Partiel du 15 novembre 2024*

durée : 3h00.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barême est donné à titre indicatif

Dans ce sujet:

- Les trois exercices sont indépendants.
- Les entrées/sorties des fonctions algorithmiques que vous écrirez devront être décrites.
- Le but de toute fonction algorithmique que vous écrirez, et qui n'est pas explicitement demandée, devra être précisé.

Exercice 1 (3.0 points)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note

$$\|\mathbb{A}\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{x}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1}{\|\boldsymbol{x}\|_1} = \sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_1=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1$$

la norme matricielle suboordonnée à la norme vectorielle $\|\bullet\|_1$.

Q. 1

Montrer que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_1=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |A_{i,j}|.$$

R. 1

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{x}\|_1 = 1$. On a

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |(\mathbb{A}\boldsymbol{x})_i| = \sum_{i=1}^{n} \left|\sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{i,j} x_j\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j} x_j| = \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j| \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|\right) \\
&\leqslant \left(\max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|\right) \sum_{j=1}^{n} |x_j| = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}| \quad \text{car } \|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j| = 1.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_1=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|.$$

*Compilé le 2025/02/07 à 08:39:36.

Q. 2

a. *Déterminer un* $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{y}\|_1 = 1$ *tel que*

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_1 = \max_{j \in [\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|.$$

b. *Conclure.*

R. 2

a. Soit $k \in [\![1,n]\!]$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,k}| = \max_{j \in [\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|.$$

On a

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |(\mathbb{A}\boldsymbol{y})_i| = \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{i,j} y_j \Big|.$$

Pour obtenir

$$\sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,k}| = \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{j=1}^{n} \mathrm{A}_{i,j} y_j \Big|$$

on prend $y_j = \delta_{k,j}$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, c'est à dire $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_k$ le $k^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique. Dans ce cas on a $\|\boldsymbol{y}\|_1 = 1$ et

$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}\boldsymbol{y}\|_1 &= \|\mathbb{A}\boldsymbol{e}_k\|_1 = \|\mathbb{A}_{:,k}\|_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,k}| = \max_{j \in [\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|.\end{aligned}$$

b. D'après la proposition/définition des normes matricielles suboordonnées, on a

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \sup_{\substack{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \\ \|\boldsymbol{x}\|_1 = 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{x}\|_1 .$$

En utilisant les résultats de **Q.1** et **Q.2**, on obtient

$$\|\mathbb{A}\|_1 = \max_{j \in [\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_{i,j}|.$$

Q. 3

`[Algo]` *Ecrire une fonction algorithmique, nommée* **`Norm1`**, *calculant* $\|\mathbb{A}\|_1$.

R. 3

Voici une possibilité de fonction:

Algorithme 1 Fonction **Norm1** permettant de calculer $\|\mathbb{A}\|_1$

Données : A : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Résultat : r : le réel $r = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$

Fonction $r \leftarrow$ **Norm1**(A)
  $n \leftarrow$ nb de lignes de A
  $r \leftarrow 0$
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    $S \leftarrow 0$
    Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
      $S \leftarrow S + |\mathrm{A}(i,j)|$
    Fin Pour
    Si $r < S$ **alors**
      $r \leftarrow S$
    Fin Si
  Fin Pour
Fin Fonction

Exercice 2 (7.25 points)

Soient $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Q. 1

[Algo] *Ecrire une fonction algorithmique* **PtFixe** *retournant l'ensemble des itérés x_k, pour $k \in [\![1, k_{\max}]\!]$ où $k_{\max}$ est un entier.*

R. 1

Voici un exemple de fonction

Algorithme 2

Données :
Φ : $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
x_0 : donnée initiale, $x_0 \in \mathbb{R}$,
kmax : nombre d'itérations, kmax $\in \mathbb{N}^*$
Résultat :
$\boldsymbol{X}$: un tableau de kmax + 1 réels tel que $\boldsymbol{X}(k+1) = x_k$, $\forall k \in [\![0, \mathrm{kmax}]\!]$.

