}{2^{k+1}}.$$

- b. Pour avoir  $|x_k - \alpha| \leq \epsilon$ , il suffit d'avoir  $\frac{b-a}{2^{k+1}} \leq \epsilon$ , et la fonction  $\log$  étant croissante on obtient

$$k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1.$$

**R. 3** Voici un exemple d'une telle fonction (existence mais non unicité de racines)

---

**Algorithme 1** Méthode de dichotomie pour la recherche d'une racine  $\alpha$  de  $f$

---

**Données :**  $a, b$  : deux réels  $a < b$ ,  
 $f$  :  $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$  et  $f(a)f(b) < 0$   
 $\text{eps}$  : un réel strictement positif.

**Résultat :**  $x$  : un réel tel que  $|x - \alpha| \leq \text{eps}$ .  
 $\text{iter}$  : nombre d'itérations nécessaire.

```

1: Fonction  $[x, \text{iter}] \leftarrow \text{Dichotomie}(f, a, b, \text{eps})$ 
2:    $A, B \in \mathbb{R}$ 
3:    $A \leftarrow a, B \leftarrow b, x \leftarrow (a + b)/2$ 
4:    $\text{iter} \leftarrow 0$ 
5:   Tantque  $|x - A| > \text{eps}$  faire
6:     Si  $f(x) == 0$  alors
7:        $A \leftarrow x, B \leftarrow x$ 
8:     Sinon Si  $f(B)f(x) < 0$  alors
9:        $A \leftarrow x$  ▷  $B$  inchangé
10:    Sinon
11:       $B \leftarrow x$  ▷  $A$  inchangé
12:    Fin Si
13:     $x \leftarrow (A + B)/2$ 
14:     $\text{iter} \leftarrow \text{iter} + 1$ 
15:  Fin Tantque
16: Fin Fonction

```

---

◇

### EXERCICE 3

Soient  $I = [0, \pi/2]$  et  $\begin{cases} \Phi & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{cases}$ . Soit  $x_0 \in I \setminus \{0\}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on pose

$$x_{k+1} = \Phi(x_k).$$

**Q. 1** a. Montrer que la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est bien définie.

b. Montrer que la suite converge vers  $\alpha \in I$  que l'on déterminera.

□

**Q. 2** a. Montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = 1.$$

b. La convergence est-elle linéaire? Justifier.

□

### Correction

**R. 1** a. Pour cela, il suffit de démontrer par récurrence sur  $k$  que  $x_k \in I$ .

- Initialisation:  $x_0 \in I$ , par hypothèse.
- Hérédité: Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On suppose  $x_k \in I$ , et on peut donc calculer  $f(x_k)$  et définir  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ .  
Or, sur  $\mathbb{R}_+$ , on a  $\sin(x) \leq x$ , (étudier  $g(x) = x - \sin(x)$  ...). Comme  $x_k \in I$  et que  $\sin(x) \geq 0, \forall x \in I$ , on obtient

$$0 \leq x_{k+1} = \sin(x_k) \leq x_k$$

et donc  $x_{k+1} \in I$ .

b. On a vu que la suite était décroissante ( $x_{k+1} \leq x_k$ ) et minorée par 0: elle est donc convergente. Notons  $\alpha \in \mathbb{R}$  sa limite.

On a,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k \in I$ , un fermé borné de  $\mathbb{R}$ , donc  $\alpha \in I$ .

Comme  $\Phi$  est continue sur  $I$ , on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \Phi\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k\right) = f(\alpha)$$

De plus, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} = \alpha$$

et donc  $\alpha \in I$  est un point fixe de  $\Phi$ .

En posant  $g(x) = x - \Phi(x)$ , on a  $g(0) = 0$  et,  $\forall x \in I \setminus \{0\}$ ,  $g'(x) = 1 - \cos(x) > 0$  c'est à dire  $g(x) > 0$ : la seule racine de  $g$  dans  $I$  est donc 0 et c'est alors l'unique point fixe de  $\Phi$ , i.e.  $\alpha = 0$ .

**R. 2** a. Comme  $x_0 \in I \setminus \{0\}$ , ar une simple récurrence, on peut montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < x_k < 1.$$

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Comme  $\Phi \in \mathcal{C}^1$ , on a, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange,

$$\xi_k \in ]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[, \quad \Phi(x_k) = \Phi(\alpha) + (x_k - \alpha)\Phi'(\xi_k).$$

On obtient donc

$$\Phi(x_k) - \Phi(\alpha) = x_{k+1} - \alpha = (x_k - \alpha)\Phi'(\xi_k)$$

Comme  $x_k - \alpha \neq 0$ , on en déduit

$$\frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \Phi'(\xi_k).$$

Or  $x_k$  converge vers  $\alpha$  et  $\xi_k \in ]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[$  entraîne  $\xi_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \alpha$ .

La fonction  $\Phi'$  étant continue, un passage à limite donne

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi'(\xi_k) = \Phi'(\alpha) = \cos(0) = 1.$$

b. La convergence n'est pas linéaire car il aurait fallu démontrer l'existence de  $\mu \in ]0, 1[$  telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \mu.$$

La convergence est donc sous-linéaire.

