Sup Galilée **Ing. Macs 1**
Année 2023-2024 **Analyse Numérique I**

Partiel du 10 janvier 2024

durée : 3h00.

Sans documents et sans appareils électroniques

Le barême est donné à titre indicatif

Dans ce sujet :

- Les trois exercices sont indépendants.
- Les entrées/sorties des fonctions algorithmiques que vous écrirez devront être décrites.
- Le but de toute fonction algorithmique que vous écrirez, et qui n'est pas explicitement demandée, devra être précisé.

Exercice 1 (5.5 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ $(n+1)$ triplets de $\mathbb{R}^3$, où les x_i sont des points distincts deux à deux de $\mathbb{R}$. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, noté H_n, associé aux $(n+1)$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est défini par

$$\mathrm{H}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x) \tag{1.1}$$

avec

$$A_i(x) = \big(1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i)\big)L_i^2(x) \quad \text{et} \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \tag{1.2}$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Q. 1 ***a.*** *Quelles sont les propriétés remarquables du polynôme* H_n *?*

b. *Calculer* $L_i'(x)$.

c. *En déduire que*

$$L_i'(x_i) = \sum_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_k}.$$

□

R. 1 **a.** Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, H_n, associé aux $(n+1)$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, est l'unique polynôme de degré au plus $2n+1$, vérifiant

$$\mathrm{H}_n(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad \mathrm{H}_n'(x_i) = z_i, \ \forall i \in [\![0,n]\!]$$

b. On a

$$L_i'(x) = \sum_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_k} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i\\ j\neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

c. On en déduit

$$L_i'(x_i) = \sum_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_k}.$$

Q. 2 [Algo] *Ecrire une fonction algorithmique* `Hermite` *permettant de calculer* $\mathrm{H}_n(t)$ *avec* $t \in \mathbb{R}$. □

R. 2 Voici le descriptif de la fonction :

But : Calculer le polynôme $\mathrm{H}_n(t)$ définit par (1.1)
Données : $\boldsymbol{X}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $X(i) = x_{i-1}$ $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$ et $X(i) \neq X(j)$ pour $i \neq j$,
$\boldsymbol{Y}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Y(i) = y_{i-1}$ $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$,
$\boldsymbol{Z}$: vecteur/tableau de $\mathbb{R}^{n+1}$, $Z(i) = z_{i-1}$ $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$,
t : un réel.
Résultat : pH : le réel $\mathrm{pH} = \mathrm{H}_n(t)$.

La fonction que l'on va écrire use (et certains diront abuse) de fonctions.

Algorithme 1 Fonction `Hermite` permettant de calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite $\mathrm{H}_n(t)$ définit par (1.1)

Fonction $\mathrm{pH} \leftarrow$ `Hermite`(X, Y, Z, t)
  $\mathrm{pH} \leftarrow 0$
  Pour $i \leftarrow 0$ **à** n **faire**
    $\mathrm{pH} \leftarrow \mathrm{pH} + \mathrm{PolyA}(i, X, t) * Y(i+1) + \mathrm{PolyB}(i, X, t) * Z(i+1)$
  Fin Pour
Fin Fonction

Les différentes fonctions utilisées pour la fonction `Hermite` (directement ou indirectement) sont les suivantes :

- `PolyA` **:** calcul du polynôme A_i en t, (données i, X, t)
- `PolyB` **:** calcul du polynôme B_i en t, (données i, X, t)
- `PolyL` **:** calcul du polynôme L_i en t, (données i, X, t)
- `PolyLp` **:** calcul de $L_i'(x_i)$, (données i, X)

Algorithme 2 Fonction `PolyA` permettant de calculer le polynôme A_i en $t \in \mathbb{R}$ donné par $A_i(t) = (1 - 2L_i'(x_i)(t - x_i))L_i^2(t)$

Fonction $y \leftarrow$ `PolyA`($i, \boldsymbol{X}, t$)
  $y \leftarrow (1 - 2 * \mathrm{PolyLp}(i, X) * (t - X(i+1))) * (\mathrm{PolyL}(i, X, t))^2$
Fin Fonction

Algorithme 3 Fonction `PolyB` permettant de calculer le polynôme B_i en $t \in \mathbb{R}$ donné par $B_i(t) = (t - x_i)L_i^2(t)$

