

Exercices associés au cours d'Analyse Numérique I

Résolution de systèmes non linéaires

EXERCICE 1

Q. 1 Montrer que les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues. □

Soient I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$

Q. 2 On suppose que f' est bornée, i.e.

$$\exists L \in \mathbb{R}_+, \text{ tel que } \forall x \in I, \quad |f'(x)| \leq L.$$

Montrer que f est lipschitzienne de rapport L . □

Q. 3 Soit $L \in \mathbb{R}_+$. On suppose f lipschitzienne de rapport L .

Montrer que f' est bornée. □

Correction

R. 1 Par hypothèse, on a

$$\exists K \in \mathbb{R}_+, \text{ tel que, } \forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Si $K = 0$, la fonction f est alors constante et donc uniformément continue.

On suppose maintenant que $K > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour avoir $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, il suffit d'avoir $K|x - y| < \varepsilon$.

En posant $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, on a $\delta > 0$ et $\forall (x, y) \in I^2$,

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq K|x - y| < K\delta < \varepsilon.$$

et donc f est uniformément continue sur I .

R. 2 Soit $(x, y) \in I^2$, $x \neq y$. D'après la formule de Taylor-Lagrange (ou théorème des accroissements finis), il existe $\xi \in]x, y[$ tel que

$$f(x) - f(y) = (x - y)f'(\xi)$$

et donc

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

La fonction f est donc L -lipschitzienne.

R. 3 Soient $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + h \in I$. D'après la formule de Taylor-Lagrange (ou théorème des accroissements finis), il existe $\xi_h \in]\min(x, x + h), \max(x, x + h)[$ tel que

$$f(x + h) - f(x) = hf'(\xi_h)$$

De plus, f étant L -lipschitzienne, on a

$$|f(x + h) - f(x)| \leq L|h|.$$

Comme $h \neq 0$, on en déduit

$$|f'(\xi_h)| \leq L.$$

On a $\xi_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} x$, et comme f' continue,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f'(\xi_h) = f'(\lim_{h \rightarrow 0} \xi_h) = f'(x).$$

En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient alors

$$|f'(x)| \leq L.$$

◇

1 Recherche des zéros d'une fonction

EXERCICE 2 : Méthode de Dichotomie

On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, vérifie $f(a)f(b) < 0$ et qu'il existe un unique $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$. On définit les trois suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k & \text{si } f(a_k)f(x_k) < 0. \end{cases}$$

et

$$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2.$$

Q. 1 a. Montrer que les suites (a_k) et (b_k) convergent vers α .

b. En déduire que la suite (x_k) converge vers α .

□

Q. 2 a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$.

b. Soit $\epsilon > 0$. En déduire que si $k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$ alors $|x_k - \alpha| \leq \epsilon$.

□

Q. 3 [Algo] Ecrire une fonction algorithmique, nommée **Dichotomie**, retournant une approximation de α avec une précision de ϵ ainsi que le nombre d'itérations nécessaire.

□



Correction

R. 1 a. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(x_k) = 0$, (i.e. $x_k = \alpha$ car $x_k \in [a, b]$) alors par construction $a_{k+i} = b_{k+i} = x_{k+i} = \alpha$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Ceci assure la convergence des 3 suites vers α .

Supposons maintenant que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f(x_k) \neq 0$. Par construction, nous avons $a_k \leq a_{k+1} \leq b$, $a \leq b_{k+1} \leq b_k$ et $a_k \leq b_k$. La suite (a_k) est convergente car elle est croissante et majorée. La suite (b_k) est décroissante et minorée : elle est donc convergente. De plus $0 \leq b_k - a_k \leq \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}$ et donc $0 \leq b_k - a_k \leq \frac{b-a}{2^k}$. On en déduit que les suites (a_k) et (b_k) ont même limite. Comme par construction, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [a_k, b_k]$ ceci entraîne que α est la limite de ces 2 suites.

- b. Par construction, $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k \leq x_k \leq b_k$. D'après le théorème des gendarmes, les suites (a_k) et (b_k) convergeant vers α , on obtient la convergence de la suite (x_k) vers α .

R. 2 a. On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ et $a_k \leq \alpha \leq b_k$ d'où $|x_k - \alpha| \leq \frac{b_k - a_k}{2}$. Ce qui donne

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{b - a}{2^{k+1}}.$$

- b. Pour avoir $|x_k - \alpha| \leq \epsilon$, il suffit d'avoir $\frac{b-a}{2^{k+1}} \leq \epsilon$, et la fonction $\log$ étant croissante on obtient

$$k \geq \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1.$$

R. 3 Voici un exemple d'une telle fonction (existence mais non unicité de racines)

Algorithme 1 Méthode de dichotomie pour la recherche d'une racine α de f

Données : a, b : deux réels $a < b$,
 f : $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $f(a)f(b) < 0$
 eps : un réel strictement positif.

Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leq \text{eps}$.
 iter : nombre d'itérations nécessaire.

```

1: Fonction  $[x, \text{iter}] \leftarrow \text{Dichotomie}(f, a, b, \text{eps})$ 
2:    $A, B \in \mathbb{R}$ 
3:    $A \leftarrow a, B \leftarrow b, x \leftarrow (a + b)/2$ 
4:    $\text{iter} \leftarrow 0$ 
5:   Tantque  $|x - A| > \text{eps}$  faire
6:     Si  $f(x) == 0$  alors
7:        $A \leftarrow x, B \leftarrow x$ 
8:     Sinon Si  $f(B)f(x) < 0$  alors
9:        $A \leftarrow x$   $\triangleright B$  inchangé
10:    Sinon
11:       $B \leftarrow x$   $\triangleright A$  inchangé
12:    Fin Si
13:     $x \leftarrow (A + B)/2$ 
14:     $\text{iter} \leftarrow \text{iter} + 1$ 
15:  Fin Tantque
16: Fin Fonction

```

◇

EXERCICE 3

Soient $I = [0, \pi/2]$ et $\begin{cases} \Phi & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{cases}$. Soit $x_0 \in I \setminus \{0\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$x_{k+1} = \Phi(x_k).$$

Q. 1 a. Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

b. Montrer que la suite converge vers $\alpha \in I$ que l'on déterminera.

□

Q. 2 a. Montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = 1.$$

b. La convergence est-elle linéaire? Justifier.

□

Correction

R. 1 a. Pour cela, il suffit de démontrer par récurrence sur k que $x_k \in I$.

- Initialisation: $x_0 \in I$, par hypothèse.
- Hérédité: Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $x_k \in I$, et on peut donc calculer $f(x_k)$ et définir $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.
Or, sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sin(x) \leq x$, (étudier $g(x) = x - \sin(x)$...). Comme $x_k \in I$ et que $\sin(x) \geq 0, \forall x \in I$, on obtient

$$0 \leq x_{k+1} = \sin(x_k) \leq x_k$$

et donc $x_{k+1} \in I$.

b. On a vu que la suite était décroissante ($x_{k+1} \leq x_k$) et minorée par 0: elle est donc convergente. Notons $\alpha \in \mathbb{R}$ sa limite.

On a, $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \in I$, un fermé borné de $\mathbb{R}$, donc $\alpha \in I$.

Comme Φ est continue sur I , on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \Phi\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k\right) = f(\alpha)$$

De plus, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} = \alpha$$

et donc $\alpha \in I$ est un point fixe de Φ .

En posant $g(x) = x - \Phi(x)$, on a $g(0) = 0$ et, $\forall x \in I \setminus \{0\}$, $g'(x) = 1 - \cos(x) > 0$ c'est à dire $g(x) > 0$: la seule racine de g dans I est donc 0 et c'est alors l'unique point fixe de Φ , i.e. $\alpha = 0$.

R. 2 a. Comme $x_0 \in I \setminus \{0\}$, ar une simple récurrence, on peut montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < x_k < 1.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $\Phi \in \mathcal{C}^1$, on a, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange,

$$\xi_k \in]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[, \quad \Phi(x_k) = \Phi(\alpha) + (x_k - \alpha)\Phi'(\xi_k).$$

On obtient donc

$$\Phi(x_k) - \Phi(\alpha) = x_{k+1} - \alpha = (x_k - \alpha)\Phi'(\xi_k)$$

Comme $x_k - \alpha \neq 0$, on en déduit

$$\frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \Phi'(\xi_k).$$

Or x_k converge vers α et $\xi_k \in]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[$ entraîne $\xi_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \alpha$.

La fonction Φ' étant continue, un passage à limite donne

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi'(\xi_k) = \Phi'(\alpha) = \cos(0) = 1.$$

b. La convergence n'est pas linéaire car il aurait fallu démontrer l'existence de $\mu \in]0, 1[$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \mu.$$

La convergence est donc sous-linéaire.

EXERCICE 4

Soient $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et ϕ une fonction continue de $[a, b]$ dans lui-même ($\phi([a, b]) \subset [a, b]$). Soit $x_0 \in [a, b]$. On considère la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

Q. 1 Montrer que la suite (4.1) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$). □

Q. 2 Montrer que si la suite (4.1) converge, alors elle converge vers un point fixe de ϕ . □

Q. 3 Existence du point fixe : montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $\phi(\alpha) = \alpha$. □

On suppose de plus que ϕ est contractante, c'est à dire que

$$\exists L \in [0, 1[, \text{ tel que, } \forall (x, y) \in [a, b]^2, |\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|.$$

Q. 4 a. Montrer que ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$.

b. Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers α , pour toute donnée initiale x_0 dans $[a, b]$. □

Q. 5 [Algo] Écrire l'algorithme du point fixe (fonction **PointFixe**) permettant de résoudre l'équation $\phi(x) = x$. □



Correction

R. 1 La suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, est bien définie si la relation (4.1) permet de définir complètement (et de manière unique) l'ensemble des termes de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, connaissant x_0 .

Dans le cas présent, il faut s'assurer que $x_k \in [a, b]$ pour tout entier k car la fonction ϕ n'est par hypothèse définie que sur $[a, b]$. En effet, si x_k n'appartient pas à l'intervalle $[a, b]$, alors on ne peut pas définir x_{k+1} puisque $\phi(x_k)$ n'existe pas.

Nous montrons ce résultat par récurrence :

- Initialisation pour $k = 0$. Par hypothèse, $x_0 \in [a, b]$.
- Hérédité: nous supposons que $x_k \in [a, b]$ et nous allons montrer que $x_{k+1} \in [a, b]$. Par définition, $x_{k+1} = \phi(x_k)$. Puisque par hypothèse, $\phi([a, b]) \subset [a, b]$, on en déduit immédiatement que $x_{k+1} \in [a, b]$.

