Ing. MACS 1/L3 MIM **Analyse Numérique I**
Sup'Galilée **Année 2023-2024**

Partiel du 15 novembre 2023

durée : 3h00.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (5 points)

Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{C}^n$, on définit l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}^+$ par

$$\|\mathbb{A}\|_s \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \tag{1}$$

Q. 1 *Montrer que* $\|\mathbb{I}\|_s = 1$. □

Q. 1 On a immédiatement

$$\|\mathbb{I}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{I}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = 1.$$

On note $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \; ; \; \|\boldsymbol{v}\| \leqslant 1\}$ la boule unitée de $\mathbb{C}^n$ et $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \; ; \; \|\boldsymbol{v}\| = 1\}$ la sphère unitée de $\mathbb{C}^n$.

Q. 2 a. *Montrer que* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{S}$ *sont des compacts.*

b. *Montrer que*

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \tag{2}$$

c. *En déduire que*

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \tag{3}$$

d. *En déduire que l'application* $\|\bullet\|_s$ *est bien définie sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *i.e.* $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|\mathbb{A}\|_s < +\infty$.

e. *Montrer qu'il existe* $\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}$ *tel que* $\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|$.

□

Q. 2 a. Les ensembles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{S}$ sont des compacts car image réciproque de l'application continue $\boldsymbol{v} \mapsto \|\boldsymbol{v}\|$ par le fermé borné $[0, 1]$ (pour la boule) et le singleton $\{1\}$ (pour la sphère).

b. On a
$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \left\|\mathbb{A}\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\right\| = \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|$$

c. Comme $\mathcal{S}\subset\mathcal{B}$ on a aussi
$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \geqslant \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|. \tag{4}$$
On peut aussi remarquer que
$$\sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathcal{B}\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \tag{5}$$
De plus, $\forall \boldsymbol{w}\in\mathcal{B}\backslash\{0\}$, en posant $\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|}\in\mathcal{S}$. on a $\boldsymbol{w}=\|\boldsymbol{w}\|\,\boldsymbol{u}$ et
$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{w}\|\,\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \text{ car } \|\boldsymbol{w}\|\leqslant 1.$$
Or on a
$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \leqslant \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|.$$
et on obtient alors
$$\sup_{\substack{\boldsymbol{w}\in\mathcal{B}\\ \boldsymbol{w}\neq 0}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| \leqslant \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|.$$
En utilisant (4) et (5), on en déduit
$$\sup_{\boldsymbol{w}\in\mathcal{B}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| = \sup_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|.$$

d. L'application $\boldsymbol{v}\mapsto\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|$ est continue donc son sup sur la sphère unitée qui est compacte est atteint.

e. Comme $\mathcal{S}$ est compact et l'application $\boldsymbol{v}\mapsto\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|$ est continue, il existe $\boldsymbol{w}\in\mathcal{S}$ tel que
$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{S}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|.$$

Q. 3 *a. Montrer que* $\forall \boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n$, $\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\|$.

b. Soit $\alpha\in\mathbb{C}^*$. *Montrer qu'il existe* $\boldsymbol{u}\in\mathbb{C}^n$ *tel que* $\|\boldsymbol{u}\|=|\alpha|$ *vérifiant*
$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{u}\|.$$

□

Q. 3 a. On a par définition du sup
$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{u}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{u}\|} \geqslant \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}, \quad \forall \boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\backslash\{0\}.$$
et donc
$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\|, \quad \forall \boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\backslash\{0\}.$$
qui est équivalent à
$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\|, \quad \forall \boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n.$$

b. D'après la **Q. 2** e., il existe $\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}$ tel que $\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\|$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{w} \neq 0$. On a $\|\boldsymbol{u}\| = |\alpha|$ et

$$\|\mathbb{A}\|_s = \|\mathbb{A}\boldsymbol{w}\| = \left\|\mathbb{A}\frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}\right\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{u}\|}\|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \Leftrightarrow \|\mathbb{A}\|_s\|\boldsymbol{u}\| = \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\|$$

Q. 4 *Montrer que* $\|\bullet\|_s$ *est une norme matricielle.* □

Q. 4

- $\|\mathbb{A}\|_s = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{A}_s = \mathbb{O}$?