Fonction $y \leftarrow$ `PolyB`($i, \boldsymbol{X}, t$)
  $y \leftarrow (t - X(i+1)) * (\mathrm{PolyL}(i, X, t))^2$
Fin Fonction

Algorithme 4 Fonction `PolyL` permettant de calculer le polynôme L_i en $t \in \mathbb{R}$ donné par $L_i(t) = \displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}$

Fonction $y \leftarrow$ `PolyL`($i, \boldsymbol{X}, t$)
  $y \leftarrow 1$
  Pour $j \leftarrow 0$ **à** n, $(j \sim= i)$ **faire**
    $y \leftarrow y * (t - X(j+1))/(X(i+1) - X(j+1))$
  Fin Pour
Fin Fonction

Algorithme 5 Fonction `PolyLp` permettant de calculer $L_i'(x_i) = \displaystyle\sum_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_k}$

Fonction $y \leftarrow$ `PolyLp`($i, \boldsymbol{X}$)
  $y \leftarrow 0$
  Pour $k \leftarrow 0$ **à** n, $(k \sim= i)$ **faire**
    $y \leftarrow y + 1/(X(i+1) - X(k+1))$
  Fin Pour
Fin Fonction

Q. 3 [Algo] *Dans le but de valider/tester la fonction algorithmique* `Hermite`*, proposer un algorithme permettant de vérifier,* ***sans représentation graphique****, que cette fonction a les mêmes propriétés que le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite. On rappelle que, pour* $h \in \mathbb{R}$ *suffisament petit, on a*

$$\mathrm{H}_n'(t) \approx \frac{\mathrm{H}_n(t+h) - \mathrm{H}_n(t)}{h}.$$

□

R. 3 A faire

Exercice 2 (11.5 points)

Soient $f \in \mathcal{C}^4([0,2];\mathbb{R})$ et α, β, γ trois réels. Nous allons étudier la formule de quadrature

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx Q(f) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma f(2) + \beta f(1) + \alpha f(0). \tag{2.1}$$

Q. 1 ***a.*** *Démontrer que la formule de quadrature* (2.1) *est de degré d'exactitude au moins p si et seulement si elle est exacte pour les* $(p+1)$ *fonctions* $x \mapsto x^k$, $k \in [\![0,p]\!]$.

b. *Déterminer* α, β *et* γ *pour que la formule de quadrature soit au moins de degré d'exactitude* 2.

c. *Montrer que cette formule est de degré d'exactitude* 3.

□

R. 1 **a.** $\boxed{\Rightarrow}$ Si la formule de quadrature (2.1) est de degré d'exactitude au moins p alors elle est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à p, or les $(p+1)$ fonctions $x \mapsto x^k$, $k \in [\![0,p]\!]$ sont de degré inférieur ou égal à p.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose la formule de quadrature (2.1) exacte pour les $(p+1)$ fonctions $x \mapsto x^k$, $k \in [\![0,p]\!]$. Soit $P(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k$ un polynôme de degré (au plus) p. Par linéarité de l'intégrale on a

$$\begin{aligned}
\int_0^2 P(x)dx &= \sum_{k=0}^p a_k \int_0^2 x^k dx \\
&= \sum_{k=0}^p a_k Q(x \mapsto x^k) \quad \text{par hypothèse} \\
&= Q(x \mapsto \sum_{k=0}^p a_k x^k) \quad \text{par linéarité de } Q \\
&= Q(P).
\end{aligned}$$

b. La formule de quadrature (2.1) est de degré d'exactitude au moins 2 ssi elle est exacte pour $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$, c'est à dire ssi :

$$\int_0^2 1dx = \alpha + \beta + \gamma, \quad \int_0^2 xdx = \beta + 2\gamma, \quad \int_0^2 x^2dx = \beta + 4\gamma,$$

Ceci correspond alors à la résolution du système linéaire :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \beta + 2\gamma = 2 \\ \beta + 4\gamma = \left(\frac{8}{3}\right) \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution $(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

c. Cette formule est de degré d'exactitude 3 si elle est aussi exacte pour $x \mapsto x^3$ et non exacte pour $x \mapsto x^4$. Avec $f : x \mapsto x^3$ on a

$$\int_0^2 x^3 dx = 4 \quad = \quad \gamma f(2) + \beta f(1) + \alpha f(0) \; = 4$$