Remarque. hypothèse importante : $\phi([a, b]) \subset [a, b]$.

R. 2 Supposons que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite notée $\bar{x}$. $\bar{x} \in [a, b]$ car $[a, b]$ est un intervalle fermé. Par ailleurs, en utilisant la continuité de ϕ , on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi(x_k) = \phi(\bar{x}).$$

Par les théorème de comparaison des limites et la relation (4.1), on a:

$$\bar{x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} \stackrel{(4.1)}{=} \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi(x_k) = \phi(\bar{x}).$$

Ainsi $\bar{x} = \phi(\bar{x})$ et donc $\bar{x}$ est un point fixe de ϕ .

Remarque. hypothèses importantes : $[a, b]$ est fermé et ϕ est continue sur $[a, b]$.

R. 3 On considère la fonction g définie par $g(x) = \phi(x) - x$. Comme $\phi([a, b]) \subset [a, b]$,

$$g(a) = \phi(a) - a \geq a - a \geq 0.$$

De manière similaire,

$$g(b) = \phi(b) - b \leq b - b \leq 0.$$

Puisque ϕ est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires (ou Bolzano) (sur $[a, b]$, ϕ prend toutes les valeurs entre $\phi(a)$ et $\phi(b)$) garantit l'existence d'un nombre $\alpha \in [a, b]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Or

$$0 = g(\alpha) = \phi(\alpha) - \alpha,$$

donc α est un point fixe de ϕ .

Remarque. L'hypothèse de continuité de ϕ est cruciale. Le résultat est faux si ϕ n'est pas continue. On peut par exemple considérer la fonction $\phi_0 : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ telle que $\phi_0(x) = \frac{1}{2}$ si $-1 \leq x \leq 0$, et $\phi_0(x) = -\frac{1}{2}$ si $0 < x \leq 1$, qui n'admet pas de point fixe sur $[-1, 1]$.

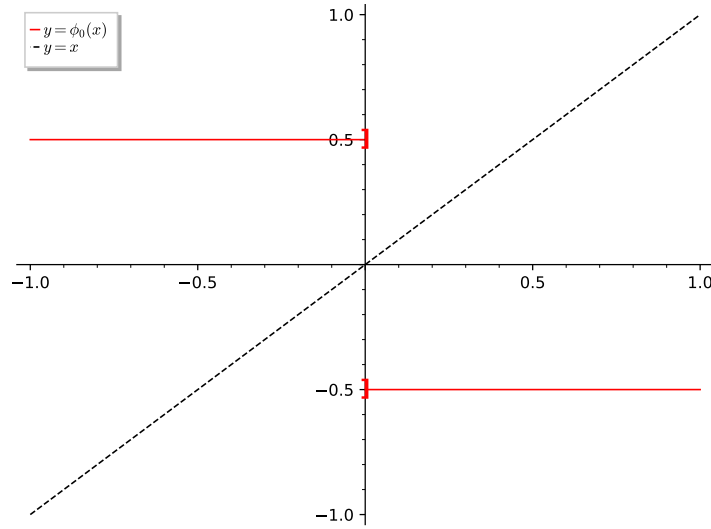


Figure 1: Graphe représentatif de la fonction ϕ_0 et de la droite $y = x$

On pourra aussi remarquer qu'il n'y a pas forcément unicité du point fixe. En effet, la fonction ϕ définie par $\phi(x) = x$, $\forall x \in [a, b]$ est continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ et admet une infinité de points fixes.

R. 4 a. Nous utilisons une démarche classique pour montrer l'unicité. Nous supposons que la fonction ϕ admet deux points fixes α_1 et α_2 ($\alpha_1 = \phi(\alpha_1)$ et $\alpha_2 = \phi(\alpha_2)$) et nous allons montrer que $\alpha_1 = \alpha_2$. En utilisant le fait que ϕ est contractante, on a

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |\phi(\alpha_1) - \phi(\alpha_2)| \leq L|\alpha_1 - \alpha_2|.$$

ce qui peut être réécrit comme

$$(1 - L)|\alpha_1 - \alpha_2| \leq 0. \quad (4.2)$$

Comme $(1 - L) > 0$, l'inégalité (4.2) implique $|\alpha_1 - \alpha_2| \leq 0$ et donc $\alpha_1 = \alpha_2$. La fonction ϕ a donc au plus un point fixe.

b. On a montré, dans les questions précédentes, que la fonction ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|x_{k+1} - \alpha| = |\phi(x_k) - \phi(\alpha)| \leq L|x_k - \alpha|,$$

si bien que, par récurrence, on peut montrer que

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Comme $L < 1$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} L^k = 0$ et donc le terme de droite de l'inégalité précédente tend vers 0. Par le théorème de comparaison des limites,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |x_k - \alpha| = 0.$$

R. 5 On écrit ci-dessous l'algorithme du point fixe, en supposant que l'on recherche un point fixe non nul.

Algorithme 2 Fonction **PointFixe** : résout $\phi(x) = x$ par la méthode du point fixe

Données : ϕ : fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
 x_0 : nombre réel, (donnée initiale)
 tol : nombre réel strictement positif (tolérance)
 $k_{\max}$: nombre entier supérieur ou égal à 1 (nombre maximal d'itérations)