$\boxed{\Longleftarrow}$ trivial.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}\|_s = 0 = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} &\Longrightarrow \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = 0,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}\\ &\Longrightarrow \mathbb{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0},\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\backslash\{0\}\end{aligned}$$

Soit $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a alors $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{A}\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{0}$ et on en déduit que

$$\mathrm{A}_{i,j} = \langle \boldsymbol{e}_i, \mathbb{A}\boldsymbol{e}_j\rangle = 0,\ \forall (i,j) \in [\![1, n]\!].$$

et donc $\mathbb{A} = \mathbb{O}$.

- Montrons que $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha|\,\|\mathbb{A}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,.
Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\alpha\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel) et

$$\begin{aligned}\|\alpha\mathbb{A}\|_s &= \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\alpha\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{|\alpha|\,\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \quad \text{car } \|\alpha\boldsymbol{u}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{u}\|\\ &= |\alpha| \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = |\alpha|\,\|\mathbb{A}\|_s.\end{aligned}$$

- Montrons que $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\|_s \leqslant \|\mathbb{A}\|_s + \|\mathbb{B}\|_s$, $\forall\,(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$
Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathbb{A}+\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\|_s &= \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|(\mathbb{A} + \mathbb{B})\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v} + \mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}\\ &\leqslant \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| + \|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \quad \text{par inégalité triangulaire dans } \mathbb{K}^n\\ &\leqslant \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} + \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \|\mathbb{A}\|_s + \|\mathbb{B}\|_s.\end{aligned}$$

- Montrons que $\|\mathbb{AB}\|_s \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbb{B}\|_s, \ \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.
  Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathbb{AB} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par définition du produit matriciel et

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{AB}\|_s &= \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|(\mathbb{AB})\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}(\mathbb{B}\boldsymbol{v})\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \\
&\leqslant \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\|_s \|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} \quad \text{car } \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{u}\| \ \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n \\
&\leqslant \|\mathbb{A}\|_s \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{B}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbb{B}\|_s .
\end{aligned}$$

Exercice 2 (2.5 points)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}$$

la norme matricielle suboordonnée à la norme vectorielle $\|\bullet\|_\infty$.

Q. 1 *Montrer que*

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\\ \|\boldsymbol{x}\|_\infty=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

□

Q. 1 Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1$. On a

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty &= \max_{i\in[\![1,n]\!]} |(\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left| \sum_{j=1}^n \mathrm{A}_{i,j} x_j \right| \\
&\leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |\mathrm{A}_{i,j}||x_j| \\
&\leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |\mathrm{A}_{i,j}| \quad \text{car } |x_j| \leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i| = \|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n\\ \|\boldsymbol{x}\|_\infty=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |\mathrm{A}_{i,j}|.$$

Q. 2 *a. Déterminer un $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$ tel que*

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |A_{i,j}|.$$

b. Conclure.

□

Q. 2 a. Soit $k \in [\![1,n]\!]$ tel que

$$\sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{k,j}| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|.$$

On a, pour tout $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$,

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left|(\mathbb{A}\boldsymbol{y})_i\right| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left|\sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{i,j} y_j\right|.$$

On va construire un vecteur $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$, tel que

$$\max_{i\in[\![1,n]\!]} \left|\sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{i,j} y_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{k,j}|.$$

On sait déjà que, si $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$,

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \left|\sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{i,j} y_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{k,j}|.$$

On va donc construire $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$, de telle sorte que

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{k,j} y_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{k,j}|.$$