Avec $f : x \longrightarrow x^4$ on a

$$\int_0^2 x^4 dx = \frac{32}{5} \quad \neq \quad \gamma f(2) + \beta f(1) + \alpha f(0) \; = \frac{20}{3}$$

Q. 2 ***a.*** *Etablir qu'il existe un unique polynôme* P *de degré* 3 *tel que*

$$\mathrm{P}(0) = f(0), \quad \mathrm{P}(1) = f(1), \quad \mathrm{P}(2) = f(2) \ \textit{et}\ \mathrm{P}'(0) = f'(0). \tag{2.2}$$

b. *Soit $x \in]0,2[$ fixé, avec $x \neq 1$. On considère la fonction $\varphi : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\varphi(t) = (f(t) - \mathrm{P}(t)) - (f(x) - \mathrm{P}(x))\frac{(t-1)(t-2)t^2}{(x-1)(x-2)x^2}, \ \forall t \in [0,2].$$

En quels points s'annule la fonction φ? En déduire, par applications successives du théorème de Rolle, qu'il existe un $\xi_x \in]0,2[$ tel que $\varphi^{(4)}(\xi_x) = 0$.

c. *En déduire que pour tout $x \in [0,2]$, il existe un $\xi_x \in]0,2[$ tel que*

$$f(x) = \mathrm{P}(x) + \frac{(x-1)(x-2)x^2}{4!} f^{(4)}(\xi_x). \tag{2.3}$$

□

R. 2 **a.** Soit $\Phi : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ l'application défine par

$$\forall \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_3[X], \quad \Phi(\mathrm{Q}) = \big(\mathrm{Q}(0), \mathrm{Q}(1), \mathrm{Q}(2), \mathrm{Q}'(0)\big)$$

L'existence et l'unicité du polynôme P est équivalente à la bijectivité de l'application Φ car $\Phi(\mathrm{P}) = \big(f(0), f(1), f(2), f'(0)\big)$. Or celle-ci est une application linéaire entre deux espaces de dimension 4. Elle est donc bijective si et seulement si elle injective (ou surjective). Pour vérifier l'injectivité de Φ il est nécessaire et suffisant de vérifier que son noyau est réduit au polynôme nul.
Soit $\mathrm{Q} \in \ker \Phi$. On a alors $\Phi(\mathrm{Q}) = \mathbf{0}_4$ et donc Q a 3 racines distinctes dont l'une double. Or le seul polynôme de $\mathbb{R}_4[X]$ ayant 3 racines distinctes dont l'une double est le polynôme nul et donc $\mathrm{Q} = 0$.

b. La fonction φ s'annule aux 4 points distincts 0, 1, 2 et x. Par le théorème de Rolle, sa dérivée s'annule en trois points distincts de 0, 1, 2 et x. De plus elle s'annule en 0.
On note $z_1^0 < z_2^0 < z_3^0 < z_4^0$ ces 4 points ordonnés où φ' s'annule.
En appliquant le théorème de Rolle sur chaque intervalle $[z_k^0, z_{k+1}^0]$, $k \in [\![1,3]\!]$, il existe $z_k^1 \in]z_k^0, z_{k+1}^0[$ tels que $\varphi^{(2)}(z_k^1) = 0$. Par construction z_1^1, z_2^1 et z_3^1 sont distincts.
En appliquant le théorème de Rolle sur $[z_1^1, z_2^1]$ et $[z_2^1, z_3^1]$, il existe $z_1^2 \in]z_1^1, z_2^1[$ et $z_2^2 \in]z_2^1, z_3^1[$ tels que $\varphi^{(3)}(z_1^2) = 0$ et $\varphi^{(3)}(z_2^2) = 0$. Par construction ces deux points sont distincts.
Enfin en appliquant le théorème de Rolle sur $[z_1^2, z_2^2]$, il existe $\xi_x \in]z_1^2, z_2^2[\subset]0,2[$ tel que $\varphi^{(4)}(\xi_x) = 0$.

c. Comme P est un polynôme de degré 3, $\mathrm{P}^{(4)} = 0$. De plus la dérivée 4-ème de $t \mapsto (t-1)(t-2)t^2$ vaut 4!. On en déduit, pour $x \in [0;0] \backslash \{0,2,1\}$

$$\varphi^{(4)}(\xi_x) = 0 = f^{(4)}(\xi_x) - (f(x) - P(x))\frac{4!}{(x-1)(x-2)x^2}$$

et donc (2.3) est démontré pour $x \in [0;2] \backslash \{0,2,1\}$.
Si $x \in \{0,2,1\}$ alors (2.3) est immédiat.