Fonction $\boldsymbol{X} \leftarrow$ **PtFixe**(Φ, x_0, kmax)
  $\boldsymbol{X}(1) \leftarrow x_0$
  Pour $k \leftarrow 1$ **à** kmax **faire**
    $\boldsymbol{X}(k+1) \leftarrow \Phi(\boldsymbol{X}(k))$
  Fin Pour
Fin Fonction

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $I =]\alpha_-, \alpha_+[$ un voisinage de α. On suppose que $\phi \in \mathcal{C}^1(I)$ et que α est un point fixe de ϕ vérifiant

$$|\phi'(\alpha)| < 1.$$

Q. 2

a. *Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, $|\phi'(x)| < 1$.*

b. *Montrer que ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$*

c. *Montrer que $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.*

d. *Citer précisément le théorème du cours qui, à partir de Q. 2-**b.** et **c.**, permet de déduire la convergence de l'algorithme du point fixe vers α au moins à l'ordre 1.*

R. 2

a. Puisque ϕ' est continue et que $|\phi'(\alpha)| < 1$, il existe $\delta > 0$ et un intervalle fermé $\mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset]\alpha_-, \alpha_+[$ tels que pour tout $x \in \mathcal{V}$, $|\phi'(x)| < 1$.
On propose ici une démonstration de ce résultat.

- Comme ϕ' est continue en α, on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \beta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ \Big(|x - \alpha| < \beta \Rightarrow\ |\phi'(x) - \phi'(\alpha)| < \varepsilon\Big).$$

On note $M = \phi'(\alpha)$ et on a alors $0 \leqslant |M| = |\phi'(\alpha)| < 1$.
En prenant $\varepsilon = 1 - |M| > 0$, la continuité de ϕ' en α, donne l'existence de $\beta > 0$ tel que

$$\forall x \in I,\ \Big(|x - \alpha| < \beta \Rightarrow\ |\phi'(x) - M| < 1 - |M|\Big).$$

Soit $x \in I$ tel que $|x - \alpha| < \beta$, c'est à dire $x \in]\alpha - \beta, \alpha + \beta[$, alors on a

$$\begin{aligned} |\phi'(x) - M| < 1 - |M| &\Leftrightarrow\ -1 + |M| < \phi'(x) - M < 1 - |M| \\ &\Leftrightarrow\ -1 + M + |M| < \phi'(x) < 1 + M - |M| \end{aligned}$$

Comme $-|M| \leqslant M \leqslant |M|$, on a $M + |M| \geqslant 0$ et $M - |M| \leqslant 0$, ce qui entraine

$$|\phi'(x) - M| < 1 - |M| \Rightarrow\ -1 < \phi'(x) < 1.$$

On a donc,

$$\forall x \in]\alpha - \beta, \alpha + \beta[,\ |\phi'(x)| < 1.$$

En posant $\delta = \beta/2$ (par ex.), on obtient, en définissant $\mathcal{V} = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$,

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad |\Phi'(x)| < 1.$$

□

b. Puisque ϕ' est continue sur $\mathcal{V}$, un intervalle fermé borné, alors ϕ' est borné sur $\mathcal{V}$ et atteint ses bornes sur $\mathcal{V}$. On a donc

$$L = \sup_{x \in \mathcal{V}} |\phi'(x)| = \max_{x \in \mathcal{V}} |\phi'(x)| < 1.$$

Comme $\mathcal{V}$ est fermé, $L < 1$. Soient $(x, y) \in \mathcal{V}^2$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]x, y[\subset \mathcal{V}$ telle que

$$\phi(x) - \phi(y) = \phi'(\xi)(x - y).$$

Puisque $|\phi'(\xi)| \leqslant L$, on obtient

$$\forall (x,y) \in \mathcal{V}^2, |\phi(x) - \phi(y)| \leqslant L|x-y|, \tag{R2.1}$$

ce qui signifie ϕ est contractante sur $\mathcal{V}$.