Il suffit pour celà de prendre,

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad y_j = \begin{cases} \frac{|\mathrm{A}_{k,j}|}{\mathrm{A}_{k,j}} & \text{si } \mathrm{A}_{kj} \neq 0 \\ 1 & \text{si } \mathrm{A}_{k,j} = 0 \end{cases}.$$

et on a bien $\|\boldsymbol{y}\|_\infty = 1$. On a alors

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{k,j} y_j\right| = \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{k,j}| \ \text{ et } \ \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \left|\sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{i,j} y_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{k,j}|$$

et donc

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_\infty = \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{k,j}| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|.$$

b. D'après la proposition/définition des normes matricielles suboordonnées, on a

$$\|\mathbb{A}\|_\infty = \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_\infty=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_\infty .$$

En utilisant les résultats de **Q.1** et **Q.2**, on obtient

$$\|\mathbb{A}\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|.$$

Q. 3 `[Algo]` *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* ***NormInf****, calculant* $\|\mathbb{A}\|_\infty$. □

Q. 3 Voici une possibilité de fonction:

Algorithme 1 Fonction NormInf permettant de calculer $\|\mathbb{A}\|_\infty$

Données : A : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Résultat : r : le réel $r = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$

```
Fonction r ← NormInf ( A )
  n ← nb de lignes de A
  r ← 0
  Pour i ← 1 à n faire
    S ← 0
    Pour j ← 1 à n faire
      S ← S + |A(i, j)|
    Fin Pour
    Si r < S alors
      r ← S
    Fin Si
  Fin Pour
Fin Fonction
```

Exercice 3 (15 points)

Q. 1 `[Algo]` *Soit* $\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ *et* $\boldsymbol{x}^{[0]} \in \mathbb{C}^n$. *On définit la suite*

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]}), \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Proposer une fonction algorithmique FixPtVec *permettant de retourner une approximation de* $\boldsymbol{\alpha} = \lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{x}^{[k]}$ *quand la suite converge, et de s'arréter lorsque la suite diverge.* □

Q. 1 Une fonction possible est

Algorithme 2 Méthode de point fixe vectorielle

Données :

Φ : $\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{K}^N \longrightarrow \mathbb{K}^N$,
$\boldsymbol{x0}$: donnée initiale, $\boldsymbol{x0} \in \mathbb{K}^N$,
tol : la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$,
kmax : nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$

Résultat :

$\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}$: un réel tel que $\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}) - \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}}\| \leqslant \mathrm{tol}$

Fonction $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow$ PtFixeVec ($\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{x0}, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$)
  $k \leftarrow 0$, $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow \varnothing$
  $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{x0}$, $\boldsymbol{fx} \leftarrow \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x0})$,
  $\mathrm{err} \leftarrow \|\boldsymbol{fx} - \boldsymbol{x}\|$ ▷ ou $\frac{\|\boldsymbol{fx}-\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|+1}$
  Tantque $\mathrm{err} > \mathrm{tol}$ et $k \leqslant \mathrm{kmax}$ **faire**
    $k \leftarrow k + 1$
    $\boldsymbol{x} \leftarrow \boldsymbol{fx}$
    $\boldsymbol{fx} \leftarrow \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$
    $\mathrm{err} \leftarrow \|\boldsymbol{fx} - \boldsymbol{x}\|$ ▷ ou $\frac{\|\boldsymbol{fx}-\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|+1}$
  Fin Tantque
  Si $\mathrm{err} \leqslant \mathrm{tol}$ **alors**
    $\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{tol}} \leftarrow \boldsymbol{x}$
  Fin Si
Fin Fonction

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. L'objectif de cet exercice est de déterminer une méthode de point fixe vectoriel pour la recherche de la racine de $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$.
On décompose la matrice $\mathbb{A}$ en $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ où $\mathbb{M}$ est inversible. On note $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$.

Q. 2 *Montrer que la matrice* $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ *est hermitienne.* □

Q. 2 On a

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{M}^* + \mathbb{N}\right)^* &= \mathbb{M} + \mathbb{N}^* \\
&= \mathbb{A} + \mathbb{N} + \mathbb{N}^* = \mathbb{A}^* + \mathbb{N} + \mathbb{N}^* \quad \text{car } \mathbb{A} \text{ est hermitienne} \\
&= \mathbb{M}^* + \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

La matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est donc hermitienne.