Q. 3 *Soit* P *défini par* (2.2)

a. *Montrer (sans calcul) que*

$$\int_0^2 \mathrm{P}(x)dx = \gamma f(2) + \beta f(1) + \alpha f(0).$$

b. *En déduire qu'il existe une constante M dépendant de $f^{(4)}$ telle que*

$$\left| \int_0^2 f(x)dx - (\gamma f(2) + \beta f(1) + \alpha f(0)) \right| \leqslant \frac{1}{90} M. \tag{2.4}$$

□

R. 3 **a.** Comme P est de degré 3, la formule de quadrature (2.1) est exacte pour P et donc

$$\int_0^2 \mathrm{P}(x)dx = Q(\mathrm{P}) = \alpha\mathrm{P}(0) + \beta\mathrm{P}(1) + \gamma\mathrm{P}(2).$$

En utilisant (2.2) on obtient

$$\int_0^2 \mathrm{P}(x)dx = \alpha f(0) + \beta f(1) + \gamma f(2).$$

b. On déduit de (2.3)

$$\left|\int_0^2 \big(f(x) - \mathrm{P}(x)\big)dx\right| = \left|\int_0^2 \frac{(x-1)(x-2)x^2}{4!} f^{(4)}(\xi_x)dx\right|.$$

En notant $M = \sup_{x\in[0,2]} |f^{(4)}(x)| < +\infty$ (car fonction continue sur un fermé borné), on obtient

$$\left|\int_0^2 \big(f(x) - \mathrm{P}(x)\big)dx\right| \leqslant M \left|\int_0^2 \frac{(x-1)(x-2)x^2}{4!} dx\right|$$

Or

$$\int_0^2 (x-1)(x-2)x^2 dx = -\frac{4}{15}$$

et donc

$$\left|\int_0^2 \big(f(x) - \mathrm{P}(x)\big)dx\right| \leqslant \frac{1}{90} M.$$

Q. 4 *Soient $c \in \mathbb{R}$, $h > 0$ et $g \in \mathcal{C}^4([c, c+h]; \mathbb{R})$.*

a. *Par un changement de variable, déduire de* (2.1) *une formule de quadrature pour le calcul approché de $\int_c^{c+h} g(t)dt$.*

b. *En utilisant* (2.4), *montrer que l'erreur de quadrature est majorée par $\frac{\mathcal{M}}{C} h^5$ où $\mathcal{M} = \sup_{t\in[c,c+h]} |g^{(4)}(t)|$ et $C > 0$.*

□

R. 4 **a.** On utilise un changement de variable pour transformer l'intervalle $[c, c+h]$ en $[0, 2]$. Ce changement de variable est $t = r(x) = \frac{h}{2}x + c - (0)\frac{h}{2}$ avec $r'(x) = \frac{h}{2}$ ce qui donne

$$\int_c^{c+h} g(t)dt = \frac{h}{2} \int_0^2 g \circ r(x)dx.$$

La formule de quadrature est donc

$$\int_c^{c+h} g(x)dx \approx \frac{h}{2} Q(g \circ r) = \frac{h}{2}\big(\alpha g \circ r(0) + \beta g \circ r(1) + \gamma g \circ r(2)\big)$$

ce qui donne

$$\int_c^{c+h} g(t)dx \approx Q_h(g) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h}{2} Q(g \circ r) = \frac{1}{2} h \left(\frac{1}{3} g\,(c+h) + \frac{4}{3} g\left(c + \frac{1}{2} h\right) + \frac{1}{3} g\,(c)\right)$$

b. On a

$$\left|\int_c^{c+h} g(t)dt - Q_h(g)\right| = \frac{h}{2} \left|\int_0^2 g \circ r(x)dx - Q(g \circ r)\right|$$