c. Soit $x \in \mathcal{V}$., en utilisant (R2.1) avec $y = \alpha \in \mathcal{V}$, on obtient

$$|\phi(x) - \alpha| \leqslant L|x-\alpha| < |x-\alpha| \leqslant \delta,$$

et donc $\phi(x) \in \mathcal{V}$. Ainsi on a $\phi(\mathcal{V}) \subset \mathcal{V}$.

d. Voici le théorème du cours:

Théorème : *point fixe dans* $\mathbb{R}$, *application contractante*

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, et Φ une application contractante de I dans lui-même. Alors, il existe un unique point $\alpha \in I$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction** Φ. Pour tout $x_0 \in I$, la suite

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{R2.2}$$

est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.

Soient $x_0 \in \mathcal{V}$ et la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par l'algorithme du point fixe.

Q. 3

Montrer que, si $x_0 \in \mathcal{V}\backslash\{\alpha\}$, alors

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = \phi'(\alpha). \tag{1}$$

R. 3

Avec $x_0 \in \mathcal{V}\backslash\{\alpha\}$, d'après Q. 1, la suite définie par $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ converge vers α à l'ordre 1 au moins.
Comme α est un point fixe de ϕ, i.e. $\alpha = \phi(\alpha)$ et $x_{k+1} = \phi(x_k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, avec $x_0 \neq \alpha$, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq \alpha$. On a donc

$$\frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = \frac{\phi(x_k)-\phi(\alpha)}{x_k-\alpha}.$$

Comme la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers α avec $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq \alpha$ et que ϕ est dérivable en α on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\phi(x_k)-\phi(\alpha)}{x_k-\alpha} = \phi'(\alpha).$$

Q. 4

Supposons maintenant que $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ et que

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \quad \phi^{(i)}(\alpha) = 0.$$

a. *Montrer que la méthode du point fixe est d'ordre $p+1$ au moins.*

b. *Montrer que, si $x_0 \in \mathcal{V}\backslash\{\alpha\}$, alors*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \tag{2}$$

c. *Que peut-on dire sur l'ordre de convergence de la suite si $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$?*

R. 4

a. Comme $\phi'(\alpha) = 0$, alors (en particulier) $|\phi'(\alpha)| < 1$. D'après la question 1, cela signifie que pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par l'agorithme du point fixe (R2.2) converge vers α.
Soit $k \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, il existe $\xi_k \in]\min(\alpha, x_k), \max(\alpha, x_k)[$ tel que

$$x_{k+1} - \alpha = \phi(x_k) - \phi(\alpha) = \sum_{i=1}^{p} \frac{(x_k - \alpha)^i}{i!} \underbrace{\phi^{(i)}(\alpha)}_{=0} + \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!}\phi^{(p+1)}(\xi_k)$$

c'est à dire

$$x_{k+1} - \alpha = \frac{(x_k - \alpha)^{p+1}}{(p+1)!}\phi^{(p+1)}(\xi_k). \tag{R2.3}$$

De plus, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$, $\phi^{(p+1)}$ est continue sur $\mathcal{V}$, un fermé borné et donc

$$\exists C > 0, \text{ tel que } \forall x \in \mathcal{V}, \ |\phi^{(p+1)}(x)| \leqslant C.$$

Comme $\xi_k \in \mathcal{V}$, on déduit de (R2.3) que

$$|x_{k+1} - \alpha| \leqslant \frac{C}{(p+1)!}|x_k - \alpha|^{p+1}$$

et donc la convergence est d'ordre $(p+1)$ au moins.

b. La fonction $\phi^{(p+1)}$ étant continue et $\lim_{k\to+\infty} \xi_k = \alpha$, on a

$$\lim_{k\to+\infty} \phi^{(p+1)}(\xi_k) = \phi^{(p+1)}(\alpha).$$

Comme $x_0 \in \mathcal{V}\backslash\{\alpha\}$, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \neq \alpha$ et donc (R2.3) peut s'écrire

$$\frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\phi^{(p+1)}(\xi_k)}{(p+1)!} \tag{R2.4}$$

En prenant la limite, on obtient

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{1}{(p+1)!}\phi^{(p+1)}(\alpha).$$

c. On rappelle que la suite **converge vers α à l'ordre** $q > 1$ (exactement) si

$$\exists \mu > 0, \ \text{ tel que } \lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^q} = \mu.$$

Or, de (R2.4), on déduit

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^{p+1}} = \frac{|\phi^{(p+1)}(\alpha)|}{(p+1)!} = \mu.$$

Comme par hypothèse $\phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$, on a $\mu > 0$. La convergence est donc exactement d'ordre $(p+1)$.

