Exercices associés au cours d'*Analyse Numérique I*
Résolution de systèmes non linéaires

Exercice 1

Q. 1 *Montrer que les fonctions lipschitziennes sont uniformément continues.* ▫

R. 1 Par hypothèse, on a

$$\exists\, K \in \mathbb{R}_+, \text{tel que, } \forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|.$$

Si $K = 0$, la fonction f est alors constante et donc uniformément continue.
On suppose maintenant que $K > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour avoir $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, il suffit d'avoir $K|x-y| < \varepsilon$.
En posant $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$, on a $\delta > 0$ et $\forall (x,y) \in I^2$,

$$|x-y| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y| < K\delta < \varepsilon.$$

et donc f est uniformément continue sur I.

Soient I un intervalle et $f \in \mathcal{C}^1(I; R)$

Q. 2 *On suppose que f' est bornée, i.e.*

$$\exists L \in \mathbb{R}_+,\ \textit{tel que } \forall x \in I,\quad |f'(x)| \leqslant L.$$

Montrer que f est lipschitzienne de rapport L. ▫

R. 2 Soit $(x,y) \in I^2$, $x \neq y$. D'après la formule de Taylor-Lagrange (ou théorème des accroissement finis), il existe $\xi \in]x,y[$ tel que

$$f(x) - f(y) = (x-y)f'(\xi)$$

et donc

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|.$$

La fonction f est donc L-lipschitzienne.

Q. 3 *Soit $L \in \mathbb{R}_+$. On suppose f lipschitzienne de rapport L.*
Montrer que f' est bornée. ▫

R. 3 Soient $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in I$. D'après la formule de Taylor-Lagrange (ou théorème des accroissement finis), il existe $\xi_h \in]\min(x, x+h), \max(x, x+h)[$ tel que

$$f(x+h) - f(x) = hf'(\xi_h)$$

De plus, f étant L-**lipschitzienne**, on a

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant L|h|.$$

Comme $h \neq 0$, on en déduit

$$|f'(\xi_h)| \leqslant L.$$

On a $\xi_h \underset{h\to 0}{\to} x$, et comme f' continue,

$$\lim_{h\to 0} f'(\xi_h) = f'\big(\lim_{h\to 0} \xi_h\big) = f'(x).$$

En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient alors

$$|f'(x)| \leqslant L.$$

---

1 Recherche des zéros d'une fonction

Exercice 2 : Méthode de Dichotomie

On suppose que la fonction f est continue sur $[a, b]$, vérifie $f(a)f(b) < 0$ et qu'il existe un unique $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$. On défini les trois suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k,\ b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = x_k & \text{si } f(a_k)f(x_k) < 0. \end{cases}$$
  et
$$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2.$$

Q. 1 *a. Montrer que les suites (a_k) et (b_k) convergent vers α.*

b. En déduire que la suite (x_k) converge vers α.

□

R. 1 a. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(x_k) = 0$, (i.e. $x_k = \alpha$ car $x_k \in [a, b]$) alors par construction $a_{k+i} = b_{k+i} = x_{k+i} = \alpha$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Ceci assure la convergence des 3 suites vers α.

Supposons maintenant que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f(x_k) \neq 0$. Par construction, nous avons $a_k \leqslant a_{k+1} \leqslant b$, $a \leqslant b_{k+1} \leqslant b_k$ et $a_k \leqslant b_k$. La suite (a_k) est convergente car elle est croissante et majorée. La suite (b_k) est décroissante et minorée : elle est donc convergente. De plus $0 \leqslant b_k - a_k \leqslant \frac{b_{k-1}-a_{k-1}}{2}$ et donc $0 \leqslant b_k - a_k \leqslant \frac{b-a}{2^k}$. On en déduit que les suites (a_k) et (b_k) ont même limite. Comme par construction, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [a_k, b_k]$ ceci entraine que α est la limite de ces 2 suites.

b. Par construction, $\forall k \in \mathbb{N}$,, $a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$. D'après le théorème des gendarmes, les suites (a_k) et (b_k) convergeant vers α, on obtient la convergence de la suite (x_k) vers α.

Q. 2 *a. Montrer que pour tout* $k \in \mathbb{N}$, $|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}$.

b. Soit $\epsilon > 0$. *En déduire que si* $k \geqslant \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$ *alors* $|x_k - \alpha| \leqslant \epsilon$.

□

R. 2 a. On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ et $a_k \leqslant \alpha \leqslant b_k$ d'où $|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b_k - a_k}{2}$. Ce qui donne

$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}.$$

b. Pour avoir $|x_k - \alpha| \leqslant \epsilon$, il suffit d'avoir $\frac{b-a}{2^{k+1}} \leqslant \epsilon$, et la fonction log étant croissante on obtient

$$k \geqslant \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1.$$

Q. 3 [Algo] *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* Dichotomie, *retournant une approximation de* α *avec une précision de* ϵ *ainsi que le nombre d'itérations nécessaire.* □

R. 3 Voici un exemple d'une telle fonction (existence mais non unicité de racines)

Algorithme 1 Méthode de dichotomie pour la recherche d'une racine α de f

Données : a, b : deux réels $a < b$,
f : $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $f(a)f(b) < 0$
eps : un réel strictement positif.
Résultat : x : un réel tel que $|x - \alpha| \leqslant$ eps.
$iter$: nombre d'itérations nécesssaire.

```
Fonction [x, iter] ← Dichotomie( f, a, b, eps )
  A, B ∈ ℝ
  A ← a, B ← b, x ← (a + b)/2
  iter ← 0
  Tantque |x − A| > eps faire
    Si f(x) == 0 alors
      A ← x, B ← x
    Sinon Si f(B)f(x) < 0 alors
      A ← x                                   ▷ B inchangé
    Sinon
      B ← x                                   ▷ A inchangé
    Fin Si
    x ← (A + B)/2
    iter ← iter + 1
  Fin Tantque
Fin Fonction
```