## EXERCICE 4

Soient  $[a, b]$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$  et  $\phi$  une fonction continue de  $[a, b]$  dans lui-même ( $\phi([a, b]) \subset [a, b]$ ). Soit  $x_0 \in [a, b]$ . On considère la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  donnée par

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

**Q. 1** Montrer que la suite (4.1) est bien définie ( $x_k$  existe pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ). □

**Q. 2** Montrer que si la suite (4.1) converge, alors elle converge vers un point fixe de  $\phi$ . □

**Q. 3** Existence du point fixe : montrer qu'il existe  $\alpha \in [a, b]$  tel que  $\phi(\alpha) = \alpha$ . □

On suppose de plus que  $\phi$  est contractante, c'est à dire que

$$\exists L \in [0, 1[, \text{ tel que, } \forall (x, y) \in [a, b]^2, |\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|.$$

**Q. 4** a. Montrer que  $\phi$  admet un unique point fixe  $\alpha \in [a, b]$ .

b. Montrer que la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$ , pour toute donnée initiale  $x_0$  dans  $[a, b]$ . □

**Q. 5 [Algo]** Écrire l'algorithme du point fixe (fonction **PointFixe**) permettant de résoudre l'équation  $\phi(x) = x$ . □



### Correction

**R. 1** La suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , est bien définie si la relation (4.1) permet de définir complètement (et de manière unique) l'ensemble des termes de la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , connaissant  $x_0$ .

Dans le cas présent, il faut s'assurer que  $x_k \in [a, b]$  pour tout entier  $k$  car la fonction  $\phi$  n'est par hypothèse définie que sur  $[a, b]$ . En effet, si  $x_k$  n'appartient pas à l'intervalle  $[a, b]$ , alors on ne peut pas définir  $x_{k+1}$  puisque  $\phi(x_k)$  n'existe pas.

Nous montrons ce résultat par récurrence :

- Initialisation pour  $k = 0$ . Par hypothèse,  $x_0 \in [a, b]$ .
- Hérédité: nous supposons que  $x_k \in [a, b]$  et nous allons montrer que  $x_{k+1} \in [a, b]$ . Par définition,  $x_{k+1} = \phi(x_k)$ . Puisque par hypothèse,  $\phi([a, b]) \subset [a, b]$ , on en déduit immédiatement que  $x_{k+1} \in [a, b]$ .

**Remarque.** hypothèse importante :  $\phi([a, b]) \subset [a, b]$ .

**R. 2** Supposons que la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite notée  $\bar{x}$ .  $\bar{x} \in [a, b]$  car  $[a, b]$  est un intervalle fermé. Par ailleurs, en utilisant la continuité de  $\phi$ , on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi(x_k) = \phi(\bar{x}).$$

Par les théorème de comparaison des limites et la relation (4.1), on a:

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} \stackrel{(4.1)}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi(x_k) = \phi(\bar{x}).$$

Ainsi  $\bar{x} = \phi(\bar{x})$  et donc  $\bar{x}$  est un point fixe de  $\phi$ .

**Remarque.** hypothèses importantes :  $[a, b]$  est fermé et  $\phi$  est continue sur  $[a, b]$ .

**R. 3** On considère la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \phi(x) - x$ . Comme  $\phi([a, b]) \subset [a, b]$ ,

$$g(a) = \phi(a) - a \geq a - a \geq 0.$$

De manière similaire,

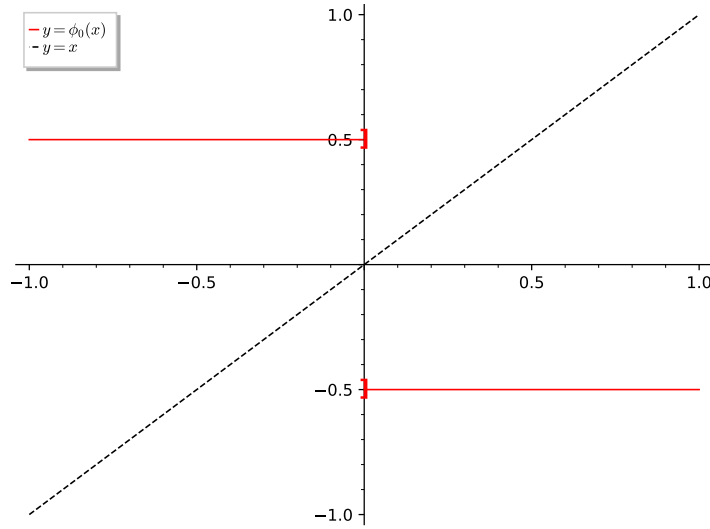
$$g(b) = \phi(b) - b \leq b - b \leq 0.$$

Puisque  $\phi$  est continue sur  $[a, b]$ , le théorème des valeurs intermédiaires (ou Bolzano) (sur  $[a, b]$ ,  $\phi$  prend toutes les valeurs entre  $\phi(a)$  et  $\phi(b)$ ) garantit l'existence d'un nombre  $\alpha \in [a, b]$  tel que  $g(\alpha) = 0$ . Or

$$0 = g(\alpha) = \phi(\alpha) - \alpha,$$

donc  $\alpha$  est un point fixe de  $\phi$ .

**Remarque.** L'hypothèse de continuité de  $\phi$  est cruciale. Le résultat est faux si  $\phi$  n'est pas continue. On peut par exemple considérer la fonction  $\phi_0 : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  telle que  $\phi_0(x) = \frac{1}{2}$  si  $-1 \leq x \leq 0$ , et  $\phi_0(x) = -\frac{1}{2}$  si  $0 < x \leq 1$ , qui n'admet pas de point fixe sur  $[-1, 1]$ .