Application. Soit $\phi(x) = (x-1)^3 + 1$.

Q. 5

a. *Déterminer les points fixes de ϕ.*

b. *Quels sont les points fixes attractifs et répulsifs? Justifier.*

c. *Pour un point attractif, déterminer un intervalle J (le plus grand possible) pour lequel, un théorème* *(à rappeler) permet d'affirmer que, $\forall x_0 \in J$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ce point fixe.*

d. *Quel est l'ordre de convergence exacte? Justifer.*

R. 5

La fonction ϕ étant polynômiale, elle est $\mathcal{C}^\infty$.

a. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tels que $\phi(x) = x$. On a

$$\begin{aligned}\phi(x) = x &\Leftrightarrow (x-1)^3 - (x-1) = 0\\ &\Leftrightarrow (x-1)((x-1)^2 - 1) = 0\\ &\Leftrightarrow (x-1)x(x-2) = 0.\end{aligned}$$

Les points fixes sont donc 0, 1 et 2.

b. On rappelle qu'avec $\phi \in \mathcal{C}^1$, on a

- α est un point fixe attractif de ϕ si $|\phi'(\alpha)| < 1$,
- α est un point fixe répulsif de ϕ si $|\phi'(\alpha)| > 1$.

On a $\phi'(x) = 3(x-1)^2$.

- 0 est un point fixe répulsif de ϕ car $|\phi'(0)| = 3 > 1$,
- 1 est un point fixe attractif de ϕ car $|\phi'(1)| = 0 < 1$,
- 2 est un point fixe répulsif de ϕ car $|\phi'(2)| = 3 > 1$.

c. On rappelle le résultat suivant

Théorème : *point fixe dans* $\mathbb{R}$ *(application* $\mathcal{C}^1$*)*

Soient $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, et $\Phi \in \mathcal{C}^1(J)$ vérifiant $\Phi(J) \subset J$ et

$$\exists L < 1 \text{ tel que } \forall x \in J,\ |\Phi'(x)| \leqslant L, \tag{R2.5}$$

Soit $x_0 \in J$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. On a alors

(a) la fonction Φ admet un unique point fixe $\alpha \in J$,

(b) $\forall k \in \mathbb{N},\ x_k \in J$,

(c) la suite (x_k) converge vers α avec un ordre 1 au moins.

(d) Si $x_0 \neq \alpha$, alors

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \tag{R2.6}$$

et, si $\Phi'(\alpha) \neq 0$, la convergence est d'ordre 1 (exactement).

On va donc déterminer $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, le plus grand possible contenant le point fixe 1, tel que $\Phi(J) \subset J$ et vérifiant (R2.5).

On a $\phi'(x) = 3(x-1)^2$ et les solutions de $\phi'(x) = 1$ sont $a = -\frac{\sqrt{3}}{3} + 1$ et $b = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$.

Soit $J =]a, b[$. On a $1 \in J$ et $\forall x \in J,\ 0 \leqslant \phi'(x) < 1$.

De plus, comme ϕ est croissante ($\phi'(x) \geqslant 0$) et que, $\phi(a) = -\frac{\sqrt{3}}{9} + 1 > a$ et $\phi(b) = \frac{\sqrt{3}}{9} + 1 < b$, on obtient $\phi(J) \subset J$.