Exercice 3

Soient $I = [0, \pi/2]$ et $\left\{ \begin{array}{cccc} \Phi & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right.$. Soit $x_0 \in I\backslash\{0\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$x_{k+1} = \Phi(x_k).$$

Q. 1 a. *Montrer que la suite* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est bien définie.*

b. *Montrer que la suite converge vers* $\alpha \in I$ *que l'on déterminera.*

□

R. 1 a. Pour cela, il suffit de démontrer par récurrence sur k que $x_k \in I$.

- Initialisation: $x_0 \in I$, par hypothèse.
- Hérédité: Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $x_k \in I$, et on peut donc calculer $f(x_k)$ et définir $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.
  Or, sur $\mathbb{R}_+$, on a $\sin(x) \leqslant x$, (étudier $g(x) = x - \sin(x)$ ...). Comme $x_k \in I$ et que $\sin(x) \geqslant 0, \forall x \in I$, on obtient
  $$0 \leqslant x_{k+1} = \sin(x_k) \leqslant x_k$$
  et donc $x_{k+1} \in I$.

b. On a vu que la suite était décroissante ($x_{k+1} \leqslant x_k$) et minorée par 0: elle est donc convergente. Notons $\alpha \in \mathbb{R}$ sa limite.
On a, $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \in I$, un fermé borné de $\mathbb{R}$, donc $\alpha \in I$.
Comme Φ est continue sur I, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \Phi(x_k) = \Phi\big(\lim_{k\to+\infty} x_k\big) = f(\alpha)$$

De plus, on a
$$\lim_{k\to+\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} = \alpha$$
et donc $\alpha \in I$ est un point fixe de Φ.

En posant $g(x) = x - \Phi(x)$, on a $g(0) = 0$ et, $\forall x \in I\backslash 0$, $g'(x) = 1 - \cos(x) > 0$ c'est à dire $g(x) > 0$: la seule racine de g dans I est donc 0 et c'est alors l'unique point fixe de Φ, i.e. $\alpha = 0$.

Q. 2 a. *Montrer que*
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = 1.$$

b. *La convergence est-elle linéaire? Justifier.*

□

R. 2 a. Comme $x_0 \in I\backslash\{0\}$, ar une simple récurrence, on peut montrer que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < x_k < 1.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $\Phi \in \mathcal{C}^1$, on a, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange,
$$\xi_k \in]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[, \quad \Phi(x_k) = \Phi(\alpha) + (x_k - \alpha)\Phi'(\xi_k).$$

On obtient donc
$$\Phi(x_k) - \Phi(\alpha) = x_{k+1} - \alpha = (x_k - \alpha)\Phi'(\xi_k)$$

Comme $x_k - \alpha \neq 0$, on en déduit
$$\frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \Phi'(\xi_k).$$
Or x_k converge vers α et $\xi_k \in]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[$ entraine $\xi_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.
La fonction Φ' étant continue, un passage à limite donne
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \lim_{k\to+\infty} \Phi'(\xi_k) = \Phi'(\alpha) = \cos(0) = 1.$$

b. La convergence n'est pas linéaire car il aurait fallu démontrer l'existence de $\mu \in]0, 1[$ telle que
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \mu.$$
La convergence est donc sous-linéaire.

Exercice 4

Soient $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et ϕ une fonction continue de $[a, b]$ dans lui même ($\phi([a, b]) \subset [a, b]$). Soit $x_0 \in [a, b]$. On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par
$$x_{k+1} = \phi(x_k)\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Q. 1 *Montrer que la suite* (4.1) *est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).* □

R. 1 La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, est bien définie si la relation (4.1) permet de définir complètement (et de manière unique) l'ensemble des termes de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, connaissant x_0.

Dans le cas présent, il faut s'assurer que $x_k \in [a, b]$ pour tout entier k car la fonction ϕ n'est par hypothèse définie que sur $[a, b]$. En effet, si x_k n'appartient pas à l'intervalle $[a, b]$, alors on ne peut pas définir x_{k+1} puisque $\phi(x_k)$ n'existe pas.

Nous montrons ce résultat pas récurrence :

- Initialisation pour $k = 0$. Par hypothèse, $x_0 \in [a, b]$.
- Hérédité: nous supposons que $x_k \in [a, b]$ et nous allons montrer que $x_{k+1} \in [a, b]$. Par définition, $x_{k+1} = \phi(x_k)$. Puisque par hypothèse, $\phi([a, b]) \subset [a, b]$, on en déduit immédiatement que $x_{k+1} \in [a, b]$.

Remarque. *hypothèse importante : $\phi([a, b]) \subset [a, b]$.*

Q. 2 *Montrer que si la suite* (4.1) *converge, alors elle converge vers un point fixe de ϕ.* □

R. 2 Supposons que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée $\bar{x}$. $\bar{x} \in [a, b]$ car $[a, b]$ est un intervalle fermé. Par ailleurs, en utilisant la continuité de ϕ, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \phi(x_k) = \phi(\bar{x}).$$

Par les théorème de comparaison des limites et la relation (4.1), on a:

$$\bar{x} = \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} \overbrace{=}^{(4.1)} \lim_{k\to+\infty} \phi(x_k) = \phi(\bar{x}).$$

Ainsi $\bar{x} = \phi(\bar{x})$ et donc $\bar{x}$ est un point fixe de ϕ.