**Figure 1:** Graphe représentatif de la fonction  $\phi_0$  et de la droite  $y = x$

On pourra aussi remarquer qu'il n'y a pas forcément unicité du point fixe. En effet, la fonction  $\phi$  définie par  $\phi(x) = x$ ,  $\forall x \in [a, b]$  est continue de  $[a, b]$  dans  $[a, b]$  et admet une infinité de points fixes.

**R. 4** a. Nous utilisons une démarche classique pour montrer l'unicité. Nous supposons que la fonction  $\phi$  admet deux points fixes  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ( $\alpha_1 = \phi(\alpha_1)$  et  $\alpha_2 = \phi(\alpha_2)$ ) et nous allons montrer que  $\alpha_1 = \alpha_2$ . En utilisant le fait que  $\phi$  est contractante, on a

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |\phi(\alpha_1) - \phi(\alpha_2)| \leq L|\alpha_1 - \alpha_2|.$$

ce qui peut être réécrit comme

$$(1 - L)|\alpha_1 - \alpha_2| \leq 0. \quad (4.2)$$

Comme  $(1 - L) > 0$ , l'inégalité (4.2) implique  $|\alpha_1 - \alpha_2| \leq 0$  et donc  $\alpha_1 = \alpha_2$ . La fonction  $\phi$  a donc au plus un point fixe.

b. On a montré, dans les questions précédentes, que la fonction  $\phi$  admet un unique point fixe  $\alpha \in [a, b]$ . Alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$|x_{k+1} - \alpha| = |\phi(x_k) - \phi(\alpha)| \leq L|x_k - \alpha|,$$

si bien que, par récurrence, on peut montrer que

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Comme  $L < 1$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} L^k = 0$  et donc le terme de droite de l'inégalité précédente tend vers 0. Par le théorème de comparaison des limites,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k - \alpha| = 0.$$

**R. 5** On écrit ci-dessous l'algorithme du point fixe, en supposant que l'on recherche un point fixe non nul.

---

**Algorithme 2** Fonction **PointFixe** : résout  $\phi(x) = x$  par la méthode du point fixe

---

**Données :**  $\phi$  : fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$   
 $x_0$  : nombre réel, (donnée initiale)  
 $tol$  : nombre réel strictement positif (tolérance)  
 $k_{\max}$  : nombre entier supérieur ou égal à 1 (nombre maximal d'itérations)

**Résultat :**  $x$  : un réel tel que  $\frac{|\phi(x)-x|}{|x|+1} \leq tol$

---

```

1: Fonction  $x \leftarrow \text{PointFixe}(\phi, x_0, tol, k_{\max})$ 
2:    $k \leftarrow 1$ 
3:    $x \leftarrow \phi(x_0)$ 
4:    $r \leftarrow \frac{|x-x_0|}{|x|+1}$  ▷ résidu à l'itération 1
5:   Tantque  $r > tol$  et  $k \leq k_{\max}$  faire
6:      $x_0 \leftarrow x$ 
7:      $x \leftarrow \phi(x_0)$ 
8:      $r \leftarrow \frac{|x-x_0|}{|x|+1}$  ▷ résidu à l'itération k+1
9:      $k \leftarrow k + 1$ 
10:  Fin Tantque
11: Fin Fonction

```

---

◇

## EXERCICE 5

Soient  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle fermé, non vide, (par ex., avec  $a < b$ ,  $[a, b]$ ,  $[a, +\infty[$ ,  $] - \infty, a]$  ou  $\mathbb{R}$ ) et  $\Phi : I \longrightarrow I$  une application contractante.  
 Soit  $x_0 \in I$ . On considère la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  donnée par

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.1)$$

**Q. 1** Montrer que la suite (5.1) est bien définie ( $x_k$  existe pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ). □

On va démontrer que la suite (5.1) est une suite de Cauchy.

**Q. 2** a. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|. \quad (5.2)$$

b. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall l \geq 0, \quad |x_{k+l} - x_{k+l-1}| \leq L^l |x_k - x_{k-1}|. \quad (5.3)$$

c. En déduire que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geq 2, \quad |x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1-L^p}{1-L} L^k |x_1 - x_0|. \quad (5.4)$$

□

- Q. 3** a. Dédurre de la question précédente que la suite (5.1) est une suite de Cauchy.  
 b. Montrer que la suite (5.1) converge vers un point fixe de  $\Phi$  à l'ordre 1 au moins.  
 c. Montrer l'unicité du point fixe.

□

### Correction

**R. 1** La suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , est bien définie si la relation (5.1) permet de définir complètement (et de manière unique) l'ensemble des termes de la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , connaissant  $x_0$ .

Il faut donc vérifier que,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k \in I$ , car il faut pouvoir calculer  $\Phi(x_k)$  et que  $\Phi$  est définie sur  $I$ .

C'est bien sur immédiat par récurrence car  $\Phi(I) \subset I$ . On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation: pour  $k = 0$ . Par hypothèse,  $x_0 \in I$ .
- Hérédité: on suppose  $x_k \in I$ , montrons que  $x_{k+1} \in I$ . Par définition,  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ . Puisque par hypothèse,  $\Phi(I) \subset I$ , on a  $x_{k+1} \in I$ .