On rappelle la définition du produit scalaire dans $\mathbb{C}^n$:

$$\forall(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n, \quad \langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{v}.$$

Dans ce qui suit, on suppose la matrice hermitienne $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ définie positive.

Q. 3 *Soit $\boldsymbol{x}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$ et $\boldsymbol{y} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}$.*

a. Montrer que

$$\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \mathbb{A}\boldsymbol{y}\rangle = \left\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle + \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle - \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle \tag{6}$$

et

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}. \tag{7}$$

b. En déduire que

$$\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}, \mathbb{A}\boldsymbol{y}\rangle = \langle (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\rangle. \tag{8}$$

□

Q. 3 a. On a $\boldsymbol{y} = \mathbb{B}\boldsymbol{x}$ avec $\mathbb{B} = \mathbb{I} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$ ce qui donne

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \mathbb{B}\boldsymbol{x} = \left(\mathbb{I} - \mathbb{B}\right)\boldsymbol{x} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}.$$

L'équation (7) est donc démontrée. Pour prouver (6), on note que

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}$$

et donc

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{y}, \mathbb{A}\boldsymbol{y}\rangle &= \left\langle \boldsymbol{x} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\left(\boldsymbol{x} - \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right)\right\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\rangle - \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle - \left\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle + \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle.\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement (6).

b. En utilisant (7), on obtient

$$\begin{aligned}\left\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \left(\mathbb{M}^* + \mathbb{N}\right)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right\rangle &= \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \left(\mathbb{M}^* + \mathbb{N}\right)\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle \\ &= \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \left(\mathbb{M} + \mathbb{N}^*\right)\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle \quad \text{car } \mathbb{M}^* + \mathbb{N} \text{ hermitienne} \\ &= \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \left(\mathbb{M} + \mathbb{M}^* - \mathbb{A}^*\right)\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle \quad \text{car } \mathbb{N} = \mathbb{M} - \mathbb{A} \\ &= \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle + \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle - \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle \quad \text{car } \mathbb{A} \text{ hermitienne}\end{aligned}$$

Or, par propriété du produit scalaire, on a

$$\left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle = \left\langle \mathbb{M}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle = \left\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle = \left\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle.$$

Comme $\mathbb{A}$ est hermitienne, on obtient

$$\left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{M}^*\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle = \left\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle.$$

On abouti alors à

$$\left\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \left(\mathbb{M}^* + \mathbb{N}\right)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right\rangle = \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle + \left\langle \boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle - \left\langle \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}, \mathbb{A}\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{x}\right\rangle.$$

L'équation (8) est obtenue en utilisant (6).

Q. 4 *Montrer que si la matrice hermitienne $\mathbb{A}$ est définie positive alors $\rho(\mathbb{B}) < 1$.* □

Q. 4 On veut démontrer que sous les hypothèses $\mathbb{A}$ hermitienne définie positive et $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ (hermitienne) définie positive on a $\rho(\mathbb{B}) < 1$, c'est à dire que pour tout élément propre $(\lambda, \boldsymbol{u})$ de $\mathbb{B}$ alors $|\lambda| < 1$.
Soit $(\lambda, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ un élément propre de $\mathbb{B}$. On a $\mathbb{B}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$. En prenant $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$ dans **Q**.3, on a $\boldsymbol{y} = \mathbb{B}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ et donc $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = (1-\lambda)\boldsymbol{u}$. De (8) on obtient

$$\langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}\boldsymbol{u} \rangle - \langle \lambda\boldsymbol{u}, \lambda\mathbb{A}\boldsymbol{u} \rangle = \langle (1-\lambda)\boldsymbol{u}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})((1-\lambda)\boldsymbol{u}) \rangle$$

c'est à dire

$$(1 - |\lambda|^2) \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}\boldsymbol{u} \rangle = |1-\lambda|^2 \langle \boldsymbol{u}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})\boldsymbol{u} \rangle . \tag{9}$$