Remarque. *hypothèses importantes : $[a, b]$ est fermé et ϕ est continue sur $[a, b]$.*

Q. 3 *Existence du point fixe : montrer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $\phi(\alpha) = \alpha$.* □

R. 3 On considère la fonction g définie par $g(x) = \phi(x) - x$. Comme $\phi([a, b]) \subset [a, b]$,

$$g(a) = \phi(a) - a \geqslant a - a \geqslant 0.$$

De manière similaire,

$$g(b) = \phi(b) - b \leqslant b - b \leqslant 0.$$

Puisque ϕ est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires (ou Bolzano) (sur $[a, b]$, ϕ prend toutes les valeurs entre $\phi(a)$et $\phi(b)$) garantit l'existence d'un nombre $\alpha \in [a, b]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Or

$$0 = g(\alpha) = \phi(\alpha) - \alpha,$$

donc α est un point fixe de ϕ.

Remarque. *L'hypothèse de continuité de ϕ est cruciale. Le résultat est faux si ϕ n'est pas continue. On peut par exemple considérer la fonction $\phi_0 : [-1, 1] \to [-1, 1]$ telle que $\phi_0(x) = \frac{1}{2}$ si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, et $\phi_0(x) = -\frac{1}{2}$ si $0 < x \leqslant 1$, qui n'admet pas de point fixe sur $[-1, 1]$.*

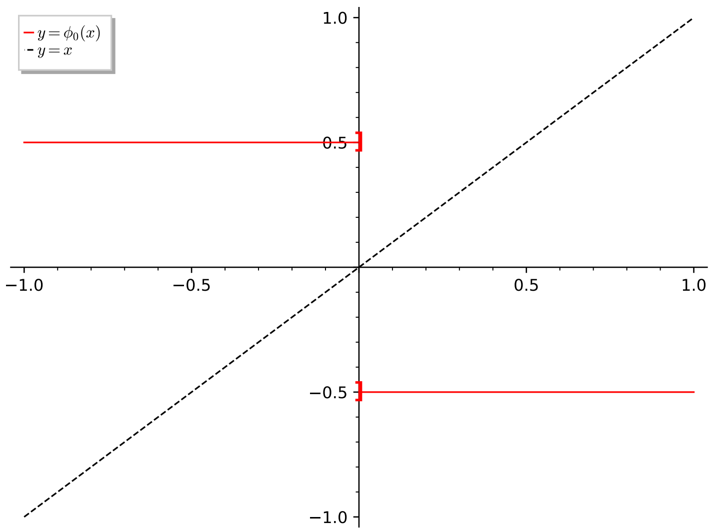

Figure 1: Graphe représentatif de la fonction ϕ_0 et de la droite $y = x$

On pourra aussi remarquer qu'il n'y a pas forcément unicité du point fixe. En effet, la fonction ϕ définie par $\phi(x) = x$, $\forall x \in [a, b]$ est continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ et admet une infinité de points fixes.

On suppose de plus que ϕ est contractante, c'est à dire que

$$\exists\, L \in [0,1[, \text{tel que}, \forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |\phi(x) - \phi(y)| \leqslant L|x-y|.$$

Q. 4 a. *Montrer que ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a,b]$.*

b. *Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers α, pour toute donnée initiale x_0 dans $[a,b]$.*

□

R. 4 a. Nous utilisons une démarche classique pour montrer l'unicité. Nous supposons que la fonction ϕ admet deux points fixes α_1 et α_2 ($\alpha_1 = \phi(\alpha_1)$ et $\alpha_2 = \phi(\alpha_2)$) et nous allons montrer que $\alpha_1 = \alpha_2$. En utilisant le fait que ϕ est contractante, on a

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |\phi(\alpha_1) - \phi(\alpha_2)| \leqslant L|\alpha_1 - \alpha_2|.$$

ce qui peut être réécrit comme

$$(1-L)|\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant 0. \tag{4.2}$$

Comme $(1-L) > 0$, l'inégalité (4.2) implique $|\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant 0$ et donc $\alpha_1 = \alpha_2$. La fonction ϕ a donc au plus un point fixe.

b. On a montré, dans les questions précédentes, que la fonction ϕ admet un unique point fixe $\alpha \in [a,b]$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|x_{k+1} - \alpha| = |\phi(x_k) - \phi(\alpha)| \leqslant L|x_k - \alpha|,$$

si bien que, par récurrence, on peut montrer que

$$|x_k - \alpha| \leqslant L^k |x_0 - \alpha|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Comme $L < 1$, $\lim\limits_{k\to+\infty} L^k = 0$ et donc le terme de droite de l'inégalité précédente tend vers 0. Par le théorème de comparaison des limites,

$$\lim_{k\to+\infty} |x_k - \alpha| = 0.$$

Q. 5 [Algo]*Écrire l'algorithme du point fixe (fonction* PointFixe*) permettant de résoudre l'équation $\phi(x) = x$.* □

R. 5 On écrit ci-dessous l'algorithme du point fixe, en supposant que l'on recherche un point fixe non nul.

Algorithme 2 Fonction PointFixe : résout $\phi(x) = x$ par la méthode du point fixe

Données : ϕ : fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
x_0 : nombre réel, (donnée initiale)
tol : nombre réel strictement positif (tolérance)
$k_{\max}$: nombre entier supérieur ou égal à 1 (nombre maximal d'itérations)

Résultat : x : un réel tel que $\frac{|\phi(x)-x|}{|x|+1} \leqslant tol$

Fonction $x \leftarrow$ PointFixe$(\phi, x_0, tol, k_{\max})$
  $k \leftarrow 1$
  $x \leftarrow \phi(x_0)$
  $r \leftarrow \frac{|x-x_0|}{|x|+1}$ ▷ résidu à l'itération 1
  Tantque $r > tol$ et $k \leqslant k_{\max}$ **faire**
    $x_0 \leftarrow x$
    $x \leftarrow \phi(x_0)$
    $r \leftarrow \frac{|x-x_0|}{|x|+1}$ ▷ résidu à l'itération k+1
    $k \leftarrow k + 1$
  Fin Tantque
Fin Fonction

