

Exercices associés au cours d'Analyse Numérique I Algorithmique

1 Basique

EXERCICE 1

Ecrire une fonction **polynome** permettant de calculer

$$y = \sum_{i=1}^n a_i x^i.$$

EXERCICE 2

Ecrire une fonction **PM** permettant de calculer

$$y = \prod_{k=0}^m c_k \sin(x^k)$$

EXERCICE 3

Ecrire les fonctions **PS** et **SP** permettant de calculer respectivement

$$y = \prod_{i=1}^m a_i \sum_{j=0}^n b_j \sin((2j\pi/n)x^i)$$

et

$$z = \sum_{k=0}^m c_k \prod_{j=1}^n d_j \sin((2j\pi/n)w^k)$$

EXERCICE 4

On veut calculer

$$I = \prod_{k=0}^n \left(\alpha_k \sum_{i=1}^p \cos\left(\frac{2\pi}{k+i}x\right) + \beta_k \sum_{i \neq k}^q \prod_{j \neq i}^q \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Q. 1 Quelles sont les données minimales avec hypothèses permettant de calculer I . □

Q. 2 Ecrire en langage algorithmique la fonction **calculI** permettant de calculer I . □

2 Graphisme

EXERCICE 5

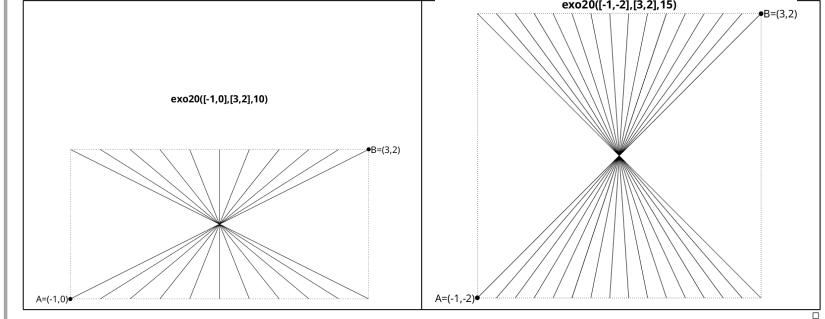
Q. 1 Ecrire une fonction **DisReg** permettant de d'obtenir une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ ($a < b$) en $n + 1$ points. □

Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points du plan tels que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$. Ces deux points permettent de définir le rectangle de sommets A , (x_B, y_A) , B et (x_A, y_B) . On suppose que pour tracer un trait entre les points A et B , on dispose de la commande `plot([x_A, x_B], [y_A, y_B])`.

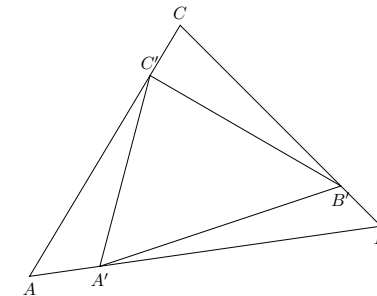
Q. 2 Ecrire une fonction **exo20** de paramètres A , B et n permettant de

- représenter les bords du rectangle,
- relier les points des bords supérieurs et inférieurs, dont les abscisses sont une discrétisation régulière en $n + 1$ points, et passant par le centre de symétrie du rectangle.

Deux exemples d'utilisation de cette fonction sont donnés ci-dessous :



EXERCICE 6



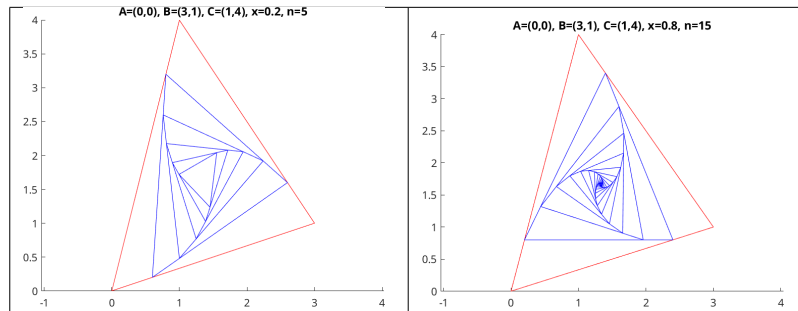
Soit T un triangle de sommets A , B et C . A partir de ce triangle on peut construire un nouveau triangle de sommets A' , B' et C' vérifiant

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} &= x \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{BB'} &= x \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{CC'} &= x \overrightarrow{CA} \end{aligned}$$

avec x un réel compris strictement entre 0 et 1.