Comme par hypothèse, la matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ (hermitienne) est définie positive et $\boldsymbol{u} \neq 0$, on obtient

$$\langle \boldsymbol{u}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})\boldsymbol{u} \rangle > 0$$

et donc on déduit de (9) que

$$(1 - |\lambda|^2) \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}\boldsymbol{u} \rangle \geqslant 0.$$

Comme $\mathbb{A}$ hermitienne définie positive et $\boldsymbol{u} \neq 0$, on déduit de (9) que $1 - |\lambda|^2 \geqslant 0$ et donc $|\lambda| \leqslant 1$.
On va démontrer par l'absurde que $|\lambda| \neq 1$. On suppose $|\lambda| = 1$, de (9) on déduit

$$|1-\lambda|^2 \langle \boldsymbol{u}, (\mathbb{M}^* + \mathbb{N})\boldsymbol{u} \rangle = 0.$$

Comme par hypothèse, la matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ (hermitienne) est définie positive et $\boldsymbol{u} \neq 0$, on obtient $|1-\lambda|^2 = 0$, c'est à dire $\lambda = 1$. Or dans ce cas on a

$$\boldsymbol{y} = \mathbb{B}\boldsymbol{x} = \mathbb{B}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}.$$

L'équation (7) donne alors

$$0 = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}\boldsymbol{u}.$$

Comme $\boldsymbol{u} \neq 0$, et que $\mathbb{M}^{-1}\mathbb{A}$ est inversible, l'équation ci-dessus est impossible, donc $|\lambda| \neq 1$.

Application: Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. On note $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice triangulaire supérieure de composantes

$$M_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ A_{i,j} & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\mathbb{N} = \mathbb{M} - \mathbb{A}$.

Q. 5 *a. Démontrer que les valeurs propres de $\mathbb{A}$ dont dans $\mathbb{R}^{+*}$.*

b. En déduire que $\mathbb{A}$ est inversible.

c. *Montrer que,* $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $A_{i,i} \in \mathbb{R}^{+*}$.

d. *En déduire que la matrice* $\mathbb{M}$ *est inversible.*

□

Q. 5 a. Soit $(\lambda, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ un élement propre de $\mathbb{A}$: on a

$$\mathbb{A}\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}$$

et, on en déduit

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \langle \lambda \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = \overline{\lambda} \left\| u \right\|_2^2.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle &= \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}^* \boldsymbol{u} \rangle && \text{par propriété du produit scalaire} \\ &= \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}\boldsymbol{u} \rangle && \text{car la matrice est hermitienne} \\ &= \langle \boldsymbol{u}, \lambda \boldsymbol{u} \rangle = \lambda \left\| u \right\|_2^2. \end{aligned}$$

Comme $\boldsymbol{u} \neq 0$, on en déduit $\lambda = \overline{\lambda}$, c'est à dire $\lambda \in \mathbb{R}$.

La matrice hermitienne $\mathbb{A}$ étant définie positive et $\boldsymbol{u}$ étant non nul, on obtient

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle > 0$$

et donc $\lambda > 0$.

b. La matrice $\mathbb{A}$ est inversible car toutes ses valeurs propres sont nulles.

c. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On note $\boldsymbol{e}_i$ le i-ème vecteur de la base canonique. On a alors

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i \rangle = \left(\mathbb{A}\boldsymbol{e}_i\right)^* \boldsymbol{e}_i = \overline{\mathrm{A}_{i,i}}.$$

Comme la matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne, on a aussi

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i \rangle = \langle \boldsymbol{e}_i, \mathbb{A}\boldsymbol{e}_i \rangle = \mathrm{A}_{i,i}$$

et donc $\mathrm{A}_{i,i} \in \mathbb{R}$. La matrice $\mathbb{A}$ étant aussi définie positve, on en déduit $\mathrm{A}_{i,i} > 0$ car $\boldsymbol{e}_i \neq \boldsymbol{0}$.

d. La matrice $\mathbb{M}$ est triangulaire supérieure: pour qu'elle soit inversible il faut et il suffit que ses éléments diagonaux soient tous non nuls. Or, on a $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{M}_{i,i} = \mathrm{A}_{i,i} > 0$.