Exercice 5

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, (par ex., avec $a < b$, $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,a]$ ou $\mathbb{R}$) et $\Phi : I \longrightarrow I$ une application contractante.
Soit $x_0 \in I$. On considère la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{5.1}$$

Q. 1 *Montrer que la suite* (5.1) *est bien définie* (x_k *existe pour tout* $k \in \mathbb{N}$). □

R. 1 La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, est bien définie si la relation (5.1) permet de définir complètement (et de manière unique) l'ensemble des termes de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, connaissant x_0.
Il faut donc vérifier que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \in I$, car il faut pouvoir calculer $\Phi(x_k)$ et que Φ est définie sur I.
C'est bien sur immédiat par récurrence car $\Phi(I) \subset I$. On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation: pour $k = 0$. Par hypothèse, $x_0 \in I$.
- Hérédité: on suppose $x_k \in I$, montrons que $x_{k+1} \in I$. Par définition, $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. Puisque par hypothèse, $\Phi(I) \subset I$, on a $x_{k+1} \in I$.

On va démontrer que la suite (5.1) est une suite de Cauchy.

Q. 2 *a. Montrer que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |x_{k+1} - x_k| \leqslant L^k |x_1 - x_0|. \tag{5.2}$$

b. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall l \geqslant 0, \quad |x_{k+l} - x_{k+l-1}| \leqslant L^l |x_k - x_{k-1}|. \tag{5.3}$$

c. *En déduire que,*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant 2,\quad |x_{k+p} - x_k| \leqslant \frac{1-L^p}{1-L} L^k |x_1 - x_0|. \tag{5.4}$$

□

R. 2 a. La fonction Φ étant contractante sur I, on a, par définition:

$$\exists L \in [0,1[\ \text{ t.q }\ \forall (x,y) \in I^2,\quad |\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant L|x-y|.$$

On obtient alors

$$|x_{k+1} - x_k| = |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})| \leqslant L|x_k - x_{k-1}|.$$

Par récurrence, on en déduit que la proposition suivante est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(\mathcal{P}_k):\quad |x_{k+1} - x_k| \leqslant L^k |x_1 - x_0|.$$

On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation: $(\mathcal{P}_0)$ est trivialement vraie.
- Hérédité: soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $(\mathcal{P}_k)$ est vérifiée. Montrons que $(\mathcal{P}_{k+1})$ est vraie. On a, en utilisant (5.1) et l'hypothèse de contraction sur Φ,

  $$|x_{k+2} - x_{k+1}| = |\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)| \leqslant L|x_{k+1} - x_k|.$$

  Par hypothèse de récurrence, on en déduit

  $$|x_{k+2} - x_{k+1}| \leqslant L L^k |x_1 - x_0|$$

  et donc $(\mathcal{P}_{k+1})$ est vraie.

b. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant 2$. On a

$$|x_{k+p} - x_k| = |(x_{k+p} - x_{k+p-1}) + (x_{k+p-1} - x_{k+p-2}) + \ldots + (x_{k+1} - x_k)| = |\sum_{l=0}^{p-1} (x_{k+l+1} - x_{k+l})|.$$

Par application répétée de l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|x_{k+p} - x_k| \leqslant \sum_{l=0}^{p-1} |x_{k+l+1} - x_{k+l}|$$

En utilisant (5.3), on obtient alors

$$|x_{k+p} - x_k| \leqslant \sum_{l=0}^{p-1} L^l |x_{k+1} - x_k| = |x_{k+1} - x_k| \sum_{l=0}^{p-1} L^l.$$

La somme correspond alors à une somme partielle d'une série géométrique et donc

$$|x_{k+p} - x_k| \leqslant \frac{1-L^p}{1-L} |x_{k+1} - x_k|.$$

En utilisant (5.2), on obtient alors (5.4).

Q. 3 a. *Déduire de la question précédente que la suite* (5.1) *est une suite de Cauchy.*

b. *Montrer que la suite* (5.1) *converge vers un point fixe de* Φ *à l'ordre* 1 *au moins.*

c. *Montrer l'unicité du point fixe.*

□

R. 3 a. On a $0 \leqslant L < 1$, et donc $L^k \to 0$ quand $k \to +\infty$. De (5.4), on déduit alors que (x_k) est une suite de Cauchy.
On propose toutefois une démonstration détaillée.
Pour que (x_k) soit une suite de Cauchy, il faut montrer que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \text{tel que } \forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant M,\ \forall p \in \mathbb{N},\quad |x_{k+p} - x_k| < \epsilon.$$

Comme $0 < L < 1$, on a

$$|x_{k+p} - x_k| \leqslant \frac{1}{1-L} L^k |x_1 - x_0|$$

Soit $\epsilon > 0$, pour avoir $|x_{k+p} - x_k| < \epsilon$, il est suffisant d'avoir

$$\frac{1}{1-L} L^k |x_1 - x_0| < \epsilon$$

c'est à dire, comme $1 - L > 0$,

$$L^k < \frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}.$$

La fonction ln étant croissante strictement on obtient

$$\ln(L^k) = k\ln(L) < \ln\Big(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\Big).$$

Or $\ln(L) < 0$, ce qui donne

$$k > \frac{1}{\ln(L)} \ln\Big(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\Big).$$

En prenant $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$M > \frac{1}{\ln(L)} \ln\Big(\frac{(1-L)\epsilon}{|x_1 - x_0|}\Big)$$

alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant M,\ \forall p \in \mathbb{N},\quad |x_{k+p} - x_k| < \epsilon.$$

b. La suite (x_k) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ espace complet donc elle converge dans $\mathbb{R}$ vers un point que l'on nomme β. De plus pour tout k, x_k appartient à I fermé, donc sa limite β appartient aussi à I.