La fonction $u \stackrel{\text{def}}{=} g \circ r$ est dans $\mathcal{C}^4([0, 2]; \mathbb{R})$ et $u^{(4)}(x) = \left(\frac{h}{2}\right)^4 g^{(4)}(r(x))$. D'après (2.4), on a

$$\left|\int_0^2 u(x)dx - Q(u)\right| \leqslant \frac{1}{90} \sup_{x\in[0,2]} |u^{(4)}(x)| = \frac{1}{90} \left(\frac{h}{2}\right)^4 \sup_{t\in[c,c+h]} |g^{(4)}(t)|.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\left|\int_c^{c+h} g(t)dt - Q_h(g)\right| &\leqslant \frac{h}{2}\frac{1}{90}\left(\frac{h}{2}\right)^4 \sup_{t\in[c,c+h]} |g^{(4)}(t)| \\ &\leqslant \frac{1}{2880}\, h^5 \sup_{t\in[c,c+h]} |g^{(4)}(t)|.\end{aligned}$$

Q. 5 *Soient $(x_k)_{k=0}^n$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$ et $w \in \mathcal{C}^4([a, b]; \mathbb{R})$.*

a. *A partir de (2.1), expliciter la formule* ***composite*** *associée permettant d'approcher $\int_a^b w(s)ds$ en utilisant la discrétisation $(x_k)_{k=0}^n$.*

b. *En utilisant les résultats de la question 4, montrer que l'erreur de quadrature de la formule composite est majorée par $D(b-a)h^4$ où $D = \frac{1}{C}\sup_{x\in[a,b]} |w^{(4)}(x)|$.*

□

R. 5 **a.** On a

$$\int_a^b w(s)ds = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} w(s)ds,$$

et d'après la question précédente (avec $c = x_k$ et $x_{k+1} = x_k + h$)

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} w(s)ds \approx \frac{h}{6}\big(w(x_k) + 4w(x_k + \frac{h}{2}) + w(x_{k+1})\big).$$

Ainsi on obtient la formule de quadrature composée

$$\int_a^b w(s)ds \approx Q_h^n(w) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1} \big(w(x_k) + 4w(x_k + \frac{h}{2}) + w(x_{k+1})\big).$$

b. On a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b v(w)ds - Q_h^n(w)\right| &\leqslant \frac{1}{2880}\, h^5 \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{t\in[x_k,x_{k+1}]} |w^{(4)}(t)| \\ &\leqslant \frac{1}{2880}\, h^5 \sup_{s\in[a,b]} |w^{(4)}(s)| \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\ &\leqslant \frac{1}{2880}\, h^5 \sup_{s\in[a,b]} |w^{(4)}(s)| n.\end{aligned}$$

Or $nh = (b-a)$, ce qui donne

$$\left|\int_a^b w(s)ds - Q_h^n(w)\right| \leqslant \frac{1}{2880}\, h^4(b-a) \sup_{s\in[a,b]} |w^{(4)}(s)|.$$

Exercice 3 (11.5 points)

Definition (uniquement pour l'exercice!). *Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $u_i \neq 0$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$. On dit que $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une* ***factorisation*** $\mathbb{W}\mathbb{U}$ ***paramétrée par*** $\boldsymbol{u}$ *si il existe $\mathbb{W} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$* ***triangulaire inférieure inversible*** *et $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$* ***triangulaire supérieure de diagonale*** $\boldsymbol{u}$ *(i.e. $U_{i,i} = u_i$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$) telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{W}\mathbb{U}.$$

Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $u_i \neq 0$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$.
On note $\mathbb{A} = (A_{i,j})_{i,j=1}^n$, $\mathbb{W} = (W_{i,j})_{i,j=1}^n$ et $\mathbb{U} = (U_{i,j})_{i,j=1}^n$ les composantes de ces matrices.

Q. 1 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ paramétrée par $\boldsymbol{u}$.*

a. *Rappeler la définition des sous-matrices principales de $\mathbb{A}$.*

b. *Démontrer que toutes les sous-matrices principales de $\mathbb{A}$ sont inversibles. Indication : on pourra utiliser une décomposition par blocs des matrices.*

c. *Démontrer que la factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ paramétrée par $\boldsymbol{u}$ est unique.*

d. *Soit $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ donné. Expliquer comment résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ à l'aide de la factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ paramétrée par $\boldsymbol{u}$.*