Soit $\varepsilon > 0$ (très petit) et $J = [a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset J$. Comme ϕ est croissante, on a $\phi(a+\varepsilon) \geqslant \phi(a) > a$ et $\phi(b-\varepsilon) \leqslant \phi(b) < b$. On en déduit alors $\Phi(J) \subset J$. De plus, ϕ' continue et J fermé borné, ce qui donne

$$\sup_{x\in J} |\phi'(x)| = \max_{x\in J} |\phi'(x)| = |\phi'(a+\varepsilon)| = |\phi'(b-\varepsilon)| = L < 1$$

et donc (R2.5) est vérifiée.

d. on a $\phi'(1) = \phi''(1) = 0$ et $\phi^{(3)}(1) = 6 \neq 0$. La méthode est donc exactement d'ordre 3.

Exercice 3 (10.25 points)

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne définie positive

Q. 1

a. *Démontrer que $\mathbb{A}$ est inversible.*

b. *Montrer que toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont hermitiennes définies positives.*

c. *Ecrire précisément le théorème de factorisation $\mathbb{LU}$. Que peut-on en conclure pour la matrice $\mathbb{A}$?*

R. 1

a. $\mathbb{A}$ inversible est équivalent $\ker \mathbb{A} = \{0\}$.

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, tel que $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = 0$. Montrons que $\boldsymbol{x} = 0$.
Par l'absurde, supposons $\boldsymbol{x} \neq 0$. Comme $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive on a

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$$

ce qui n'est pas possible car $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = 0$, et $\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$.

b. Tout d'abord, comme $\mathbb{A}$ est hermitienne, toutes ses sous-matrices principales sont hermitiennes. On écrit la matrice $\mathbb{A}$ sous la forme de matrices blocs carrés 2×2 dont le premier bloc diagonal est dans $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ et le second dans $\mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C})$.

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \Delta_k & \mathbb{A}_{1,2} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} \end{array}\right).$$

La matrice Δ_k étant hermitienne, il reste à démontrer que,

$$\forall y \in \mathbb{C}^k \backslash \{0\},\ \langle \Delta_k \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle > 0.$$

Soit $y \in \mathbb{C}^k \backslash \{0\}$. On note $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ le vecteur tel que $x_i = y_i$, $\forall i \in [\![1, k]\!]$ et $x_i = 0$, $\forall i \in [\![k+1, n]\!]$. On note que $\boldsymbol{x} \neq 0$ car $\boldsymbol{y} \neq 0$. On a

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \left(\begin{array}{c|c} \Delta_k & \mathbb{A}_{1,2} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{y} \\ \hline \boldsymbol{O}_{n-k} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \Delta_k \boldsymbol{y} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1}\boldsymbol{y} \end{array}\right)$$

et donc

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = \left\langle \left(\begin{array}{c} \Delta_k \boldsymbol{y} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1}\boldsymbol{y} \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{y} \\ \hline \boldsymbol{O}_{n-k} \end{array}\right) \right\rangle = \langle \Delta_k \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle.$$

Comme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$, et $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive, on a $\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$ et donc $\langle \Delta_k \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle > 0$.

c. Voici le théorème:

Théorème : *Factorisation* $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les sous-matrices principales sont inversibles alors il existe

- une unique matrice $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure (*lower triangular* en anglais) à diagonale unité,
- une unique matrice $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure (*upper triangular* en anglais) inversible

telles ques

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}.$$

Comme toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont hermitiennes définies positives, elles sont inversibles et, d'après le théorème, $\mathbb{A}$ admet une unique factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.

On suppose (si besoin) que la matrice $\mathbb{A}$ admet une factorisation $\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ avec $\mathbb{L}$ une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{D}$ une matrice diagonale.