La fonction Φ étant contractante sur I, elle est donc continue sur I. On a alors par continuité de Φ

$$\lim_{k\to+\infty} \Phi(x_k) = \Phi(\beta).$$

Comme $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ on aussi

$$\lim_{k\to+\infty} \Phi(x_k) = \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} = \beta$$

et donc β est un point fixe de Φ. L'existence d'un point fixe est donc établi.

On a donc

$$|x_{k+1} - \beta| = |\Phi(x_k) - \Phi(\beta)| \leqslant L|x_k) - \beta|.$$

Comme $0 \leqslant L < 1$, la convergence est au moins d'ordre 1.

c. On suppose qu'il existe β_1 et β_2 dans $[a, b]$ tels que $\Phi(\beta_1) = \beta_1$ et $\Phi(\beta_2) = \beta_2$. Dans ce cas on a

$$|\beta_1 - \beta_2| = |\Phi(\beta_1) - \Phi(\beta_2)| \leqslant L|\beta_1 - \beta_2|.$$

On en déduit

$$(1 - L)|\beta_1 - \beta_2| \leqslant 0$$

Comme $1 - L > 0$, on en déduit $\beta_1 = \beta_2$, c'est à dire l'unicité du point fixe.

Exercice 6

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $I =]\alpha_-, \alpha_+[$ un voisinage de α et $\phi \in \mathcal{C}^1(I)$. On suppose que α est un point fixe de ϕ tel que

$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

Q. 1 *a. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, $|\phi'(x)| < 1$.*

b. Montrer que ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$ et que $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.

c. Citer précisement le théorème du cours qui, à partir de Q. 1-*a. et b,permet d'en déduire la convergence de l'algorithme du point fixe vers α au moins à l'ordre 1.*

□

R. 1 a. Puisque ϕ' est continue et que $|\phi'(\alpha)| < 1$, il existe $\delta > 0$ et un intervalle fermé $\mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset]\alpha_-, \alpha_+[$ tels que pour tout $x \in \mathcal{V}$, $|\phi'(x)| < 1$.
On propose ici une démonstration de ce résultat.

□ Comme ϕ' est continue en α, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \beta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ \Big(|x - \alpha| < \beta \Rightarrow\ |\phi'(x) - \phi'(\alpha)| < \varepsilon\Big).$$

On note $M = \phi'(\alpha)$ et on prend $\varepsilon = 1 - |M|$ qui est strictement positif car $0 \geqslant |M| = |\phi'(\alpha)| < 1$. Dans ce cas, il existe $\beta > 0$ tel que $]\alpha - \beta, \alpha + \beta[\subset I$ et

$$\forall x \in I,\ \Big(|x - \alpha| < \beta \Rightarrow\ |\phi'(x) - M| < 1 - |M|\Big).$$

Soit $x \in I$ tel que $|x - \alpha| < \beta$, c'est à dire $x \in]\alpha - \beta, \alpha + \beta[$, alors on a

$$\begin{aligned} |\phi'(x) - M| < 1 - |M| &\Leftrightarrow\ -1 + |M| < \phi'(x) - M < 1 - |M| \\ &\Leftrightarrow\ -1 + M + |M| < \phi'(x) < 1 + M - |M| \end{aligned}$$

Comme $-|M| \leqslant M \leqslant |M|$, on a $M + |M| \geqslant 0$ et $M - |M| \leqslant 0$, ce qui entraine

$$|\phi'(x) - M| < 1 - |M| \Rightarrow\ -1 < \phi'(x) < 1.$$

On a donc,

$$\forall x \in]\alpha - \beta, \alpha + \beta[,\ |\phi'(x)| < 1.$$

En posant $\delta = \beta/2$ (par ex.), on obtient, en définissant $\mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$,

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad |\Phi'(x)| < 1.$$

□

b. On pose

$$L = \sup_{x \in \mathcal{V}} |\phi'(x)| = \max_{x \in \mathcal{V}} |\phi'(x)|.$$

Comme $\mathcal{V}$ est fermé, $L < 1$. Soient $(x, y) \in \mathcal{V}^2$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]x, y[\subset \mathcal{V}$ telle que

$$\phi(x) - \phi(y) = \phi'(\xi)(x - y).$$

Puisque $|\phi'(\xi)| \leqslant L$, on obtient

$$\forall (x,y) \in \mathcal{V}^2, |\phi(x) - \phi(y)| \leqslant L|x-y|,$$

ce qui signifie ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$. De plus, si $x \in \mathcal{V}$, en utilisant la formule précédente avec $y = \alpha \in \mathcal{V}$, on obtient

$$|\phi(x) - \alpha| \leqslant L|x-\alpha| < |x-\alpha| \leqslant \delta,$$

et donc $\phi(x) \in \mathcal{V}$. Ainsi on a $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.

c. Voici le théorème du cours:

Théorème (Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$, application contractante)**.** *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, et Φ une application contractante de I dans lui-même. Alors, il existe un unique point $\alpha \in I$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé* ***point fixe de la fonction*** *Φ. Pour tout $x_0 \in I$, la suite*

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{6.1}$$

est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.

Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe.

Q. 2 *Montrer que, si $x_0 \in \mathcal{V} \backslash \{\alpha\}$, alors*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = \phi'(\alpha). \tag{6.2}$$

□

R. 2 Avec $x_0 \in \mathcal{V} \backslash \{\alpha\}$, d'après Q. 1, la suite définie par $x_{k+1} = \phi(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N}$ converge vers α à l'ordre 1 au moins.
Comme α est un point fixe de ϕ, i.e. $\alpha = \phi(\alpha)$ et $x_{k+1} = \phi(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N}$, avec $x_0 \neq \alpha$, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq \alpha$. On a donc

$$\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = \frac{\phi(x_k)-\phi(\alpha)}{x_k-\alpha}.$$

Comme la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers α avec $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq \alpha$ et que ϕ est dérivable en α on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\phi(x_k)-\phi(\alpha)}{x_k-\alpha} = \phi'(\alpha).$$

Q. 3 *Supposons maintenant que $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ et que*

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \quad \phi^{(i)}(\alpha) = 0.$$

a. Montrer que la méthode du point fixe est d'ordre $p+1$ au moins.

b. Montrer que, si $x_0 \in \mathcal{V} \backslash \{\alpha\}$, alors

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \tag{6.3}$$

c. Que peut-on dire si $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$?