Résultat : x : un réel tel que $\frac{|\phi(x)-x|}{|x|+1} \leq tol$

```

1: Fonction  $x \leftarrow \text{PointFixe}(\phi, x_0, tol, k_{\max})$ 
2:    $k \leftarrow 1$ 
3:    $x \leftarrow \phi(x_0)$ 
4:    $r \leftarrow \frac{|x-x_0|}{|x|+1}$  ▷ résidu à l'itération 1
5:   Tantque  $r > tol$  et  $k \leq k_{\max}$  faire
6:      $x_0 \leftarrow x$ 
7:      $x \leftarrow \phi(x_0)$ 
8:      $r \leftarrow \frac{|x-x_0|}{|x|+1}$  ▷ résidu à l'itération k+1
9:      $k \leftarrow k + 1$ 
10:  Fin Tantque
11: Fin Fonction

```

◇

EXERCICE 5

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, (par ex., avec $a < b$, $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $] - \infty, a]$ ou $\mathbb{R}$) et $\Phi : I \rightarrow I$ une application contractante.
 Soit $x_0 \in I$. On considère la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \Phi(x_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.1)$$

Q. 1 Montrer que la suite (5.1) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$). □

On va démontrer que la suite (5.1) est une suite de Cauchy.

Q. 2 a. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|. \quad (5.2)$$

b. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall l \geq 0, \quad |x_{k+l} - x_{k+l-1}| \leq L^l |x_k - x_{k-1}|. \quad (5.3)$$

c. En déduire que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geq 2, \quad |x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1-L^p}{1-L} L^k |x_1 - x_0|. \quad (5.4)$$

□

- Q. 3** a. Dédurre de la question précédente que la suite (5.1) est une suite de Cauchy.
b. Montrer que la suite (5.1) converge vers un point fixe de Φ à l'ordre 1 au moins.
c. Montrer l'unicité du point fixe.

□

Correction

R. 1 La suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, est bien définie si la relation (5.1) permet de définir complètement (et de manière unique) l'ensemble des termes de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, connaissant x_0 .

Il faut donc vérifier que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \in I$, car il faut pouvoir calculer $\Phi(x_k)$ et que Φ est définie sur I .

C'est bien sur immédiat par récurrence car $\Phi(I) \subset I$. On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation: pour $k = 0$. Par hypothèse, $x_0 \in I$.
- Hérédité: on suppose $x_k \in I$, montrons que $x_{k+1} \in I$. Par définition, $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. Puisque par hypothèse, $\Phi(I) \subset I$, on a $x_{k+1} \in I$.

R. 2 a. La fonction Φ étant contractante sur I , on a, par définition:

$$\exists L \in [0, 1[\text{ t.q. } \forall (x, y) \in I^2, \quad |\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y|.$$

On obtient alors

$$|x_{k+1} - x_k| = |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| \leq L|x_k - x_{k-1}|.$$

Par récurrence, on en déduit que la proposition suivante est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(\mathcal{P}_k) : \quad |x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|.$$

On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation: $(\mathcal{P}_0)$ est trivialement vraie.
- Hérédité: soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $(\mathcal{P}_k)$ est vérifiée. Montrons que $(\mathcal{P}_{k+1})$ est vraie. On a, en utilisant (5.1) et l'hypothèse de contraction sur Φ ,

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| = |\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)| \leq L|x_{k+1} - x_k|.$$

Par hypothèse de récurrence, on en déduit

$$|x_{k+2} - x_{k+1}| \leq LL^k |x_1 - x_0|$$

et donc $(\mathcal{P}_{k+1})$ est vraie.

b. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$. On a

$$|x_{k+p} - x_k| = |(x_{k+p} - x_{k+p-1}) + (x_{k+p-1} - x_{k+p-2}) + \dots + (x_{k+1} - x_k)| = \left| \sum_{l=0}^{p-1} (x_{k+l+1} - x_{k+l}) \right|.$$

Par application répétée de l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \sum_{l=0}^{p-1} |x_{k+l+1} - x_{k+l}|$$

En utilisant (5.3), on obtient alors

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \sum_{l=0}^{p-1} L^l |x_{k+1} - x_k| = |x_{k+1} - x_k| \sum_{l=0}^{p-1} L^l.$$

La somme correspond alors à une somme partielle d'une série géométrique et donc

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} |x_{k+1} - x_k|.$$

En utilisant (5.2), on obtient alors (5.4).

R. 3 a. On a $0 \leq L < 1$, et donc $L^k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$. De (5.4), on déduit alors que (x_k) est une suite de Cauchy.

On propose toutefois une démonstration détaillée.