**R. 2** a. La fonction  $\Phi$  étant contractante sur  $I$ , on a, par définition:

$$\exists L \in [0, 1[ \text{ t.q. } \forall (x, y) \in I^2, \quad |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y|.$$

On obtient alors

$$|x_{k+1} - x_k| = |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| \leq L|x_k - x_{k-1}|.$$

Par récurrence, on en déduit que la proposition suivante est vraie pour tout  $k \in \mathbb{N}$ :

$$(\mathcal{P}_k) : \quad |x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|.$$

On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation:  $(\mathcal{P}_0)$  est trivialement vraie.
- Hérédité: soit  $k \in \mathbb{N}$ , on suppose que  $(\mathcal{P}_k)$  est vérifiée. Montrons que  $(\mathcal{P}_{k+1})$  est vraie. On a, en utilisant (5.1) et l'hypothèse de contraction sur  $\Phi$ ,

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| = |\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)| \leq L|x_{k+1} - x_k|.$$

Par hypothèse de récurrence, on en déduit

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| \leq LL^k |x_1 - x_0|$$

et donc  $(\mathcal{P}_{k+1})$  est vraie.

b. Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $p \geq 2$ . On a

$$|x_{k+p} - x_k| = |(x_{k+p} - x_{k+p-1}) + (x_{k+p-1} - x_{k+p-2}) + \dots + (x_{k+1} - x_k)| = \left| \sum_{l=0}^{p-1} (x_{k+l+1} - x_{k+l}) \right|.$$

Par application répétée de l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \sum_{l=0}^{p-1} |x_{k+l+1} - x_{k+l}|$$

En utilisant (5.3), on obtient alors

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \sum_{l=0}^{p-1} L^l |x_{k+1} - x_k| = |x_{k+1} - x_k| \sum_{l=0}^{p-1} L^l.$$

La somme correspond alors à une somme partielle d'une série géométrique et donc

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} |x_{k+1} - x_k|.$$

En utilisant (5.2), on obtient alors (5.4).

**R. 3** a. On a  $0 \leq L < 1$ , et donc  $L^k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . De (5.4), on déduit alors que  $(x_k)$  est une suite de Cauchy.

On propose toutefois une démonstration détaillée.

Pour que  $(x_k)$  soit une suite de Cauchy, il faut montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N}, k \geq M, \forall p \in \mathbb{N}, |x_{k+p} - x_k| < \epsilon.$$

Comme  $0 < L < 1$ , on a

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1}{1-L} L^k |x_1 - x_0|$$

Soit  $\epsilon > 0$ , pour avoir  $|x_{k+p} - x_k| < \epsilon$ , il est suffisant d'avoir

$$\frac{1}{1-L} L^k |x_1 - x_0| < \epsilon$$

c'est à dire, comme  $1 - L > 0$ ,

$$L^k < \frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}.$$

La fonction  $\ln$  étant croissante strictement on obtient

$$\ln(L^k) = k \ln(L) < \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right).$$

Or  $\ln(L) < 0$ , ce qui donne

$$k > \frac{1}{\ln(L)} \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right).$$

En prenant  $M \in \mathbb{N}$  tel que

$$M > \frac{1}{\ln(L)} \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right)$$

alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq M, \forall p \in \mathbb{N}, |x_{k+p} - x_k| < \epsilon.$$

b. La suite  $(x_k)$  est une suite de Cauchy dans  $\mathbb{R}$  espace complet donc elle converge dans  $\mathbb{R}$  vers un point que l'on nomme  $\beta$ . De plus pour tout  $k$ ,  $x_k$  appartient à  $I$  fermé, donc sa limite  $\beta$  appartient aussi à  $I$ .

La fonction  $\Phi$  étant contractante sur  $I$ , elle est donc continue sur  $I$ . On a alors par continuité de  $\Phi$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \Phi(\beta).$$

Comme  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$  on aussi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} = \beta$$

et donc  $\beta$  est un point fixe de  $\Phi$ . L'existence d'un point fixe est donc établi.

On a donc

$$|x_{k+1} - \beta| = |\Phi(x_k) - \Phi(\beta)| \leq L|x_k - \beta|.$$

Comme  $0 \leq L < 1$ , la convergence est au moins d'ordre 1.

c. On suppose qu'il existe  $\beta_1$  et  $\beta_2$  dans  $[a, b]$  tels que  $\Phi(\beta_1) = \beta_1$  et  $\Phi(\beta_2) = \beta_2$ . Dans ce cas on a

$$|\beta_1 - \beta_2| = |\Phi(\beta_1) - \Phi(\beta_2)| \leq L|\beta_1 - \beta_2|.$$

On en déduit

$$(1-L)|\beta_1 - \beta_2| \leq 0$$

Comme  $1 - L > 0$ , on en déduit  $\beta_1 = \beta_2$ , c'est à dire l'unicité du point fixe.

## EXERCICE 6

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $I = ]\alpha_-, \alpha_+[$  un voisinage de  $\alpha$  et  $\phi \in \mathcal{C}^1(I)$ . On suppose que  $\alpha$  est un point fixe de  $\phi$  tel que

$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

- Q. 1** a. Montrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ ,  $|\phi'(x)| < 1$ .  
 b. Montrer que  $\phi$  est contractante sur  $\mathcal{V}$  et que  $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ .  
 c. Citer précisément le théorème du cours qui, à partir de Q. 1-a. et b., permet d'en déduire la convergence de l'algorithme du point fixe vers  $\alpha$  au moins à l'ordre 1.