□

R. 3 a. Comme $\phi'(\alpha) = 0$, alors (en particulier) $|\phi'(\alpha)| < 1$. D'après la question 1, cela signifie que pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par l'agorithme du point fixe (6.1) converge vers α.
Soit $k \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, il existe $\xi_k \in]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[$ tel que

$$x_{k+1} - \alpha = \phi(x_k) - \phi(\alpha) = \sum_{i=1}^{p} \frac{(x_k - \alpha)^i}{i!} \underbrace{\phi^{(i)}(\alpha)}_{=0} + \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\xi_k)$$

c'est à dire

$$x_{k+1} - \alpha = \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\xi_k). \tag{6.4}$$

De plus, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, $\phi^{(p+1)}$ est continue sur $\mathcal{V}$, un fermé borné et donc

$$\exists C > 0, \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{V}, \ |\phi^{(p+1)}(x)| \leqslant C.$$

Comme $\xi_k \in \mathcal{V}$, on déduit de (6.4) que

$$|x_{k+1} - \alpha| \leqslant \frac{C}{(p+1)!} |x_k - \alpha|^{p+1}$$

et donc la convergence est d'ordre $(p+1)$ au moins.

b. La fonction $\phi^{(p+1)}$ étant continue et $\lim_{k\to+\infty} \xi_k = \alpha$, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \phi^{(p+1)}(\xi_k) = \phi^{(p+1)}(\alpha).$$

Comme $x_0 \in \mathcal{V}\backslash\{\alpha\}$, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq \alpha$ et donc (6.4) peut s'écrire

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\xi_k)}{(p+1)!} \tag{6.5}$$

En prenant la limite, on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{1}{(p+1)!} \phi^{(p+1)}(\alpha).$$

c. Soit $\varepsilon > 0$. En multipliant (6.5) par $(x_k - \alpha)^{-\varepsilon} > 0$, on obtient

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1+\varepsilon}} = (x_k - \alpha)^{-\varepsilon} \frac{\phi^{(p+1)}(\xi_k)}{(p+1)!}$$

Or $(x - \alpha)^{-\varepsilon} \underset{x\to\alpha}{\to} +\infty$, et $\phi^{(p+1)}(x) \underset{x\to\alpha}{\to} \phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, ce qui entraine

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1+\varepsilon}} = \lim_{k\to+\infty} (x_k - \alpha)^{-\varepsilon} \frac{\phi^{(p+1)}(\xi_k)}{(p+1)!} = +\infty.$$

Donc, $\forall \varepsilon > 0$, la convergence n'est pas d'ordre $p + 1 + \varepsilon$. Elle est d'ordre $(p+1)$ (exactement).

Exercice 7

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ vérifiant $f(a)f(b) < 0$. et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Soit $x_0 \in [a, b]$ donné. La suite obtenue par la méthode de la corde est donnée par

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

On note $\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}$.

Q. 1 *Montrer que si pour tout* $x \in [a, b]$ *on a*

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leqslant f(x) \leqslant \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \tag{7.1}$$

alors $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$. □

R. 1 Si $\lambda > 0$, l'inéquation (7.1) devient

$$\begin{aligned} \lambda(x-b) \leqslant f(x) \leqslant \lambda(x-a) &\Leftrightarrow a \leqslant x - \frac{f(x)}{\lambda} \leqslant b \\ &\Leftrightarrow a \leqslant \Phi(x) \leqslant b. \end{aligned}$$

Si $\lambda < 0$, l'inéquation (7.1) devient

$$\begin{aligned} \lambda(x-a) \leqslant f(x) \leqslant \lambda(x-b) &\Leftrightarrow a \leqslant x - \frac{f(x)}{\lambda} \leqslant b \\ &\Leftrightarrow a \leqslant \Phi(x) \leqslant b. \end{aligned}$$

Q. 2 *Montrer que si pour tout* $x \in [a, b]$ *on a*

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \tag{7.2}$$

alors $|\Phi'(x)| < 1$. □

R. 2 Si $\lambda > 0$, l'inéquation (7.2) devient

$$\begin{aligned} 0 < f'(x) < 2\lambda &\Leftrightarrow 0 < \frac{f'(x)}{\lambda} < 2 \\ &\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{f'(x)}{\lambda} < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < \Phi'(x) < 1. \end{aligned}$$

Si $\lambda < 0$, l'inéquation (7.2) devient

$$\begin{aligned} 2\lambda < f'(x) < 0 &\Leftrightarrow 0 < \frac{f'(x)}{\lambda} < 2 \\ &\Leftrightarrow -1 < 1 - \frac{f'(x)}{\lambda} < 1 \\ &\Leftrightarrow -1 < \Phi'(x) < 1. \end{aligned}$$

Q. 3 *En déduire que sous les deux conditions précédentes la méthode de la corde converge vers l'unique solution* $\alpha \in [a, b]$ *de* $f(x) = 0$. □

R. 3 Sous les hypothèses (7.1) et (7.2) on a $\Phi([a, b]) \subset [a, b]$ et $\forall x \in [a, b]$, $|\Phi'(x)| < 1$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, la fonction Φ l'est aussi. La suite (x_k) est définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. Ainsi les hypothèses du théorème **??** sont vérifiées ce qui assure l'unicité du point fixe ainsi que la convergence de la suite (x_k) vers ce point fixe.