Pour que (x_k) soit une suite de Cauchy, il faut montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N}, k \geq M, \forall p \in \mathbb{N}, |x_{k+p} - x_k| < \epsilon.$$

Comme $0 < L < 1$, on a

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1}{1-L} L^k |x_1 - x_0|$$

Soit $\epsilon > 0$, pour avoir $|x_{k+p} - x_k| < \epsilon$, il est suffisant d'avoir

$$\frac{1}{1-L} L^k |x_1 - x_0| < \epsilon$$

c'est à dire, comme $1 - L > 0$,

$$L^k < \frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}.$$

La fonction $\ln$ étant croissante strictement on obtient

$$\ln(L^k) = k \ln(L) < \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right).$$

Or $\ln(L) < 0$, ce qui donne

$$k > \frac{1}{\ln(L)} \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right).$$

En prenant $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$M > \frac{1}{\ln(L)} \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\right)$$

alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq M, \forall p \in \mathbb{N}, |x_{k+p} - x_k| < \epsilon.$$

b. La suite (x_k) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ espace complet donc elle converge dans $\mathbb{R}$ vers un point que l'on nomme β . De plus pour tout k , x_k appartient à I fermé, donc sa limite β appartient aussi à I .

La fonction Φ étant contractante sur I , elle est donc continue sur I . On a alors par continuité de Φ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \Phi(\beta).$$

Comme $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ on aussi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} = \beta$$

et donc β est un point fixe de Φ . L'existence d'un point fixe est donc établi.

On a donc

$$|x_{k+1} - \beta| = |\Phi(x_k) - \Phi(\beta)| \leq L|x_k - \beta|.$$

Comme $0 \leq L < 1$, la convergence est au moins d'ordre 1.

c. On suppose qu'il existe β_1 et β_2 dans $[a, b]$ tels que $\Phi(\beta_1) = \beta_1$ et $\Phi(\beta_2) = \beta_2$. Dans ce cas on a

$$|\beta_1 - \beta_2| = |\Phi(\beta_1) - \Phi(\beta_2)| \leq L|\beta_1 - \beta_2|.$$

On en déduit

$$(1-L)|\beta_1 - \beta_2| \leq 0$$

Comme $1 - L > 0$, on en déduit $\beta_1 = \beta_2$, c'est à dire l'unicité du point fixe.

◇

EXERCICE 6

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $I =]\alpha_-, \alpha_+[$ un voisinage de α et $\phi \in \mathcal{C}^1(I)$. On suppose que α est un point fixe de ϕ tel que

$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

- Q. 1** a. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, $|\phi'(x)| < 1$.
 b. Montrer que ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$ et que $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.
 c. Citer précisément le théorème du cours qui, à partir de Q. 1-a. et b., permet d'en déduire la convergence de l'algorithme du point fixe vers α au moins à l'ordre 1.

□

Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ et la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe.

- Q. 2** Montrer que, si $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{\alpha\}$, alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha). \quad (6.1)$$

□

- Q. 3** Supposons maintenant que $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ et que

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \phi^{(i)}(\alpha) = 0.$$

- a. Montrer que la méthode du point fixe est d'ordre $p + 1$ au moins.
 b. Montrer que, si $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{\alpha\}$, alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \quad (6.2)$$

- c. Que peut-on dire si $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$?

□

Correction

- R. 1** a. Puisque ϕ' est continue et que $|\phi'(\alpha)| < 1$, il existe $\delta > 0$ et un intervalle fermé $\mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset]\alpha_-, \alpha_+[$ tels que pour tout $x \in \mathcal{V}$, $|\phi'(x)| < 1$.
 On propose ici une démonstration de ce résultat.

□ Comme ϕ' est continue en α , on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, \left(|x - \alpha| < \beta \Rightarrow |\phi'(x) - \phi'(\alpha)| < \varepsilon \right).$$

On note $M = \phi'(\alpha)$ et on prend $\varepsilon = 1 - |M|$ qui est strictement positif car $0 \geq |M| = |\phi'(\alpha)| < 1$. Dans ce cas, il existe $\beta > 0$ tel que $]\alpha - \beta, \alpha + \beta[\subset I$ et

$$\forall x \in I, \left(|x - \alpha| < \beta \Rightarrow |\phi'(x) - M| < 1 - |M| \right).$$

Soit $x \in I$ tel que $|x - \alpha| < \beta$, c'est à dire $x \in]\alpha - \beta, \alpha + \beta[$, alors on a

$$\begin{aligned} |\phi'(x) - M| < 1 - |M| &\Leftrightarrow -1 + |M| < \phi'(x) - M < 1 - |M| \\ &\Leftrightarrow -1 + M + |M| < \phi'(x) < 1 + M - |M| \end{aligned}$$

Comme $-|M| \leq M \leq |M|$, on a $M + |M| \geq 0$ et $M - |M| \leq 0$, ce qui entraine

$$|\phi'(x) - M| < 1 - |M| \Rightarrow -1 < \phi'(x) < 1.$$

On a donc,

$$\forall x \in]\alpha - \beta, \alpha + \beta[, |\phi'(x)| < 1.$$

En posant $\delta = \beta/2$ (par ex.), on obtient, en définissant $\mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$,

$$\forall x \in \mathcal{V}, |\Phi'(x)| < 1.$$

□

b. On pose

$$L = \sup_{x \in \mathcal{V}} |\phi'(x)| = \max_{x \in \mathcal{V}} |\phi'(x)|.$$

Comme $\mathcal{V}$ est fermé, $L < 1$. Soient $(x, y) \in \mathcal{V}^2$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]x, y[\subset \mathcal{V}$ telle que

$$\phi(x) - \phi(y) = \phi'(\xi)(x - y).$$

Puisque $|\phi'(\xi)| \leq L$, on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathcal{V}^2, |\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|,$$

ce qui signifie ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$. De plus, si $x \in \mathcal{V}$, en utilisant la formule précédente avec $y = \alpha \in \mathcal{V}$, on obtient

$$|\phi(x) - \alpha| \leq L|x - \alpha| < |x - \alpha| \leq \delta,$$

et donc $\phi(x) \in \mathcal{V}$. Ainsi on a $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.

c. Voici le théorème du cours:

Théorème (Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$, application contractante). *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, et Φ une application contractante de I dans lui-même. Alors, il existe un unique point $\alpha \in I$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction Φ** . Pour tout $x_0 \in I$, la suite*

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{6.3}$$

est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.