□

Soit  $x_0 \in \mathcal{V}$  et la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par l'algorithme du point fixe.

- Q. 2** Montrer que, si  $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{\alpha\}$ , alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha). \quad (6.1)$$

□

- Q. 3** Supposons maintenant que  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$  et que

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \phi^{(i)}(\alpha) = 0.$$

- a. Montrer que la méthode du point fixe est d'ordre  $p+1$  au moins.  
 b. Montrer que, si  $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{\alpha\}$ , alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \quad (6.2)$$

- c. Que peut-on dire si  $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$ ?

□

### Correction

- R. 1** a. Puisque  $\phi'$  est continue et que  $|\phi'(\alpha)| < 1$ , il existe  $\delta > 0$  et un intervalle fermé  $\mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset ]\alpha_-, \alpha_+[$  tels que pour tout  $x \in \mathcal{V}$ ,  $|\phi'(x)| < 1$ .  
 On propose ici une démonstration de ce résultat.

□ Comme  $\phi'$  est continue en  $\alpha$ , on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, \left( |x - \alpha| < \beta \Rightarrow |\phi'(x) - \phi'(\alpha)| < \varepsilon \right).$$

On note  $M = \phi'(\alpha)$  et on prend  $\varepsilon = 1 - |M|$  qui est strictement positif car  $0 \geq |M| = |\phi'(\alpha)| < 1$ . Dans ce cas, il existe  $\beta > 0$  tel que  $]\alpha - \beta, \alpha + \beta[ \subset I$  et

$$\forall x \in I, \left( |x - \alpha| < \beta \Rightarrow |\phi'(x) - M| < 1 - |M| \right).$$

Soit  $x \in I$  tel que  $|x - \alpha| < \beta$ , c'est à dire  $x \in ]\alpha - \beta, \alpha + \beta[$ , alors on a

$$\begin{aligned} |\phi'(x) - M| < 1 - |M| &\Leftrightarrow -1 + |M| < \phi'(x) - M < 1 - |M| \\ &\Leftrightarrow -1 + M + |M| < \phi'(x) < 1 + M - |M| \end{aligned}$$

Comme  $-|M| \leq M \leq |M|$ , on a  $M + |M| \geq 0$  et  $M - |M| \leq 0$ , ce qui entraine

$$|\phi'(x) - M| < 1 - |M| \Rightarrow -1 < \phi'(x) < 1.$$

On a donc,

$$\forall x \in ]\alpha - \beta, \alpha + \beta[, |\phi'(x)| < 1.$$

En posant  $\delta = \beta/2$  (par ex.), on obtient, en définissant  $\mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ ,

$$\forall x \in \mathcal{V}, |\Phi'(x)| < 1.$$

□

b. On pose

$$L = \sup_{x \in \mathcal{V}} |\phi'(x)| = \max_{x \in \mathcal{V}} |\phi'(x)|.$$

Comme  $\mathcal{V}$  est fermé,  $L < 1$ . Soient  $(x, y) \in \mathcal{V}^2$ . D'après le théorème des accroissements finis, il existe  $\xi \in ]x, y[ \subset \mathcal{V}$  telle que

$$\phi(x) - \phi(y) = \phi'(\xi)(x - y).$$

Puisque  $|\phi'(\xi)| \leq L$ , on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathcal{V}^2, |\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|,$$

ce qui signifie  $\phi$  est contractante sur  $\mathcal{V}$ . De plus, si  $x \in \mathcal{V}$ , en utilisant la formule précédente avec  $y = \alpha \in \mathcal{V}$ , on obtient

$$|\phi(x) - \alpha| \leq L|x - \alpha| < |x - \alpha| \leq \delta,$$

et donc  $\phi(x) \in \mathcal{V}$ . Ainsi on a  $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$ .

c. Voici le théorème du cours:

**Théorème** (Théorème du point fixe dans  $\mathbb{R}$ , application contractante). *Soient  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle fermé, non vide, et  $\Phi$  une application contractante de  $I$  dans lui-même. Alors, il existe un unique point  $\alpha \in I$  vérifiant  $\Phi(\alpha) = \alpha$ . Le point  $\alpha$  est appelé **point fixe de la fonction  $\Phi$** . Pour tout  $x_0 \in I$ , la suite*

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{6.3}$$

*est bien définie et elle converge vers  $\alpha$  avec un ordre 1 au moins.*

**R. 2** Avec  $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{\alpha\}$ , d'après Q. 1, la suite définie par  $x_{k+1} = \phi(x_k)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  converge vers  $\alpha$  à l'ordre 1 au moins.