□

R. 1 **a.** Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On appelle sous-matrice principale d'ordre k de $\mathbb{A}$, la matrice $\Delta_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ telle que

$$(\Delta_k)_{i,j} = A_{i,j}, \ \forall (i,j) \in [\![1,k]\!].$$

b. Comme la matrice $\mathbb{W}$ est triangulaire inférieure inversible, on a $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $W_{i,i} \neq 0$. Comme la matrice $\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure de diagonale $\boldsymbol{u}$, on a $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $U_{i,i} = u_i \neq 0$, et on en déduit que $\mathbb{U}$ est inversible.
La sous-matrice principale d'ordre n de $\mathbb{A}$, est $\mathbb{A}$ qui est inversible par hypothèse.
Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$. Montrons que la sous-matrice principale d'ordre k de $\mathbb{A}$, est inversible.
On écrit les trois matrices $\mathbb{A}$, $\mathbb{W}$ et $\mathbb{U}$ sous la forme de matrices blocs carrés 2×2 dont le premier bloc diagonal est dans $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ et le second dans $\mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C})$. Comme $\mathbb{W}$ est triangulaire inférieure et $\mathbb{U}$ triangulaire supérieure, on a

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{A}_{1,2} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} \end{array}\right), \quad \mathbb{W} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{W}_{1,1} & \mathbb{O}_{k,n-k} \\ \hline \mathbb{W}_{2,1} & \mathbb{W}_{2,2} \end{array}\right) \ \text{ et } \mathbb{U} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}_{1,1} & \mathbb{U}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O}_{n-k,k} & \mathbb{U}_{2,2} \end{array}\right).$$

On a alors $\mathbb{W}_{1,1} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure avec tous ses éléments diagonaux non nuls puisque $(\mathbb{W}_{1,1})_{i,i} = W_{i,i} \neq$. $\mathbb{W}_{1,1}$ est donc inversible. De plus, $\mathbb{U}_{1,1} \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure avec $\left(\mathbb{U}_{1,1}\right)_{i,i} = u_i \neq 0$, $\forall i \in [\![1,n-k]\!]$, et donc $\mathbb{U}_{1,1}$ est inversible. On a

$$\mathbb{A} = \mathbb{W}\mathbb{U} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{A}_{1,2} \\ \hline \mathbb{A}_{2,1} & \mathbb{A}_{2,2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{W}_{1,1} & \mathbb{O}_{k,n-k} \\ \hline \mathbb{W}_{2,1} & \mathbb{W}_{2,2} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U}_{1,1} & \mathbb{U}_{1,2} \\ \hline \mathbb{O}_{n-k,k} & \mathbb{U}_{2,2} \end{array}\right).$$

En effectuant le produit matricielle bloc, 1ère ligne bloc par 1ère colonne bloc, on obtient

$$\mathbb{A}_{1,1} = \mathbb{W}_{1,1}\mathbb{U}_{1,1} + \mathbb{O}_{k,n-k}\mathbb{O}_{n-k,k} = \mathbb{W}_{1,1}\mathbb{U}_{1,1}.$$

On a donc, par propriété du déterminant,

$$\det\left(\mathbb{A}_{1,1}\right) = \det\left(\mathbb{W}_{1,1}\mathbb{U}_{1,1}\right) = \det\left(\mathbb{W}_{1,1}\right)\det\left(\mathbb{U}_{1,1}\right).$$

Comme $\mathbb{W}_{1,1}$ et $\mathbb{U}_{1,1}$ sont inversibles, leurs déterminants sont non nuls. On en déduit que $\det\left(\mathbb{A}_{1,1}\right) \neq 0$, c'est à dire $\mathbb{A}_{1,1}$ inversible, or par définition, $\mathbb{A}_{1,1} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ est la sous matrice principale d'ordre k de $\mathbb{A}$.

c. Soient $\mathbb{W}_1\mathbb{U}_1$ et $\mathbb{W}_2\mathbb{U}_2$ deux factorisations $\mathbb{W}\mathbb{U}$ de $\mathbb{A}$. avec $\mathbb{W}_1$, $\mathbb{W}_2$ triangulaires inférieures inversibles et $\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2$ triangulaires supérieures de diagonale $\boldsymbol{u}$ (donc inversibles). Les matrices ${\mathbb{W}_1}^{-1}$ et ${\mathbb{W}_2}^{-1}$ sont donc triangulaires inférieures et les matrices ${\mathbb{U}_1}^{-1}$ et ${\mathbb{U}_2}^{-1}$ sont donc triangulaires supérieures de diagonale $(u_1^{-1}, \ldots, u_n^{-1})$ puisque pour $k \in \{1,2\}$, on

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \left({\mathbb{U}_k}^{-1}\right)_{i,i} = \frac{1}{\left(\mathbb{U}_k\right)_{i,i}} = \frac{1}{u_i}.$$

