PARTIEL DU 15 NOVEMBRE 2024*
durée : 3h00.

Sans documents et sans appareils électroniques
Le barème est donné à titre indicatif

Dans ce sujet:

- Les trois exercices sont indépendants.
- Les entrées/sorties des fonctions algorithmiques que vous écrirez devront être décrites.
- Le but de toute fonction algorithmique que vous écrirez, et qui n'est pas explicitement demandée, devra être précisé.

EXERCICE 1 (3.0 points)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\|A\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ \|x\|_1=1}} \|Ax\|_1$$

la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|\bullet\|_1$.

Q. 1

0.75 PTS

Montrer que

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ \|x\|_1=1}} \|Ax\|_1 \leq \max_{j \in [1, n]} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|.$$

Q.1
0.75 PTS

Q. 2

1 PTS

a. Déterminer un $y \in \mathbb{C}^n$, $\|y\|_1 = 1$ tel que

$$\|Ay\|_1 = \max_{j \in [1, n]} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}|.$$

0.25 PTS

b. Conclure.

Q.2
1.25 PTS

Q. 3

1 PTS

[Algo] Ecrire une fonction algorithmique, nommée **Norm1**, calculant $\|A\|_1$.

Q.3
1.00 PTS

Exo. 1
3.00 PTS

EXERCICE 2 (7.25 points)

Soient $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Q. 1

0.5 PTS

[Algo] Ecrire une fonction algorithmique **PtFixe** retournant l'ensemble des itérés x_k , pour $k \in \llbracket 1, k_{\max} \rrbracket$ où $k_{\max}$ est un entier.

Q.1
0.50 PTS

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $I =]\alpha_-, \alpha_+[$ un voisinage de α . On suppose que $\phi \in \mathcal{C}^1(I)$ et que α est un point fixe de ϕ vérifiant

$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

Q. 2

0.25 PTS

a. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, $|\phi'(x)| < 1$.

0.75 PTS

b. Montrer que ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$

0.5 PTS

c. Montrer que $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.

0.5 PTS

d. Citer précisément le théorème du cours qui, à partir de Q. 2-b. et c., permet de déduire la convergence de l'algorithme du point fixe vers α au moins à l'ordre 1.

Q.2
2.00 PTS

Soient $x_0 \in \mathcal{V}$ et la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe.

Q. 3

0.75 PTS

Montrer que, si $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{\alpha\}$, alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \phi'(\alpha). \quad (1)$$

Q.3
0.75 PTS

Q. 4

Supposons maintenant que $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ et que

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \phi^{(i)}(\alpha) = 0.$$

1 PTS

a. Montrer que la méthode du point fixe est d'ordre $p + 1$ au moins.

1 PTS

b. Montrer que, si $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{\alpha\}$, alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \quad (2)$$

0.25 PTS

c. Que peut-on dire sur l'ordre de convergence de la suite si $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$?

Q.4
2.25 PTS

Application. Soit $\phi(x) = (x - 1)^3 + 1$.

Q. 5

0.25 PTS

a. Déterminer les points fixes de ϕ .

0.25 PTS

b. Quels sont les points fixes attractifs et répulsifs? Justifier.

0.75 PTS

c. Pour un point attractif, déterminer un intervalle J (le plus grand possible) pour lequel, un théorème (à rappeler) permet d'affirmer que, $\forall x_0 \in J$, la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers ce point fixe.

0.5 PTS

d. Quel est l'ordre de convergence exacte? Justifier.

Q.5
1.75 PTS

EXO. 2
7.25 PTS

EXERCICE 3 (10.25 points)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive

Q. 1

0.5 PTS

a. Démontrer que $\mathbb{A}$ est inversible.

1 PTS

b. Montrer que toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont hermitiennes définies positives.

0.5 PTS

c. Ecrire précisément le théorème de factorisation LU. Que peut-on en conclure pour la matrice $\mathbb{A}$?

Q.1
2.00 PTS

On suppose (si besoin) que la matrice $\mathbb{A}$ admet une factorisation $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ avec $\mathbb{L}$ une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{D}$ une matrice diagonale.

Q. 2

0.5 PTS

a. Démontrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $D_{i,i}$ est réel strictement positif.

1 PTS

b. En déduire qu'il existe une matrice $\mathbb{B}$ triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont réels strictement négatifs telle que

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*. \quad (1)$$

Cette factorisation est appelée la factorisation négative de Cholesky.

1 PTS

c. Démontrer l'unicité de la factorisation négative de Cholesky.

0.25 PTS

d. Soit $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ donné. Expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ à l'aide de la factorisation négative de Cholesky.

Q.2
2.75 PTS

Q. 3

0.75 PTS

a. Montrer que

$$B_{i,i} = - \left(A_{i,i} - \sum_{j=1}^{i-1} |B_{i,j}|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (2)$$

0.75 PTS

b. Montrer que

$$B_{j,i} = \frac{1}{B_{i,i}} \left(A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} B_{j,k} \overline{B_{i,k}} \right), \quad \forall j \in \llbracket i+1, n \rrbracket \quad (3)$$

$$B_{j,i} = 0, \quad \forall j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket. \quad (4)$$

0.5 PTS

c. Expliquer rapidement comment calculer explicitement la matrice $\mathbb{B}$ à l'aide des formules précédentes.

2.0 PTS

d. [Algo] Ecrire la fonction algorithmique **FactCN** permettant de calculer la matrice $\mathbb{B}$

Q.3
4.00 PTS

On dispose des fonctions :

- $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{RESTI}(\mathbb{L}, \mathbf{b})$ retournant $\mathbf{x}$, solution du système linéaire $\mathbb{L}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure inversible et $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$.

- $\mathbb{B} \leftarrow \mathbf{ADJOINT}(\mathbb{M})$ retournant la matrice adjointe de $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Q. 4

[Algo]

1 PTS

a. Ecrire la fonction **resTS** retournant $\mathbf{x}$, solution de $\mathbb{U}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice triangulaire supérieure inversible et $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$.

0.5 PTS

b. Ecrire la fonction algorithmique **resFactCN** retournant $\mathbf{x}$, solution de $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en utilisant sa factorisation négative de Cholesky.

Q.4
1.50 PTS

Exo. 3
10.25 PTS