Ing. MACS 1/L3 MIM **Analyse Numérique I**
Sup'Galilée **Année 2023-2024**

Partiel du 15 novembre 2023

durée : 3h00.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barême est donné à titre indicatif

Exercice 1 (5 points)

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{C}^n$, on définit l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^+$ par

$$\|\mathbb{A}\|_s \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \tag{1}$$

Q. 1 *Montrer que* $\|\mathbb{I}\|_s = 1$. □

On note $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \; ; \; \|\boldsymbol{v}\| \leqslant 1\}$ la boule unitée de $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \; ; \; \|\boldsymbol{v}\| = 1\}$ la sphère unitée de $\mathbb{C}^n$.

Q. 2 a. *Montrer que* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{S}$ *sont des compacts.*

b. *Montrer que*

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \tag{2}$$

c. *En déduire que*

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \tag{3}$$

d. *En déduire que l'application* $\|\bullet\|_s$ *est bien définie sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *i.e.* $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|\mathbb{A}\|_s < +\infty$.

e. *Montrer qu'il existe* $\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}$ *tel que* $\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|$.

□

Q. 3 a. *Montrer que* $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\|$.

b. *Soit* $\alpha \in \mathbb{C}^*$. *Montrer qu'il existe* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ *tel que* $\|\boldsymbol{u}\| = |\alpha|$ *vérifiant*

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{u}\|.$$

□

Q. 4 *Montrer que* $\|\bullet\|_s$ *est une norme matricielle.* □

Exercice 2 (2.5 points)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}$$

la norme matricielle suboordonnée à la norme vectorielle $\|\bullet\|_\infty$.

Q. 1 *Montrer que*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_\infty=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|.$$

□

Q. 2 *a. Déterminer un $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$ tel que*

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|.$$

b. Conclure.

□

Q. 3 `[Algo]` *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* ***NormInf****, calculant* $\|\mathbb{A}\|_\infty$. □

Exercice 3 (15 points)

Q. 1 `[Algo]` *Soit $\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ et $\boldsymbol{x}^{[0]} \in \mathbb{C}^n$. On définit la suite*

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]}),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Proposer une fonction algorithmique FixPtVec *permettant de retourner une approximation de $\boldsymbol{\alpha} = \lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}^{[k]}$ quand la suite converge, et de s'arrêter lorsque la suite diverge.* □

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. L'objectif de cet exercice est de déterminer une méthode de point fixe vectoriel pour la recherche de la racine de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$.
On décompose la matrice $\mathbb{A}$ en $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ où $\mathbb{M}$ est inversible. On note $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$.

Q. 2 *Montrer que la matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne.* □

On rappelle la définition du produit scalaire dans $\mathbb{C}^n$:

$$\forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n,\quad \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{v}.$$

Dans ce qui suit, on suppose la matrice hermitienne $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ définie positive.

Q. 3 *Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$ et $\boldsymbol{y} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}$.*

a. Montrer que

$$\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \mathbb{A}\boldsymbol{y}\rangle = \left\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle + \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle - \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle \tag{4}$$

et

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}. \tag{5}$$

b. En déduire que

$$\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \mathbb{A}\boldsymbol{y}\rangle = \langle (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\rangle. \tag{6}$$

□

Q. 4 *Montrer que si la matrice hermitienne $\mathbb{A}$ est définie positive alors $\rho(\mathbb{B}) < 1$.* □

Application: Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. On note $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire supérieure de composantes

$$M_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ A_{i,j} & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\mathbb{N} = \mathbb{M} - \mathbb{A}$.

Q. 5 *a. Démontrer que les valeurs propres de $\mathbb{A}$ dont dans $\mathbb{R}^{+*}$.*

b. En déduire que $\mathbb{A}$ est inversible.

c. Montrer que, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $A_{i,i} \in \mathbb{R}^{+*}$.

d. En déduire que la matrice $\mathbb{M}$ est inversible.

□

Q. 6 *a.* `[Algo]` *Ecrire la fonction algorithmique* SPLIT *permettant de retourner les matrices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{N}$ à partir de $\mathbb{A}$.*

b. Expliquer comment résoudre le système $\mathbb{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

c. `[Algo]` *Ecrire la fonction algorithmique* SOLVETRIUP *permettant de résoudre le système $\mathbb{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec $\boldsymbol{b}$ donné dans $\mathbb{C}^n$.*

□

On définit la fonction $\boldsymbol{\Phi}$ par

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{M}^{-1}\big(\mathbb{N}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\big), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$$

Soit $\boldsymbol{x}^{[0]} \in \mathbb{C}^n$, on définit la suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

On a vu en **Q.1** que la matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne. On suppose qu'elle est aussi définie positive.

Q. 7 *a.* *Montrer que* $\boldsymbol{\Phi}$ *admet un unique point fixe dans* $\mathbb{C}^n$ *et que ce point fixe est* $\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

b. *On pose* $\boldsymbol{e}^{[k]} = \boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{\alpha}$. *Démontrer que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \boldsymbol{e}^{[k+1]} = \mathbb{B}^{k+1}\boldsymbol{e}^{[0]}, \quad \text{avec } \mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}.$$

c. *En déduire que la suite* $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\boldsymbol{\alpha}$.

□

Q. 8 `[Algo]`

a. *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* Nxpb *, permettant de calculer* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ *donné par* $\boldsymbol{y} = \mathbb{N}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ *sachant que le produit matrice/vecteur n'est pas disponible dans notre langage algorithmique et que l'on veut minimiser le nombre d'opérations (i.e. tenir compte de la structure de la matrice* $\mathbb{N}$*).*

b. *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* Phi *, permettant de calculer* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ *donné par* $\boldsymbol{y} = \Phi(\boldsymbol{x})$ *sachant que l'inverse d'une matrice n'est pas disponible dans notre langage algorithmique.*

c. *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* ptFixeSolveLS *, permettant de retourner une approximation de la solution de* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *en utilisant l'algorithme du point fixe vectoriel et ce qui précède.*

□