Comme  $\alpha$  est un point fixe de  $\phi$ , i.e.  $\alpha = \phi(\alpha)$  et  $x_{k+1} = \phi(x_k)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , avec  $x_0 \neq \alpha$ , on a  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k \neq \alpha$ . On a donc

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \frac{\phi(x_k) - \phi(\alpha)}{x_k - \alpha}.$$

Comme la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$  avec  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k \neq \alpha$  et que  $\phi$  est dérivable en  $\alpha$  on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\phi(x_k) - \phi(\alpha)}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha).$$

**R. 3** a. Comme  $\phi'(\alpha) = 0$ , alors (en particulier)  $|\phi'(\alpha)| < 1$ . D'après la question 1, cela signifie que pour tout  $x_0 \in \mathcal{V}$ , la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par l'algorithme du point fixe (6.3) converge vers  $\alpha$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$ . En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, il existe  $\xi_k \in ]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[$  tel que

$$x_{k+1} - \alpha = \phi(x_k) - \phi(\alpha) = \sum_{i=1}^p \frac{(x_k - \alpha)^i}{i!} \underbrace{\phi^{(i)}(\alpha)}_{=0} + \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\xi_k)$$

c'est à dire

$$x_{k+1} - \alpha = \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\xi_k). \quad (6.4)$$

De plus,  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ ,  $\phi^{(p+1)}$  est continue sur  $\mathcal{V}$ , un fermé borné et donc

$$\exists C > 0, \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{V}, |\phi^{(p+1)}(x)| \leq C.$$

Comme  $\xi_k \in \mathcal{V}$ , on déduit de (6.4) que

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \frac{C}{(p+1)!} |x_k - \alpha|^{p+1}$$

et donc la convergence est d'ordre  $(p+1)$  au moins.

b. La fonction  $\phi^{(p+1)}$  étant continue et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \xi_k = \alpha$ , on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi^{(p+1)}(\xi_k) = \phi^{(p+1)}(\alpha).$$

Comme  $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{\alpha\}$ , on a  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k \neq \alpha$  et donc (6.4) peut s'écrire

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\xi_k)}{(p+1)!} \quad (6.5)$$

En prenant la limite, on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{1}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\alpha).$$

c. Soit  $\varepsilon > 0$ . En multipliant (6.5) par  $(x_k - \alpha)^{-\varepsilon} > 0$ , on obtient

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1+\varepsilon}} = (x_k - \alpha)^{-\varepsilon} \frac{\phi^{(p+1)}(\xi_k)}{(p+1)!}$$

Or  $(x - \alpha)^{-\varepsilon} \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} +\infty$ , et  $\phi^{(p+1)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$ , ce qui entraîne

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1+\varepsilon}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (x_k - \alpha)^{-\varepsilon} \frac{\phi^{(p+1)}(\xi_k)}{(p+1)!} = +\infty.$$

Donc,  $\forall \varepsilon > 0$ , la convergence n'est pas d'ordre  $p+1+\varepsilon$ . Elle est d'ordre  $(p+1)$  (exactement).

◇

## EXERCICE 7

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$  vérifiant  $f(a)f(b) < 0$ . et  $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ . Soit  $x_0 \in [a, b]$  donné. La suite obtenue par la méthode de la corde est donnée par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note  $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}$ .

**Q. 1** Montrer que si pour tout  $x \in [a, b]$  on a

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leq f(x) \leq \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (7.1)$$

alors  $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$ . □

**Q. 2** Montrer que si pour tout  $x \in [a, b]$  on a

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (7.2)$$

alors  $|\Phi'(x)| < 1$ . □

**Q. 3** En déduire que sous les deux conditions précédentes la méthode de la corde converge vers l'unique solution  $\alpha \in [a, b]$  de  $f(x) = 0$ . □



### Correction

**R. 1** Si  $\lambda > 0$ , l'inéquation (7.1) devient

$$\begin{aligned} \lambda(x - b) \leq f(x) \leq \lambda(x - a) &\Leftrightarrow a \leq x - \frac{f(x)}{\lambda} \leq b \\ &\Leftrightarrow a \leq \Phi(x) \leq b. \end{aligned}$$

Si  $\lambda < 0$ , l'inéquation (7.1) devient

$$\begin{aligned} \lambda(x - a) \leq f(x) \leq \lambda(x - b) &\Leftrightarrow a \leq x - \frac{f(x)}{\lambda} \leq b \\ &\Leftrightarrow a \leq \Phi(x) \leq b. \end{aligned}$$

**R. 2** Si  $\lambda > 0$ , l'inéquation (7.2) devient

$$\begin{aligned} 0 < f'(x) < 2\lambda &\Leftrightarrow 0 < \frac{f'(x)}{\lambda} < 2 \\ &\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{f'(x)}{\lambda} < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < \Phi'(x) < 1. \end{aligned}$$

Si  $\lambda < 0$ , l'inéquation (7.2) devient

$$\begin{aligned} 2\lambda < f'(x) < 0 &\Leftrightarrow 0 < \frac{f'(x)}{\lambda} < 2 \\ &\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{f'(x)}{\lambda} < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < \Phi'(x) < 1. \end{aligned}$$

**R. 3** Sous les hypothèses (7.1) et (7.2) on a  $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$  et  $\forall x \in [a, b], |\Phi'(x)| < 1$ . Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ , la fonction  $\Phi$  l'est aussi. La suite  $(x_k)$  est définie par  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ . Ainsi les hypothèses du théorème ?? sont vérifiées ce qui assure l'unicité du point fixe ainsi que la convergence de la suite  $(x_k)$  vers ce point fixe. ◇

## EXERCICE 8

En -1700 av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur  $\sqrt{2}$ , ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est  $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e - 7$ .