R. 2 Avec $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{\alpha\}$, d'après Q. 1, la suite définie par $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ converge vers α à l'ordre 1 au moins.

Comme α est un point fixe de ϕ , i.e. $\alpha = \phi(\alpha)$ et $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, avec $x_0 \neq \alpha$, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq \alpha$. On a donc

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \frac{\phi(x_k) - \phi(\alpha)}{x_k - \alpha}.$$

Comme la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers α avec $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq \alpha$ et que ϕ est dérivable en α on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\phi(x_k) - \phi(\alpha)}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha).$$

R. 3 a. Comme $\phi'(\alpha) = 0$, alors (en particulier) $|\phi'(\alpha)| < 1$. D'après la question 1, cela signifie que pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe (6.3) converge vers α . Soit $k \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, il existe $\xi_k \in]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[$ tel que

$$x_{k+1} - \alpha = \phi(x_k) - \phi(\alpha) = \sum_{i=1}^p \frac{(x_k - \alpha)^i}{i!} \underbrace{\phi^{(i)}(\alpha)}_{=0} + \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\xi_k)$$

c'est à dire

$$x_{k+1} - \alpha = \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\xi_k). \quad (6.4)$$

De plus, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, $\phi^{(p+1)}$ est continue sur $\mathcal{V}$, un fermé borné et donc

$$\exists C > 0, \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{V}, |\phi^{(p+1)}(x)| \leq C.$$

Comme $\xi_k \in \mathcal{V}$, on déduit de (6.4) que

$$|x_{k+1} - \alpha| \leq \frac{C}{(p+1)!} |x_k - \alpha|^{p+1}$$

et donc la convergence est d'ordre $(p+1)$ au moins.

b. La fonction $\phi^{(p+1)}$ étant continue et $\lim_{k \rightarrow +\infty} \xi_k = \alpha$, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi^{(p+1)}(\xi_k) = \phi^{(p+1)}(\alpha).$$

Comme $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{\alpha\}$, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq \alpha$ et donc (6.4) peut s'écrire

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\xi_k)}{(p+1)!} \quad (6.5)$$

En prenant la limite, on obtient

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{1}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\alpha).$$

c. Soit $\varepsilon > 0$. En multipliant (6.5) par $(x_k - \alpha)^{-\varepsilon} > 0$, on obtient

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1+\varepsilon}} = (x_k - \alpha)^{-\varepsilon} \frac{\phi^{(p+1)}(\xi_k)}{(p+1)!}$$

Or $(x - \alpha)^{-\varepsilon} \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} +\infty$, et $\phi^{(p+1)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \alpha} \phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, ce qui entraîne

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1+\varepsilon}} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (x_k - \alpha)^{-\varepsilon} \frac{\phi^{(p+1)}(\xi_k)}{(p+1)!} = +\infty.$$

Donc, $\forall \varepsilon > 0$, la convergence n'est pas d'ordre $p+1+\varepsilon$. Elle est d'ordre $(p+1)$ (exactement).

◇

EXERCICE 7

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ vérifiant $f(a)f(b) < 0$. et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Soit $x_0 \in [a, b]$ donné. La suite obtenue par la méthode de la corde est donnée par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}$.

Q. 1 Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leq f(x) \leq \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (7.1)$$

alors $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$. □

Q. 2 Montrer que si pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (7.2)$$

alors $|\Phi'(x)| < 1$. □

Q. 3 En déduire que sous les deux conditions précédentes la méthode de la corde converge vers l'unique solution $\alpha \in [a, b]$ de $f(x) = 0$. □



Correction

R. 1 Si $\lambda > 0$, l'inéquation (7.1) devient

$$\begin{aligned} \lambda(x - b) \leq f(x) \leq \lambda(x - a) &\Leftrightarrow a \leq x - \frac{f(x)}{\lambda} \leq b \\ &\Leftrightarrow a \leq \Phi(x) \leq b. \end{aligned}$$

Si $\lambda < 0$, l'inéquation (7.1) devient

$$\begin{aligned} \lambda(x - a) \leq f(x) \leq \lambda(x - b) &\Leftrightarrow a \leq x - \frac{f(x)}{\lambda} \leq b \\ &\Leftrightarrow a \leq \Phi(x) \leq b. \end{aligned}$$

R. 2 Si $\lambda > 0$, l'inéquation (7.2) devient

$$\begin{aligned} 0 < f'(x) < 2\lambda &\Leftrightarrow 0 < \frac{f'(x)}{\lambda} < 2 \\ &\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{f'(x)}{\lambda} < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < \Phi'(x) < 1. \end{aligned}$$

Si $\lambda < 0$, l'inéquation (7.2) devient

$$\begin{aligned} 2\lambda < f'(x) < 0 &\Leftrightarrow 0 < \frac{f'(x)}{\lambda} < 2 \\ &\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{f'(x)}{\lambda} < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < \Phi'(x) < 1. \end{aligned}$$

R. 3 Sous les hypothèses (7.1) et (7.2) on a $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$ et $\forall x \in [a, b], |\Phi'(x)| < 1$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, la fonction Φ l'est aussi. La suite (x_k) est définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. Ainsi les hypothèses du théorème ?? sont vérifiées ce qui assure l'unicité du point fixe ainsi que la convergence de la suite (x_k) vers ce point fixe. ◇

EXERCICE 8

En -1700 av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur $\sqrt{2}$, ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e - 7$.