Q. 6 a. `[Algo]` *Ecrire la fonction algorithmique* SPLIT *permettant de retourner les matrices* $\mathbb{M}$ *et* $\mathbb{N}$ *à partir de* $\mathbb{A}$.

b. *Expliquer comment résoudre le système* $\mathbb{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

c. `[Algo]` *Ecrire la fonction algorithmique* SOLVETRIUP *permettant de résoudre le système* $\mathbb{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *avec* $\boldsymbol{b}$ *donné dans* $\mathbb{C}^n$.

□

Q. 6 a. Voici un exemple de fonction

Algorithme 3 Initialisation des matrices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{N}$ telles que $\mathbb{M}$ corresponde à la matrice triangulaire supérieure de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{N} = \mathbb{M} - \mathbb{A}$.

Données :
$\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Résultat :
$\mathbb{M}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
$\mathbb{N}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

Fonction $[\mathbb{M}, \mathbb{N}] \leftarrow$ Split ($\mathbb{A}$)
  $n \leftarrow$ nb de lignes de $\mathbb{A}$
  $\mathbb{M} \leftarrow \mathbb{0}_n,\ \mathbb{N} \leftarrow \mathbb{0}_n$
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    Pour $j \leftarrow i$ **à** n **faire**
      $\mathbb{M}(i,j) \leftarrow \mathbb{A}(i,j)$
    Fin Pour
    Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
      $\mathbb{N}(i,j) \leftarrow -\mathbb{A}(i,j)$
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Fonction

b. On remarque que l'on peut calculer successivement $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$, car il est possible de calculer x_i si on connait $x_{i+1}, \ldots, x_n$: c'est la **méthode de montée**. En effet, on a

$$(\mathbb{M}\boldsymbol{x})_i = b_i,\ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

et donc, par définition d'un produit matrice-vecteur,

$$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} x_j = b_i,\ \forall i \in [\![1, n]\!].$$

Comme $\mathbb{M}$ est une matrice triangulaire supérieure, on a $M_{i,j} = 0$ si $j < i$. Ceci donne alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$\begin{aligned} b_i &= \sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{M_{i,j}}_{=0} x_j + M_{i,i} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} M_{i,j} x_j \\ &= M_{i,i} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} M_{i,j} x_j \end{aligned}$$

De plus, ses éléments diagonaux sont tous non nuls. On obtient alors x_i en fonction des $x_{i+1}, \ldots, x_n$:

$$x_i = \frac{1}{M_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} M_{i,j} x_j \right),\ \forall i \in [\![1, n]\!]. \tag{10}$$

c. Une fonction possible est

Algorithme 4 Fonction SolveTriUp permettant de résoudre le système linéaire triangulaire supérieur inversible

$$\mathbb{M}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Données : $\mathbb{M}$: matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ supérieure inversible.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.

```
Fonction x ← SolveTriUp ( M, b )
  Pour i ← n à 1 faire(pas de −1)
    S ← 0
    Pour j ← i + 1 à n faire
      S ← S + M(i, j) ∗ x(j)
    Fin Pour
    x(i) ← (b(i) − S)/M(i, i)
  Fin Pour
Fin Fonction
```

On définit la fonction $\boldsymbol{\Phi}$ par

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{M}^{-1}\big(\mathbb{N}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\big), \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$$

Soit $\boldsymbol{x}^{[0]} \in \mathbb{C}^n$, on définit la suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

On a vu en **Q.1** que la matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne. On suppose qu'elle est aussi définie positive.