**Q. 1** Comment feriez-vous pour trouver **à la main** une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant  $\sqrt{2}$ . □

**Q. 2** Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de  $\sqrt{a}$  où  $a$  est un réel positif. □

**Q. 3** Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de  $\sqrt[n]{a}$  où  $a$  est un réel positif et  $n \in \mathbb{N}^*$ . □

### Correction

**R. 1** Il suffit de voir que  $\sqrt{2}$  est la racine positive de  $f(x) = x^2 - 2$  et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = \frac{x_k^2 + 2}{2x_k}$$

Avec  $x_0 = 1$ , on obtient

| $k$ | $x_k$             | $ \sqrt{2} - x_k $ |
|-----|-------------------|--------------------|
| 1   | $\frac{3}{2}$     | 8.57864e-02        |
| 2   | $\frac{17}{12}$   | 2.45310e-03        |
| 3   | $\frac{577}{408}$ | 2.12390e-06        |

Avec  $x_0 = \frac{5}{4}$ , on obtient

| $k$ | $x_k$                       | $ \sqrt{2} - x_k $ |
|-----|-----------------------------|--------------------|
| 1   | $\frac{57}{40}$             | 1.07864e-02        |
| 2   | $\frac{6449}{4560}$         | 4.08236e-05        |
| 3   | $\frac{83176801}{58814880}$ | 5.89203e-10        |

**R. 2** Il suffit de voir que  $\sqrt{a}$  est la racine positive de  $f(x) = x^2 - a$  et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k}$$

Avec  $a = 3$  et  $x_0 = 1$ , on obtient

| $k$ | $x_k$           | $ \sqrt{3} - x_k $ |
|-----|-----------------|--------------------|
| 1   | 2               | 2.67949e-01        |
| 2   | $\frac{7}{4}$   | 1.79492e-02        |
| 3   | $\frac{97}{56}$ | 9.20496e-05        |

**R. 3** Il suffit de voir que  $\sqrt[n]{a}$  est la racine positive de  $f(x) = x^n - a$  et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^n - a}{nx_k^{n-1}} = \frac{(n-1)x_k^n - a}{nx_k^{n-1}}$$

Avec  $a = 3$ ,  $n = 4$  et  $x_0 = 1$ , on obtient

| $k$ | $x_k$                                                                         | $ \sqrt[4]{3} - x_k $ |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 1   | $\frac{3}{2}$                                                                 | 1.83926e-01           |
| 2   | $\frac{97}{72}$                                                               | 3.11482e-02           |
| 3   | $\frac{115403137}{87616608}$                                                  | 1.06368e-03           |
| 4   | $\frac{236297297271008837816738085152257}{179546943199700984864483416264832}$ | 1.28780e-06           |

◇

## 2 Dans $\mathbb{R}^n$

### EXERCICE 9

Soit  $\mathcal{B}$  un espace de Banach et  $U \subset \mathcal{B}$  un sous-ensemble fermé. On suppose que  $\Phi : U \rightarrow U$  est une application contractante. Soit  $\mathbf{x}^{[0]} \in U$ . On note  $(\mathbf{x}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ , la suite récurrente donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{x}^{[k+1]} = \Phi(\mathbf{x}^{[k]}). \quad (9.1)$$

**Q. 1** Montrer que la suite (9.1) est bien définie ( $x_k$  existe pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ). □

On va démontrer que la suite (9.1) est une suite de Cauchy.

**Q. 2** a. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq L^k \|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|. \quad (9.2)$$

b. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall l \geq 0, \quad \|x_{k+l} - x_{k+l-1}\| \leq L^l \|\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k-1]}\|. \quad (9.3)$$

c. En déduire que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geq 2, \quad \|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} L^k \|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|. \quad (9.4)$$

□

**Q. 3** a. Déduire de la question précédente que la suite (9.1) est une suite de Cauchy.

b. Montrer que la suite (9.1) converge vers un point fixe de  $\Phi$  à l'ordre 1 au moins.

c. Montrer l'unicité du point fixe. □

### Correction

**R. 1** La suite  $(\mathbf{x}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ , est bien définie si la relation (9.1) permet de définir complètement (et de manière unique) l'ensemble des termes de la suite  $(\mathbf{x}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ , connaissant  $\mathbf{x}^{[0]}$ .

Il faut donc vérifier que,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{x}^{[k]} \in U$ , car il faut pouvoir calculer  $\Phi(\mathbf{x}^{[k]})$  et que  $\Phi$  est définie sur  $U$ . C'est bien sur immédiat par récurrence car  $\Phi(U) \subset U$ . On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation: pour  $k = 0$ . Par hypothèse,  $\mathbf{x}^{[0]} \in U$ .
- Hérédité: on suppose  $\mathbf{x}^{[k]} \in U$ , montrons que  $\mathbf{x}^{[k+1]} \in U$ . Par définition,  $\mathbf{x}^{[k+1]} = \Phi(\mathbf{x}^{[k]})$ . Puisque par hypothèse,  $\Phi(U) \subset U$ , on a  $\mathbf{x}^{[k+1]} \in U$ .