Q. 1 Comment feriez-vous pour trouver **à la main** une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant $\sqrt{2}$. □

Q. 2 Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt{a}$ où a est un réel positif. □

Q. 3 Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt[n]{a}$ où a est un réel positif et $n \in \mathbb{N}^*$. □

Correction

R. 1 Il suffit de voir que $\sqrt{2}$ est la racine positive de $f(x) = x^2 - 2$ et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = \frac{x_k^2 + 2}{2x_k}$$

Avec $x_0 = 1$, on obtient

k	x_k	$ \sqrt{2} - x_k $
1	$\frac{3}{2}$	8.57864e-02
2	$\frac{17}{12}$	2.45310e-03
3	$\frac{577}{408}$	2.12390e-06

Avec $x_0 = \frac{5}{4}$, on obtient

k	x_k	$ \sqrt{2} - x_k $
1	$\frac{57}{40}$	1.07864e-02
2	$\frac{6449}{4560}$	4.08236e-05
3	$\frac{83176801}{58814880}$	5.89203e-10

R. 2 Il suffit de voir que $\sqrt{a}$ est la racine positive de $f(x) = x^2 - a$ et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k}$$

Avec $a = 3$ et $x_0 = 1$, on obtient

k	x_k	$ \sqrt{3} - x_k $
1	2	2.67949e-01
2	$\frac{7}{4}$	1.79492e-02
3	$\frac{97}{56}$	9.20496e-05

R. 3 Il suffit de voir que $\sqrt[n]{a}$ est la racine positive de $f(x) = x^n - a$ et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^n - a}{nx_k^{n-1}} = \frac{(n-1)x_k^n - a}{nx_k^{n-1}}$$

Avec $a = 3$, $n = 4$ et $x_0 = 1$, on obtient

k	x_k	$ \sqrt[4]{3} - x_k $
1	$\frac{3}{2}$	1.83926e-01
2	$\frac{97}{72}$	3.11482e-02
3	$\frac{115403137}{87616608}$	1.06368e-03
4	$\frac{236297297271008837816738085152257}{179546943199700984864483416264832}$	1.28780e-06

◇

2 Dans $\mathbb{R}^n$

EXERCICE 9

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $U \subset \mathcal{B}$ un sous-ensemble fermé. On suppose que $\Phi : U \longrightarrow U$ est une application contractante. Soit $\mathbf{x}^{[0]} \in U$. On note $(\mathbf{x}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$, la suite récurrente donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{x}^{[k+1]} = \Phi(\mathbf{x}^{[k]}). \quad (9.1)$$

Q. 1 Montrer que la suite (9.1) est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$). □

On va démontrer que la suite (9.1) est une suite de Cauchy.

Q. 2 a. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq L^k \|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|. \quad (9.2)$$

b. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall l \geq 0, \quad \|x_{k+l} - x_{k+l-1}\| \leq L^l \|\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k-1]}\|. \quad (9.3)$$

c. En déduire que,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geq 2, \quad \|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} L^k \|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|. \quad (9.4)$$

□

Q. 3 a. Déduire de la question précédente que la suite (9.1) est une suite de Cauchy.

b. Montrer que la suite (9.1) converge vers un point fixe de Φ à l'ordre 1 au moins.

c. Montrer l'unicité du point fixe. □

Correction

R. 1 La suite $(\mathbf{x}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$, est bien définie si la relation (9.1) permet de définir complètement (et de manière unique) l'ensemble des termes de la suite $(\mathbf{x}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$, connaissant $\mathbf{x}^{[0]}$.

Il faut donc vérifier que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}^{[k]} \in U$, car il faut pouvoir calculer $\Phi(\mathbf{x}^{[k]})$ et que Φ est définie sur U . C'est bien sur immédiat par récurrence car $\Phi(U) \subset U$. On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation: pour $k = 0$. Par hypothèse, $\mathbf{x}^{[0]} \in U$.
- Hérédité: on suppose $\mathbf{x}^{[k]} \in U$, montrons que $\mathbf{x}^{[k+1]} \in U$. Par définition, $\mathbf{x}^{[k+1]} = \Phi(\mathbf{x}^{[k]})$. Puisque par hypothèse, $\Phi(U) \subset U$, on a $\mathbf{x}^{[k+1]} \in U$.