Q. 7 a. *Montrer que $\boldsymbol{\Phi}$ admet un unique point fixe dans $\mathbb{C}^n$ et que ce point fixe est $\boldsymbol{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.*

b. *On pose $\mathbf{e}^{[k]} = \boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{\alpha}$. Démontrer que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{e}^{[k+1]} = \mathbb{B}^{k+1}\mathbf{e}^{[0]}, \quad \text{avec } \mathbb{B} = \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}.$$

c. *En déduire que la suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\boldsymbol{\alpha}$.*

□

Q. 7 a. On a

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} &\Leftrightarrow \mathbb{M}^{-1}\big(\mathbb{N}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\big) = \boldsymbol{\alpha} \\
&\Leftrightarrow \mathbb{N}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = \mathbb{M}\boldsymbol{\alpha} \\
&\Leftrightarrow \big(\mathbb{M} - \mathbb{N}\big)\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b} \\
&\Leftrightarrow \mathbb{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}.
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{A}$ est inversible, il existe un unique $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathbb{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{b}$ et on a $\boldsymbol{\alpha} = \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. Par les relations d'équivalence précédentes, $\boldsymbol{\alpha}$ est l'unique point fixe de $\boldsymbol{\Phi}$.

b. On a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}^{[k+1]} - \boldsymbol{\alpha} &= \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}) \\ &= \mathbb{M}^{-1}\left(\mathbb{N}\boldsymbol{x}^{[k]} + \boldsymbol{b}\right) - \mathbb{M}^{-1}\left(\mathbb{N}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{b}\right) \\ &= \mathbb{M}^{-1}\mathbb{N}\left(\boldsymbol{x}^{[k]} - \boldsymbol{\alpha}\right) \\ &= \mathbb{B}\boldsymbol{e}^{[k]}.\end{aligned}$$

Par récurrence immédiate, on a

$$\boldsymbol{e}^{[k+1]} = \mathbb{B}^{k+1}\boldsymbol{e}^{[0]}.$$

c. La suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ si et seulement si la suite $(\boldsymbol{e}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathbf{0}$, c'est à dire si et seulement si $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

Or par hypothèse,

- la matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive (par hyp.),
- $\mathbb{A} = \mathbb{M} - \mathbb{N}$ avec $\mathbb{M}$ inversible (par hyp.),
- la matrice $\mathbb{M}^* + \mathbb{N}$ est hermitienne (voir **Q.1**) définie positive (par hyp.)

et donc d'après **Q.3**, $\rho(\mathbb{B}) < 1$.

Q. 8 `[Algo]`

a. *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* NxPB *, permettant de calculer $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ donné par $\boldsymbol{y} = \mathbb{N}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ sachant que le produit matrice/vecteur n'est pas disponible dans notre langage algorithmique et que l'on veut minimiser le nombre d'opérations (i.e. tenir compte de la structure de la matrice $\mathbb{N}$).*

b. *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* Phi *, permettant de calculer $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ donné par $\boldsymbol{y} = \Phi(\boldsymbol{x})$ sachant que l'inverse d'une matrice n'est pas disponible dans notre langage algorithmique.*

c. *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* ptFixeSolveLS *, permettant de retourner une approximation de la solution de $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en utilisant l'algorithme du point fixe vectoriel et ce qui précède.*

□

Q. 8 a. Voici un exemple de fonction

Algorithme 5 calcul $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ donné par $\boldsymbol{y} = \mathbb{N}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$.