Q. 2

a. *Démontrer que* $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $D_{i,i}$ *est réel strictement positif.*

b. *En déduire qu'il existe une matrice* $\mathbb{B}$ *triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont* ***réels strictement négatifs*** *telle que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*. \tag{1}$$

Cette factorisation est appelée la factorisation négative de Cholesky*.*

c. *Démontrer l'unicité de la* factorisation négative de Cholesky*.*

d. *Soit* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ *donné. Expliquer comment résoudre le système* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *à l'aide de la* factorisation négative de Cholesky*.*

R. 2

a. Comme $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive on a $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$ et

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \backslash \{\boldsymbol{0}\}, \ \langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0.$$

Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \backslash \{\boldsymbol{0}\}$, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle &= \langle \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \\ &= \langle \mathbb{D}\mathbb{L}^*\boldsymbol{x}, \mathbb{L}^*\boldsymbol{x} \rangle \text{,par propriété du produit scalaire.} \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{L}$ est triangulaire inférieure à diagonale unité, elle est inversible et donc $\mathbb{L}^*$ est inversible. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On note $\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{C}^n$, le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et on pose $\boldsymbol{x}_i = (\mathbb{L}^*)^{-1}\boldsymbol{e}_i$ qui est non nul car $\boldsymbol{e}_i \neq \boldsymbol{0}$. On a alors

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i \rangle = \langle \mathbb{D}\mathbb{L}^*\boldsymbol{x}_i, \mathbb{L}^*\boldsymbol{x}_i \rangle = \langle \mathbb{D}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i \rangle = \overline{\mathrm{D}_{i,i}}.$$

Or, comme $\boldsymbol{e}_i$ non nul, on a $\langle \mathbb{A}\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_i \rangle > 0$. On en déduit donc que $\mathbb{D}_{i,i}$ réel strictement positif.

b. Soit $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale définie par

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{H}_{i,i} = -\sqrt{\mathrm{D}_{i,i}}.$$

Les éléments diagonaux de $\mathbb{H}$ sont donc strictement négatif et $\mathbb{D} = \mathbb{H}\mathbb{H} = \mathbb{H}\mathbb{H}^*$.

Comme $\mathbb{A}$ admet une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$, on en déduit que

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{H}\mathbb{H}^*\mathbb{L}^* = \mathbb{L}\mathbb{H}\mathbb{L}\mathbb{H}^*.$$

En posant $\mathbb{B} = \mathbb{L}\mathbb{H}$, on a alors $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$. De plus la matrice $\mathbb{L}$ étant triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{H}$ étant une matrice diagonale, leur produit $\mathbb{B}$ est une matrice triangulaire inférieure et on a

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{B}_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{L}_{i,j}\mathrm{H}_{j,i} = \mathrm{L}_{i,i}\mathrm{H}_{i,i} = \mathrm{H}_{i,i} < 0.$$

c. Montrons qu'une factorisation négative de Cholesky est unique.
Soient $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$ deux factorisations négatives de la matrice $\mathbb{A}$, on a donc

$$\mathbb{A} = \mathbb{B}_1\mathbb{B}_1^* = \mathbb{B}_2\mathbb{B}_2^*.$$

En multipliant à gauche par $\mathbb{B}_2^{-1}$ et à droite par $(\mathbb{B}_1^*)^{-1}$ cette équation on obtient

$$\mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2^*(\mathbb{B}_1^*)^{-1} = \mathbb{B}_2^*(\mathbb{B}_1^{-1})^* = (\mathbb{B}_1^{-1}\mathbb{B}_2)^*$$

En notant $\mathbb{G} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1$, on tire de l'équation précédente

$$\mathbb{G} = (\mathbb{G}^{-1})^*. \tag{R3.7}$$

Or, on a

- (voir Proposition 2.35, page 12) de [?]: l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement négatifs est aussi une matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement négatifs.
- (voir Proposition 2.34, page 11) de [?]: le produit de matrices triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement négatifs reste triangulaire inférieure à coefficients diagonaux réels strictement négatifs.

On en déduit que les matrices $\mathbb{G} = \mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{G}^{-1} = \mathbb{B}_1^{-1}\mathbb{B}_2$ sont triangulaires inférieures à coefficients diagonaux réels strictement négatifs.