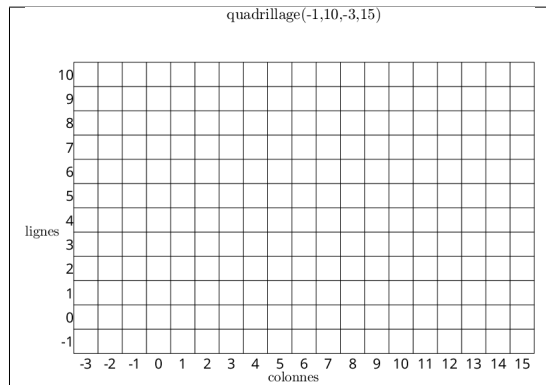
L'objectif est, pour un x fixé, d'itérer n fois ce processus de construction en partant à chaque itération du dernier triangle construit et de représenter l'ensemble des triangles.

Q. 1 Ecrire une fonction **Algorithmique triangles** permettant à partir des trois sommets A, B, C d'un triangle initial quelconque non réduit à une droite ou à un point, de représenter ce triangle ainsi que les n triangles obtenus par le processus de construction décrit ci-dessus avec un x donné dans $]0, 1[$. On dispose pour cela de la fonction `plot([ $x_A, x_B$ ], [ $y_A, y_B$ ])` permettant de tracer le segment $[A, B]$ du plan avec $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:



Prérequis pour les exercices 7 à 10

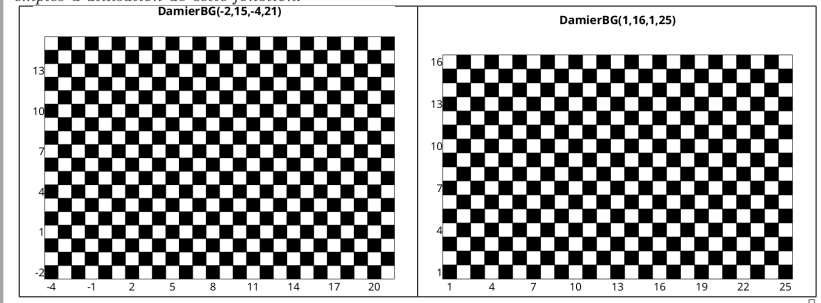
On dispose d'un quadrillage quelconque généré par la fonction `quadrillage(imin,imax,jmin,jmax)` dont voici un exemple d'utilisation



On dispose de plus d'une fonction `black(i,j)` qui dessine un pavé noir en ligne i et colonne j d'un quadrillage.

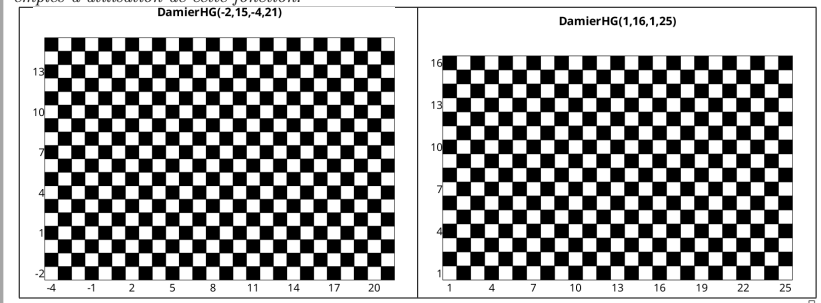
EXERCICE 7

Q. 1 Ecrire la fonction `DamierBG(imin,imax,jmin,jmax)` permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage `quadrillage(imin,imax,jmin,jmax)` sachant que la case de position `(imin,jmin)` est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:



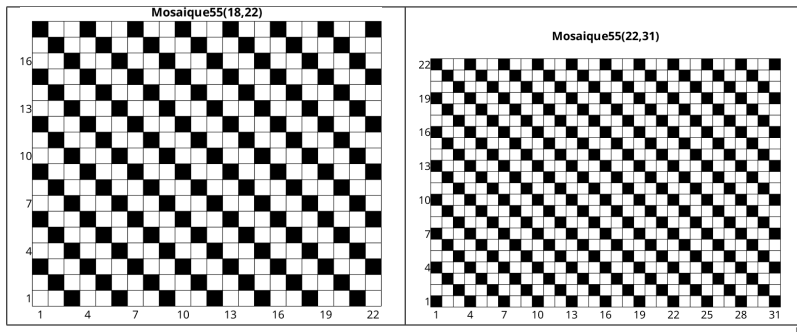
EXERCICE 8

Q. 1 Ecrire la fonction `DamierHG(imin,imax,jmin,jmax)` permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage `quadrillage(imin,imax,jmin,jmax)` sachant que la case de position `(imax,jmin)` est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:



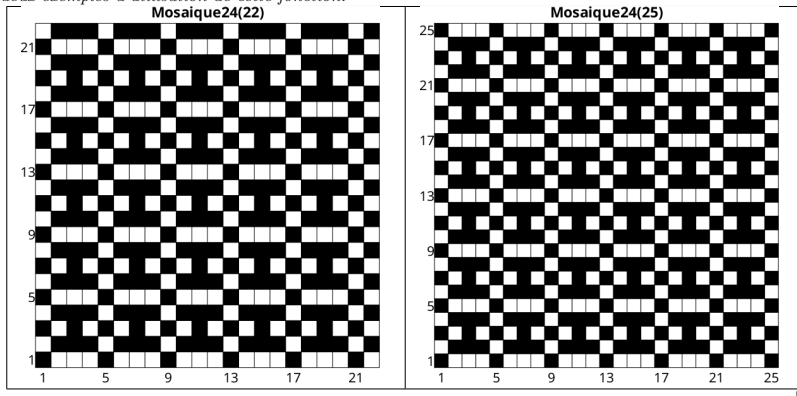
EXERCICE 9

Q. 1 Ecrire la fonction `Mosaïque55(n,m)` permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage `quadrillage(1,n,1,m)` sachant que la case de position `(n,1)` est noire. Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:



EXERCICE 10

Q. 1 Ecrire la fonction `Mosaïque24(n)` permettant de créer une mosaïque sur le quadrillage `quadrillage(1,n,1,n)` sachant que la ligne 1 est composée de la séquence noir, blanc, blanc, blanc, noir, blanc, blanc, blanc, Voici deux exemples d'utilisation de cette fonction:



3 Algèbre linéaire

EXERCICE 11

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

- Q. 1 a. Ecrire la fonction `getrow` permettant de retourner la ligne i de la matrice A .
b. Ecrire la fonction `getcolumn` permettant de retourner la colonne j de la matrice A .

- Q. 2 a. Ecrire la fonction `setrow` permettant de remplacer la ligne i de la matrice A par un vecteur u de "bonne" dimension.
b. Ecrire la fonction `setcolumn` permettant de remplacer la colonne j de la matrice A par un vecteur v de "bonne" dimension.

EXERCICE 12

Dans cet exercice les notations suivantes pourront être utilisées. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ alors

- $A_{:,j}$ correspond au j -ème vecteur colonne de A et s'écrit algorithmiquement $A(:,j)$. Si on écrit $v \leftarrow A(:,j)$ alors l'accès aux éléments de v s'effectue avec la commande $v(i)$. De plus, au niveau algorithmique, si w est un vecteur colonne ou ligne de dimension m , alors $A(:,j) \leftarrow w$ est autorisé et correspond, avec des notations mathématiques, à $A_{:,j} = w$ ou $A_{:,j} = w^t$ c'est à dire $A_{i,j} = w_i$, $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. En utilisant les fonctions de l'exercice précédent, on a

$$v \leftarrow A(:,j) \iff v \leftarrow \text{getcolumn}(A,j)$$

et

$$A(:,j) \leftarrow w \iff A \leftarrow \text{setcolumn}(A,j,w)$$

- $A_{i,:}$ correspond au i -ème vecteur ligne de A et s'écrit algorithmiquement $A(i,:)$. Si on écrit $u \leftarrow A(i,:)$ alors l'accès aux éléments de u s'effectue avec la commande $u(j)$. De plus, au niveau algorithmique, si w est un vecteur ligne ou colonne de dimension n , alors $A(i,:) \leftarrow w$ est autorisé et correspond, avec des notations mathématiques, à $A_{i,:} = w$ ou $A_{i,:} = w^t$ c'est à dire $A_{i,j} = w_j$, $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En utilisant les fonctions de l'exercice précédent, on a

$$u \leftarrow A(i,:) \iff u \leftarrow \text{getrow}(A,i)$$

et

$$A(i,:) \leftarrow w \iff A \leftarrow \text{setrow}(A,i,w)$$

- Q. 1 Soient u et v deux vecteurs réels.
- a. Rappeler précisément les hypothèses et la formule permettant le calcul du produit scalaire de u par v , noté $\langle u, v \rangle$.
- b. (Algo.) Ecrire la fonction `ProSca` permettant de retourner le produit scalaire de ces deux vecteurs.
- Q. 2 Soient $u \in \mathbb{R}^p$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ donnés.
- a. Rappeler précisément les hypothèses et les formules permettant le calcul du vecteur $v = Au$.
- b. (Algo.) Ecrire la fonction `ProMatVec1` permettant de retourner Au en utilisant les formules précédentes.
- c. Ecrire v_i comme un produit scalaire en utilisant les notations $A_{:,k}$ ou $A_{k,:}$.
- d. (Algo.) Ecrire la fonction `ProMatVec2` permettant de retourner Au en utilisant la fonction `ProSca`.

- Q. 3 Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ données.
- a. Rappeler précisément les hypothèses et les formules permettant le calcul de la matrice $G = AB$.
- b. (Algo.) Ecrire la fonction `ProMatMat1` permettant de retourner la matrice $G = AB$ en utilisant les formules précédentes.
- c. Ecrire $G_{:,j}$ (j -ème vecteur colonne de G) comme le produit d'une matrice par un vecteur.
- d. (Algo.) Ecrire la fonction `ProMatMat2` permettant de retourner la matrice G en utilisant la fonction `ProMatVec2`.

- Q. 4 Peut-on utiliser les différentes fonctions écrites dans le cas de matrices et vecteurs complexes?