R. 2 a. La fonction Φ étant contractante sur U , on a, par définition:

$$\exists L \in [0, 1[\text{ t.q. } \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in U^2, \quad \|\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

On obtient alors

$$\|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\| = \|\Phi(\mathbf{x}^{[k]}) - \Phi(\mathbf{x}^{[k-1]})\| \leq L \|\mathbf{x}^{[k]} - \mathbf{x}^{[k-1]}\|.$$

Par récurrence, on en déduit que la proposition suivante est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(\mathcal{P}_k) : \quad \|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq L^k \|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|.$$

On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation: $(\mathcal{P}_0)$ est trivialement vraie.
- Hérédité: soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $(\mathcal{P}_k)$ est vérifiée. Montrons que $(\mathcal{P}_{k+1})$ est vraie. On a, en utilisant (9.1) et l'hypothèse de contraction sur Φ ,

$$\|\mathbf{x}^{[k+2]} - \mathbf{x}^{[k+1]}\| = \|\Phi(\mathbf{x}^{[k+1]}) - \Phi(\mathbf{x}^{[k]})\| \leq L \|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\|.$$

Par hypothèse de récurrence, on en déduit

$$\|\mathbf{x}^{[k+2]} - \mathbf{x}^{[k+1]}\| \leq LL^k \|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|$$

et donc $(\mathcal{P}_{k+1})$ est vraie.

b. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$. On a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| &= \|(\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k+p-1]}) + (\mathbf{x}^{[k+p-1]} - \mathbf{x}^{[k+p-2]}) + \dots + (\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]})\| \\ &= \left\| \sum_{l=0}^{p-1} (\mathbf{x}^{[k+l+1]} - \mathbf{x}^{[k+l]}) \right\|. \end{aligned}$$

Par application répétée de l'inégalité triangulaire pour la norme $\|\bullet\|$, on obtient

$$\|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq \sum_{l=0}^{p-1} \|\mathbf{x}^{[k+l+1]} - \mathbf{x}^{[k+l]}\|$$

En utilisant (9.3), on obtient alors

$$\|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq \sum_{l=0}^{p-1} L^l \|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\| = \|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \sum_{l=0}^{p-1} L^l.$$

La somme correspond alors à une somme partielle d'une série géométrique et donc

$$\|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq \frac{1 - L^p}{1 - L} \|\mathbf{x}^{[k+1]} - \mathbf{x}^{[k]}\|.$$

En utilisant (9.2), on obtient alors (9.4).

R. 3 a. On a $0 \leq L < 1$, et donc $L^k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$. De (9.4), on déduit alors que $(\mathbf{x}^{[k]})$ est une suite de Cauchy.

On propose toutefois une démonstration détaillée.

Pour que $(\mathbf{x}^{[k]})$ soit une suite de Cauchy, il faut montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N}, k \geq M, \forall p \in \mathbb{N}, \quad \|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| < \epsilon.$$

Comme $0 < L < 1$, on a

$$\|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| \leq \frac{1}{1 - L} L^k \|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|$$

Soit $\epsilon > 0$, pour avoir $\|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| < \epsilon$, il est suffisant d'avoir

$$\frac{1}{1-L} L^k \|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\| < \epsilon$$

c'est à dire, comme $1 - L > 0$,

$$L^k < \frac{(1-L)\epsilon}{\|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|}.$$

La fonction $\ln$ étant croissante strictement on obtient

$$\ln(L^k) = k \ln(L) < \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{\|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|}\right).$$

Or $\ln(L) < 0$, ce qui donne

$$k > \frac{1}{\ln(L)} \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{\|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|}\right).$$

En prenant $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$M > \frac{1}{\ln(L)} \ln\left(\frac{(1-L)\epsilon}{\|\mathbf{x}^{[1]} - \mathbf{x}^{[0]}\|}\right)$$

alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq M, \forall p \in \mathbb{N}, \|\mathbf{x}^{[k+p]} - \mathbf{x}^{[k]}\| < \epsilon.$$

- b. La suite $(\mathbf{x}^{[k]})$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}$ un espace de Banach (espace normé complet) donc elle converge dans $\mathcal{B}$ vers un point que l'on nomme β . De plus pour tout k , $\mathbf{x}^{[k]}$ appartient à U fermé, donc sa limite β appartient aussi à U .

La fonction Φ étant contractante sur U , elle est donc continue sur U . On a alors par continuité de Φ

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(\mathbf{x}^{[k]}) = \Phi(\beta).$$

Comme $\mathbf{x}^{[k+1]} = \Phi(\mathbf{x}^{[k]})$ on aussi

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi(\mathbf{x}^{[k]}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}^{[k+1]} = \beta$$

et donc β est un point fixe de Φ . L'existence d'un point fixe est donc établi.

On a donc

$$\|\mathbf{x}^{[k+1]} - \beta\| = \|\Phi(\mathbf{x}^{[k]}) - \Phi(\beta)\| \leq L \|\mathbf{x}^{[k]} - \beta\|.$$

Comme $0 \leq L < 1$, la convergence est au moins d'ordre 1.

- c. On suppose qu'il existe β_1 et β_2 dans $[a, b]$ tels que $\Phi(\beta_1) = \beta_1$ et $\Phi(\beta_2) = \beta_2$. Dans ce cas on a

$$\|\beta_1 - \beta_2\| = \|\Phi(\beta_1) - \Phi(\beta_2)\| \leq L \|\beta_1 - \beta_2\|.$$

On en déduit

$$(1-L) \|\beta_1 - \beta_2\| \leq 0$$

Comme $1 - L > 0$, on en déduit $\beta_1 = \beta_2$, c'est à dire l'unicité du point fixe.

◇