De plus l'équation (R3.7) identifie la matrice triangulaire inférieure $\mathbb{G}$ à la matrice triangulaire supérieure $(\mathbb{G}^{-1})^*$: ce sont donc des matrices diagonales à coefficients diagonaux réels strictement négatifs et on en déduit

$$(\mathbb{G}^{-1})^* = \mathbb{G}^{-1}$$

et

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (\mathbb{G}^{-1})_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{G}_{i,i}} < 0.$$

De l'équation (R3.7), on obtient alors $\mathbb{G} = \mathbb{G}^{-1}$ et donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \mathbb{G}_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{G}_{i,i}} < 0.$$

On en déduit alors que $\mathbb{G} = \mathbb{I}$ et donc

$$\mathbb{B}_2^{-1}\mathbb{B}_1 = \mathbb{I}$$

c'est à dire $\mathbb{B}_2^{-1}$ est l'inverse de $\mathbb{B}_1$ qui est unique, donc $\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_2$.

d. Résoudre $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ est équivalent à résoudre $\mathbb{B}\mathbb{B}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. On pose $\boldsymbol{y} = \mathbb{B}^*\boldsymbol{x}$.

- On résoud tout d'abord $\mathbb{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$, système triangulaire inférieur (descente).
- Puis, on résoud $\mathbb{B}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, système triangulaire supérieur (remontée).

Q. 3

a. *Montrer que*

$$B_{i,i} = -\left(A_{i,i} - \sum_{j=1}^{i-1} |B_{i,j}|^2\right)^{1/2}, \quad \forall i \in [\![1,n]\!], \tag{2}$$

b. *Montrer que*

$$B_{j,i} = \frac{1}{B_{i,i}}\left(A_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} B_{j,k}\overline{B_{i,k}}\right), \quad \forall j \in [\![i+1,n]\!] \tag{3}$$

$$B_{j,i} = 0, \quad \forall j \in [\![1,i-1]\!]. \tag{4}$$

c. *Expliquer rapidement comment calculer explicitement la matrice $\mathbb{B}$ à l'aide des formules précédentes.*

d. `[Algo]` *Ecrire la fonction algorithmique* **`FactCN`** *permettant de calculer la matrice $\mathbb{B}$*

R. 3

a. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{i,i} &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{i,k}(\mathbb{B}^*)_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{i,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}} \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{B}_{i,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}} + \mathrm{B}_{i,i}\overline{\mathrm{B}_{i,i}} + \sum_{k=i+1}^{n} \underbrace{\mathrm{B}_{i,k}}_{=0}\overline{\mathrm{B}_{i,k}} \qquad \text{car } \mathbb{B} \text{ triangulaire inf.} \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} |\mathrm{B}_{i,k}|^2 + |\mathrm{B}_{i,i}|^2.
\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{B}_{i,i} \in \mathbb{R}^*_-$, on obtient (2).

b. Soient $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![i+1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{j,i} &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{j,k}(\mathbb{B}^*)_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{j,k}} \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}} + \mathrm{B}_{j,i}\overline{\mathrm{B}_{i,i}} + \sum_{k=i+1}^{n} \underbrace{\mathrm{B}_{j,k}}_{=0}\overline{\mathrm{B}_{i,k}} \qquad \text{car } \mathbb{B} \text{ triangulaire inf.} \\
&= \sum_{k=1}^{i-1} \mathrm{B}_{j,k}\overline{\mathrm{B}_{i,k}} + \mathrm{B}_{j,i}\overline{\mathrm{B}_{i,i}}.
\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{B}_{i,i} \in \mathbb{R}^*$, on obtient (3).
La matrice $\mathbb{B}$ étant triangulaire inférieure, on a $\mathrm{B}_{j,i} = 0$ et on en déduit (4).

c. On va calculer successivement, de 1 à n, les colonnes i de $\mathbb{B}$, en commençant par le calcul de $\mathrm{B}_{i,i}$ donné par (2) puis en calculant les termes $\mathrm{B}_{j,i}$, pour $æ \in [\![i+1,n]\!]$ donné par (3). Les autres termes de la colonnes sont nulles.

d. Voici un exemple de fonction:

Algorithme 3 Fonction **FactCN** permettant de calculer la matrice $\mathbb{B}$, dites matrice de factorisation négative de Cholesky associée à la matrice $\mathbb{A}$, telle que $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$.