**R. 2** a. La fonction  $\Phi$  étant contractante sur  $U$ , on a, par définition:

$$\exists L \in [0, 1[ \text{ t.q. } \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U^2, \quad \|\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

On obtient alors

$$\|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\| = \|\Phi(\mathbf{x}^{[k]}) - \Phi(\mathbf{x}^{[k-1]})\| \leq L \|\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k-1]}\|.$$

Par récurrence, on en déduit que la proposition suivante est vraie pour tout  $k \in \mathbb{N}$ :

$$(\mathcal{P}_k) : \quad \|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq L^k \|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|.$$

On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation:  $(\mathcal{P}_0)$  est trivialement vraie.
- Hérédité: soit  $k \in \mathbb{N}$ , on suppose que  $(\mathcal{P}_k)$  est vérifiée. Montrons que  $(\mathcal{P}_{k+1})$  est vraie. On a, en utilisant (9.1) et l'hypothèse de contraction sur  $\Phi$ ,

$$\|\mathbf{x}^{[k+2]} - \mathbf{x}^{[k+1]}\| = \|\Phi(\mathbf{x}^{[k+1]}) - \Phi(\mathbf{x}^{[k]})\| \leq L \|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\|.$$

Par hypothèse de récurrence, on en déduit

$$\|\mathbf{x}^{[k+2]} - \mathbf{x}^{[k+1]}\| \leq LL^k \|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|$$

et donc  $(\mathcal{P}_{k+1})$  est vraie.

b. Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $p \geq 2$ . On a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| &= \|(\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k+p-1]}) + (\mathbf{x}^{[k+p-1]} - \mathbf{x}^{[k+p-2]}) + \dots + (\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]})\| \\ &= \left\| \sum_{l=0}^{p-1} (\mathbf{x}^{[k+l+1]} - \mathbf{x}^{[k+l]}) \right\|. \end{aligned}$$

Par application répétée de l'inégalité triangulaire pour la norme  $\|\bullet\|$ , on obtient

$$\|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq \sum_{l=0}^{p-1} \|\mathbf{x}^{[k+l+1]} - \mathbf{x}^{[k+l]}\|$$

En utilisant (9.3), on obtient alors

$$\|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq \sum_{l=0}^{p-1} L^l \|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\| = \|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \sum_{l=0}^{p-1} L^l.$$

La somme correspond alors à une somme partielle d'une série géométrique et donc

$$\|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} \|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\|.$$

En utilisant (9.2), on obtient alors (9.4).

**R. 3** a. On a  $0 \leq L < 1$ , et donc  $L^k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . De (9.4), on déduit alors que  $(\mathbf{x}^{[k]})$  est une suite de Cauchy.

On propose toutefois une démonstration détaillée.

Pour que  $(\mathbf{x}^{[k]})$  soit une suite de Cauchy, il faut montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N}, k \geq M, \forall p \in \mathbb{N}, \quad \|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| < \epsilon.$$

Comme  $0 < L < 1$ , on a

$$\|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq \frac{1}{1 - L} L^k \|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|$$

Soit  $\epsilon > 0$ , pour avoir  $\|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| < \epsilon$ , il est suffisant d'avoir

$$\frac{1}{1-L} L^k \|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\| < \epsilon$$

c'est à dire, comme  $1 - L > 0$ ,

$$L^k < \frac{(1-L)\epsilon}{\|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|}.$$

La fonction  $\ln$  étant croissante strictement on obtient

$$\ln(L^k) = k \ln(L) < \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{\|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|}\right).$$

Or  $\ln(L) < 0$ , ce qui donne

$$k > \frac{1}{\ln(L)} \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{\|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|}\right).$$

En prenant  $M \in \mathbb{N}$  tel que

$$M > \frac{1}{\ln(L)} \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{\|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|}\right)$$

alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq M, \forall p \in \mathbb{N}, \quad \|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| < \epsilon.$$

- b. La suite  $(\mathbf{x}^{[k]})$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{B}$  un espace de Banach (espace normé complet) donc elle converge dans  $\mathcal{B}$  vers un point que l'on nomme  $\beta$ . De plus pour tout  $k$ ,  $\mathbf{x}^{[k]}$  appartient à  $U$  fermé, donc sa limite  $\beta$  appartient aussi à  $U$ .

La fonction  $\Phi$  étant contractante sur  $U$ , elle est donc continue sur  $U$ . On a alors par continuité de  $\Phi$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(\mathbf{x}^{[k]}) = \Phi(\beta).$$

Comme  $\mathbf{x}^{[k+1]} = \Phi(\mathbf{x}^{[k]})$  on aussi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(\mathbf{x}^{[k]}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}^{[k+1]} = \beta$$

et donc  $\beta$  est un point fixe de  $\Phi$ . L'existence d'un point fixe est donc établi.

On a donc

$$\|\mathbf{x}^{[k+1]} - \beta\| = \|\Phi(\mathbf{x}^{[k]}) - \Phi(\beta)\| \leq L \|\mathbf{x}^{[k]} - \beta\|.$$

Comme  $0 \leq L < 1$ , la convergence est au moins d'ordre 1.

- c. On suppose qu'il existe  $\beta_1$  et  $\beta_2$  dans  $[a, b]$  tels que  $\Phi(\beta_1) = \beta_1$  et  $\Phi(\beta_2) = \beta_2$ . Dans ce cas on a

$$\|\beta_1 - \beta_2\| = \|\Phi(\beta_1) - \Phi(\beta_2)\| \leq L \|\beta_1 - \beta_2\|.$$

On en déduit

$$(1-L) \|\beta_1 - \beta_2\| \leq 0$$

Comme  $1 - L > 0$ , on en déduit  $\beta_1 = \beta_2$ , c'est à dire l'unicité du point fixe.

◇