Données :

$\mathbb{N}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $N_{i,j} = 0$, si $i \leqslant j$
$\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$

Résultat :

$\boldsymbol{y}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$

Fonction $\boldsymbol{y} \leftarrow$ NXPB ($\mathbb{N}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}$)
  $n \leftarrow$ nb de lignes de $\mathbb{N}$
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    $S \leftarrow 0$
    Pour $j \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
      $S \leftarrow S + \mathbb{N}(i,j) * \boldsymbol{x}(j)$
    Fin Pour
    $\boldsymbol{y}(i) \leftarrow S + \boldsymbol{b}(i)$
  Fin Pour
Fin Fonction

b. Calculer $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ donné par $\boldsymbol{y} = \Phi(\boldsymbol{x})$ revient à résoudre le système triangulaire supérieur

$$\mathbb{M}\boldsymbol{y} = \mathbb{N}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

On a donc

$$\boldsymbol{y} \leftarrow \text{SOLVETRIUP}(\mathbb{M}, \text{NXPB}(\mathbb{N}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}))$$

Algorithme 6 calcul $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ donné par $\boldsymbol{y} = \Phi(\boldsymbol{x})$.

Données :

$\mathbb{M}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
$\mathbb{M}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$
$\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$

Résultat :

$\boldsymbol{y}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$

Fonction $\boldsymbol{y} \leftarrow$ PHI ($\mathbb{M}, \mathbb{N}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}$)
  $\boldsymbol{z} \leftarrow$ NXPB$(\mathbb{N}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$
  $\boldsymbol{y} \leftarrow$ SOLVETRIUP$(\mathbb{M}, \boldsymbol{z})$
Fin Fonction

c. Voici un exemple de fonction

Algorithme 7 calcul de la solution du système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ en utilisant l'algorithme du point fixe vectoriel.

Données :

$\mathbb{A}$	:	matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive vérifiant certaines hypothèses
$\boldsymbol{b}$	:	vecteur de $\mathbb{C}^n$
$\boldsymbol{x0}$	:	donnée initiale, $\boldsymbol{x0} \in \mathbb{C}^N$, (voir FixPtVec)
tol	:	la tolérence, $\mathrm{tol} \in \mathbb{R}^+$, (voir FixPtVec)
kmax	:	nombre maximum d'itérations, $\mathrm{kmax} \in \mathbb{N}^*$ (voir FixPtVec)

Résultat :

$\boldsymbol{x}$	:	vecteur de $\mathbb{C}^n$

Fonction $\boldsymbol{x} \leftarrow$ ptFixeSolveLS ($\mathbb{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x0}, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$)
  $[\mathbb{M}, \mathbb{N}] \leftarrow \textsc{Split}(\mathbb{A})$
  $\boldsymbol{P} \leftarrow \big(\boldsymbol{x} \mapsto \textsc{Phi}(\mathbb{M}, \mathbb{N}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x})\big)$ $\quad\triangleright\ \boldsymbol{P} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$
  $\boldsymbol{x} \leftarrow \textsc{FixPtVec}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{x0}, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax})$
Fin Fonction

On aurait pu aussi écrire

Fonction $\boldsymbol{x} \leftarrow$ ptFixeSolveLS ($\mathbb{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x0}, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$)
  $[\mathbb{M}, \mathbb{N}] \leftarrow \textsc{Split}(\mathbb{A})$
  $\boldsymbol{P} \leftarrow \big(\boldsymbol{x} \mapsto \textsc{SolveTriUp}(\mathbb{M}, \textsc{NxPb}(\mathbb{N}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}))\big)$ $\quad\triangleright\ \boldsymbol{P} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$
  $\boldsymbol{x} \leftarrow \textsc{FixPtVec}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{x0}, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax})$
Fin Fonction

ou encore

Fonction $\boldsymbol{x} \leftarrow$ ptFixeSolveLS ($\mathbb{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x0}, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax}$)
  $[\mathbb{M}, \mathbb{N}] \leftarrow \textsc{Split}(\mathbb{A})$
  $\boldsymbol{x} \leftarrow \textsc{FixPtVec}(\boldsymbol{x} \mapsto \textsc{SolveTriUp}(\mathbb{M}, \textsc{NxPb}(\mathbb{N}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})), \boldsymbol{x0}, \mathrm{tol}, \mathrm{kmax})$
Fin Fonction