Données : A : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive.
Résultat : B : matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure avec $\mathrm{B}(i,i) < 0,\ \forall i \in [\![1,n]\!]$

```
Fonction B ← FactCN( A )
  B ← 0_{n,n}                                   ▷ matrice nulle
  Pour i ← 1 à n faire
    S_1 ← 0
    Pour j ← 1 à i − 1 faire
      S_1 ← S_1 + |B(i,j)|^2
    Fin Pour
    B(i,i) ← −sqrt(A(i,i) − S_1)
    Pour j ← i + 1 à n faire
      S_2 ← 0
      Pour k ← 1 à i − 1 faire
        S_2 ← S_2 + B(j,k) * conj(B(i,k))
      Fin Pour
      B(j,i) ← (A(j,i) − S_2)/B(i,i).
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Fonction
```

On dispose des fonctions :

- $\boldsymbol{x} \leftarrow$ **resTI**$(\mathbb{L}, \boldsymbol{b})$ retournant $\boldsymbol{x}$, solution du système linéaire $\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.
- $\mathbb{B} \leftarrow$ **Adjoint**$(\mathbb{M})$ retournant la matrice adjointe de $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Q. 4

[Algo]

a. *Ecrire la fonction* **resTS** *retournant* $\boldsymbol{x}$, *solution de* $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *où* $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est une matrice triangulaire supérieure inversible et* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.

b. *Ecrire la fonction algorithmique* **resFactCN** *retournant* $\boldsymbol{x}$, *solution de* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *en utilisant sa* factorisation négative de Cholesky.

R. 4

a. La matrice $\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure inversible, ses éléments diagonaux sont donc non nuls.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned} b_i &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{U}_{i,j} x_j \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{\mathrm{U}_{i,j}} = 0 x_i + \mathrm{U}_{i,i} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{U}_{i,j} x_j \qquad \text{car } \mathbb{U} \text{ tri. sup.} \\ &= \mathrm{U}_{i,i} x_i + \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{U}_{i,j} x_j \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{U}_{i,i} \neq 0$, on en déduit

$$x_i = \frac{1}{\mathrm{U}_{i,i}}\big(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{U}_{i,j} x_j\big).$$

Voici un exemple de fonction:

Algorithme 4 Fonction **RESTS** permettant de résoudre le système linéaire triangulaire supérieur inversible

$$\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Données : $\mathbb{U}$: matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ supérieure inversible.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Fonction $\boldsymbol{x} \leftarrow$ **RESTS**($\mathbb{U}, \boldsymbol{b}$)
  Pour $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire**(**pas de** -1)
    $S \leftarrow 0$
    Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**
      $S \leftarrow S + U(i,j) * x(j)$
    Fin Pour
    $x(i) \leftarrow (b(i) - S)/U(i,i)$
  Fin Pour
Fin Fonction

b. Voici un exemple de fonction:

Algorithme 5 Fonction **RESFACTCN** permettant de résoudre, par une factorisation de Cholesky négative, le système linéaire

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

où $\mathbb{A}$ une matrice hermitienne de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie positive et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive,
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$.

Fonction $\boldsymbol{x} \leftarrow$ **RESFACTCN**($\mathbb{A}, \boldsymbol{b}$)
  $\mathbb{B} \leftarrow \mathrm{FactCN}(\mathbb{A})$ ▷ Factorisation négative de Cholesky
  $\boldsymbol{y} \leftarrow \mathrm{resTI}(\mathbb{B}, \boldsymbol{b})$ ▷ Résolution du système $\mathbb{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$
  $\mathbb{U} \leftarrow \mathrm{Adjoint}(\mathbb{B})$ ▷ Calcul de la matrice adjointe de $\mathbb{B}$
  $\boldsymbol{x} \leftarrow \mathrm{resTS}(\mathbb{U}, \boldsymbol{y})$ ▷ Résolution du système $\mathbb{B}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$
Fin Fonction