Exercice 8

En -1700 av. J.-C., les babyloniens ne connaissaient que les nombres rationnels (fractions) et ils utilisaient le système sexagésimal (base 60). Pour approcher la valeur $\sqrt{2}$, ils utilisaient comme approximation (voir tablette YBC 7289)

$$\alpha = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600}$$

L'erreur commise est $|\alpha - \sqrt{2}| \approx 5.994e - 7$.

Q. 1 *Comment feriez-vous pour trouver* ***à la main*** *une méthode permettant de trouver des nombres rationnels approchant* $\sqrt{2}$. □

R. 1 Il suffit de voir que $\sqrt{2}$ est la racine positive de $f(x) = x^2 - 2$ et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = \frac{x_k^2 + 2}{2x_k}$$

Avec $x_0 = 1$, on obtient

k	x_k	$\lvert\sqrt{2} - x_k\rvert$
1	$\frac{3}{2}$	8.57864e-02
2	$\frac{17}{12}$	2.45310e-03
3	$\frac{577}{408}$	2.12390e-06

Avec $x_0 = \frac{5}{4}$, on obtient

k	x_k	$\lvert\sqrt{2} - x_k\rvert$
1	$\frac{57}{40}$	1.07864e-02
2	$\frac{6449}{4560}$	4.08236e-05
3	$\frac{83176801}{58814880}$	5.89203e-10

Q. 2 *Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de* $\sqrt{a}$ *où* a *est un réel positif.* □

R. 2 Il suffit de voir que $\sqrt{a}$ est la racine positive de $f(x) = x^2 - a$ et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{x_k^2 + a}{2x_k}$$

Avec $a = 3$ et $x_0 = 1$, on obtient

k	x_k	$\lvert\sqrt{3} - x_k\rvert$
1	2	2.67949e-01
2	$\frac{7}{4}$	1.79492e-02
3	$\frac{97}{56}$	9.20496e-05

Q. 3 *Généraliser la méthode pour trouver une approximation rationnelle de $\sqrt[n]{a}$ où a est un réel positif et $n \in \mathbb{N}^*$.* □

R. 3 Il suffit de voir que $\sqrt[n]{a}$ est la racine positive de $f(x) = x^n - a$ et d'appliquer la méthode de Newton par exemple. La suite des itérés de Newton s'écrit alors

$$x_{k+1} == x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^n - a}{n x_k^{n-1}} = \frac{(n-1)x_k^n - a}{n x_k^{n-1}}$$

Avec $a = 3$, $n = 4$ et $x_0 = 1$, on obtient

k	x_k	$\lvert\sqrt[4]{3} - x_k\rvert$
1	$\frac{3}{2}$	1.83926e-01
2	$\frac{97}{72}$	3.11482e-02
3	$\frac{115403137}{87616608}$	1.06368e-03
4	$\frac{236297297271008837816738085152257}{179546943199700984864483416264832}$	1.28780e-06

---

2 Dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 9

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $U \subset \mathcal{B}$ un sous-ensemble fermé. On suppose que $\boldsymbol{\Phi} : U \longrightarrow U$ est une application contractante. Soit $\boldsymbol{x}^{[0]} \in U$. On note $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$, la suite récurrente donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x}^{[k]}). \tag{9.1}$$

Q. 1 *Montrer que la suite* (9.1) *est bien définie (x_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$).* □

R. 1 La suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$, est bien définie si la relation (9.1) permet de définir complètement (et de manière unique) l'ensemble des termes de la suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$, connaissant $\boldsymbol{x}^{[0]}$.
Il faut donc vérifier que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{x}^{[k]} \in U$, car il faut pouvoir calculer $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]})$ et que $\boldsymbol{\Phi}$ est définie sur U. C'est bien sur immédiat par récurrence car $\boldsymbol{\Phi}(U) \subset U$. On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation: pour $k = 0$. Par hypothèse, $\boldsymbol{x}^{[0]} \in U$.
- Hérédité: on suppose $\boldsymbol{x}^{[k]} \in U$, montrons que $\boldsymbol{x}^{[k+1]} \in U$. Par définition, $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]})$. Puisque par hypothèse, $\boldsymbol{\Phi}(U) \subset U$, on a $\boldsymbol{x}^{[k+1]} \in U$.

On va démontrer que la suite (9.1) est une suite de Cauchy.

Q. 2 a. *Montrer que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left\|\boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| \leqslant L^k \left\|\boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]}\right\|. \tag{9.2}$$

b. *Montrer que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall l \geqslant 0, \quad \|x_{k+l} - x_{k+l-1}\| \leqslant L^l \left\|\boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k-1]}\right\|. \tag{9.3}$$

c. En déduire que,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant 2, \quad \left\| \boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\| \leqslant \frac{1-L^p}{1-L} L^k \left\| \boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]} \right\|. \tag{9.4}$$

□

R. 2 a. La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ étant contractante sur U, on a, par définition:

$$\exists L \in [0,1[\ \text{ t.q } \ \forall (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in U^2, \quad \|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y})\| \leqslant L \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

On obtient alors

$$\left\| \boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\| = \left\| \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k-1]}) \right\| \leqslant L \left\| \boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{x}^{[k-1]} \right\|.$$

Par récurrence, on en déduit que la proposition suivante est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(\mathcal{P}_k): \quad \left\| \boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\| \leqslant L^k \left\| \boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]} \right\|.$$

On propose toutefois une démonstration:

- Initialisation: $(\mathcal{P}_0)$ est trivialement vraie.
- Hérédité: soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $(\mathcal{P}_k)$ est vérifiée. Montrons que $(\mathcal{P}_{k+1})$ est vraie. On a, en utilisant (9.1) et l'hypothèse de contraction sur $\boldsymbol{\Phi}$,

  $$\left\| \boldsymbol{x}^{[k+2]} - \boldsymbol{x}^{[k+1]} \right\| = \left\| \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k+1]}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]}) \right\| \leqslant L \left\| \boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\|.$$

  Par hypothèse de récurrence, on en déduit

  $$\left\| \boldsymbol{x}^{[k+2]} - \boldsymbol{x}^{[k+1]} \right\| \leqslant L L^k \left\| \boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]} \right\|$$

  et donc $(\mathcal{P}_{k+1})$ est vraie.

b. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant 2$. On a

$$\begin{aligned} \left\| \boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\| &= \left\| (\boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k+p-1]}) + (\boldsymbol{x}^{[k+p-1]} - \boldsymbol{x}^{[k+p-2]}) + \ldots + (\boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{x}^{[k]}) \right\| \\ &= \left\| \sum_{l=0}^{p-1} (\boldsymbol{x}^{[k+l+1]} - \boldsymbol{x}^{[k+l]}) \right\|. \end{aligned}$$

Par application répétée de l'inégalité triangulaire pour la norme $\|\bullet\|$, on obtient

$$\left\| \boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\| \leqslant \sum_{l=0}^{p-1} \left\| \boldsymbol{x}^{[k+l+1]} - \boldsymbol{x}^{[k+l]} \right\|$$

En utilisant (9.3), on obtient alors

$$\left\| \boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\| \leqslant \sum_{l=0}^{p-1} L^l \left\| \boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\| = \left\| \boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\| \sum_{l=0}^{p-1} L^l.$$

La somme correspond alors à une somme partielle d'une série géométrique et donc

$$\left\| \boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\| \leqslant \frac{1-L^p}{1-L} \left\| \boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\|.$$

En utilisant (9.2), on obtient alors (9.4).

Q. 3 *a. Déduire de la question précédente que la suite* (9.1) *est une suite de Cauchy.*

b. Montrer que la suite (9.1) *converge vers un point fixe de* Φ *à l'ordre* 1 *au moins.*

c. Montrer l'unicité du point fixe.

□

R. 3 a. On a $0 \leqslant L < 1$, et donc $L^k \to 0$ quand $k \to +\infty$. De (9.4), on déduit alors que $(\boldsymbol{x}^{[k]})$ est une suite de Cauchy.
On propose toutefois une démonstration détaillée.
Pour que $(\boldsymbol{x}^{[k]})$ soit une suite de Cauchy, il faut montrer que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \text{tel que } \forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant M,\ \forall p \in \mathbb{N},\quad \left\| \boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\| < \epsilon.$$

Comme $0 < L < 1$, on a

$$\left\| \boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\| \leqslant \frac{1}{1-L} L^k \left\| \boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]} \right\|$$

Soit $\epsilon > 0$, pour avoir $\left\| \boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\| < \epsilon$, il est suffisant d'avoir

$$\frac{1}{1-L} L^k \left\| \boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]} \right\| < \epsilon$$

c'est à dire, comme $1 - L > 0$,

$$L^k < \frac{(1-L)\epsilon}{\left\| \boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]} \right\|}.$$

La fonction ln étant croissante strictement on obtient

$$\ln(L^k) = k \ln(L) < \ln\Big(\frac{(1-L)\epsilon}{\left\| \boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]} \right\|} \Big).$$

Or $\ln(L) < 0$, ce qui donne

$$k > \frac{1}{\ln(L)} \ln\Big(\frac{(1-L)\epsilon}{\left\| \boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]} \right\|} \Big).$$

En prenant $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$M > \frac{1}{\ln(L)} \ln\Big(\frac{(1-L)\epsilon}{\left\| \boldsymbol{x}^{[1]} - \boldsymbol{x}^{[0]} \right\|} \Big)$$

alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant M,\ \forall p \in \mathbb{N},\quad \left\| \boldsymbol{x}^{[k+p]} - \boldsymbol{x}^{[k]} \right\| < \epsilon.$$

b. La suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}$ un espace de Banach (espace normé complet) donc elle converge dans $\mathcal{B}$ vers un point que l'on nomme $\boldsymbol{\beta}$. De plus pour tout k, $\boldsymbol{x}^{[k]}$ appartient à U fermé, donc sa limite $\boldsymbol{\beta}$ appartient aussi à U.

La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ étant contractante sur U, elle est donc continue sur U. On a alors par continuité de $\boldsymbol{\Phi}$

$$\lim_{k \to +\infty} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]}) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\beta}).$$

Comme $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]})$ on aussi

$$\lim_{k \to +\infty} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]}) = \lim_{k \to +\infty} \boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\beta}$$

et donc $\boldsymbol{\beta}$ est un point fixe de $\boldsymbol{\Phi}$. L'existence d'un point fixe est donc établi.

On a donc

$$\left\| \boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{\beta} \right\| = \left\| \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\beta}) \right\| \leqslant L \left\| \boldsymbol{x}^{[k]}) - \boldsymbol{\beta} \right\|.$$

Comme $0 \leqslant L < 1$, la convergence est au moins d'ordre 1.

c. On suppose qu'il existe $\boldsymbol{\beta}_1$ et $\boldsymbol{\beta}_2$ dans $[a, b]$ tels que $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\beta}_1) = \boldsymbol{\beta}_1$ et $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\beta}_2) = \boldsymbol{\beta}_2$. Dans ce cas on a

$$\|\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2\| = \|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\beta}_1) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\beta}_2)\| \leqslant L \|\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2\|.$$

On en déduit

$$(1 - L) \|\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2\| \leqslant 0$$

Comme $1 - L > 0$, on en déduit $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$, c'est à dire l'unicité du point fixe.