On a

$$\mathbb{A} = \mathbb{W}_1\mathbb{U}_1 = \mathbb{W}_2\mathbb{U}_2$$

et en multipliant à droite par ${\mathbb{U}_2}^{-1}$ et à gauche par ${\mathbb{W}_1}^{-1}$ on obtient

$$\mathbb{U}_1{\mathbb{U}_2}^{-1} = {\mathbb{W}_1}^{-1}\mathbb{W}_2. \tag{3.1}$$

La matrice ${\mathbb{W}_1}^{-1}\mathbb{W}_2$ est triangulaire inférieure car produit de deux matrices triangulaires inférieures. La matrice $\mathbb{U}_1{\mathbb{U}_2}^{-1}$ est triangulaire supérieure car produit de deux matrices triangulaires supérieures. Comme ces deux matrices sont égales, on en déduit On déduit de (3.1), que les matrices ${\mathbb{W}_1}^{-1}\mathbb{W}_2$ et $\mathbb{U}_1{\mathbb{U}_2}^{-1}$ sont diagonales. Or on a

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \left(\mathbb{U}_1{\mathbb{U}_2}^{-1}\right)_{i,i} = \left(\mathbb{U}_1\right)_{i,i}\left({\mathbb{U}_2}^{-1}\right)_{i,i} = u_i\frac{1}{u_i} = 1$$

ce qui donne

$$\mathbb{U}_1{\mathbb{U}_2}^{-1} = \mathbb{I} = {\mathbb{W}_1}^{-1}\mathbb{W}_2$$

et donc $\mathbb{U}_1 = \mathbb{U}_2$ et $\mathbb{W}_1 = \mathbb{W}_2$.

d. Comme $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ paramétrée par $\boldsymbol{u}$, résoudre le système $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ revient alors à résoudre

$$\mathbb{W}\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

On pose $\boldsymbol{y} = \mathbb{U}\boldsymbol{x}$, et on résoud tout à bord

$$\mathbb{W}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}.$$

puis, une fois le vecteur $\boldsymbol{y}$ déterminé, on résoud

$$\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}.$$

Q. 2 *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ paramétrée par $\boldsymbol{u}$. Expliquer de manière détaillée une méthodologie pour calculer les coefficients des matrices $\mathbb{W}$ et $\mathbb{U}$. On explicitera les formules utilisées.* □

R. 2

$$\mathbb{A} = \mathbb{W}\mathbb{U} \tag{3.2}$$

c'est à dire

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ W_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ W_{n,1} & \dots & W_{n,n-1} & W_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n & U_{1,2} & \dots & U_{n,1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & U_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & u_n \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Etape 1 : • La 1ère colonne de $\mathbb{U}$ est connue, on peut alors calculer la 1ère colonne de $\mathbb{W}$.
• La 1ère ligne de $\mathbb{W}$ est connue, puisque l'on vient de calculer (entre autres) $W_{1,1}$. On peut déterminer la 1ère ligne de $\mathbb{U}$.

Etape 2 : • La 2ème colonne de $\mathbb{U}$ est connue, on peut alors, connaissant la 1ère colonne de $\mathbb{W}$, calculer la 2ème colonne de $\mathbb{W}$.
• La 2ème ligne de $\mathbb{W}$ est maintenant connue. On peut déterminer, la 2ème ligne de $\mathbb{U}$ puisque l'on connait sa 1ère ligne.

⋮

Etape i : on suppose connue les $(i-1)$ premières colonnes de $\mathbb{W}$ et les $(i-1)$ premières lignes de $\mathbb{U}$.

- La $i^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbb{U}$ est connue puisque $U_{i,i} = 1$. On peut calculer la $i^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbb{W}$. En effet, soit $j \in [\![i, n]\!]$, on a

$$a_{j,i} = \sum_{k=1}^{n} W_{j,k} U_{k,i} = \sum_{k=1}^{i-1} W_{j,k} U_{k,i} + W_{j,i} U_{i,i} + \sum_{k=i+1}^{n} W_{j,k} U_{k,i}.$$

  Or, $\mathbb{U}$ est triangulaire supérieure, donc $U_{k,i} = 0$, $\forall k > i$. De plus $U_{i,i} = u_i$, on obtient donc

$$a_{j,i} = \sum_{k=1}^{i-1} W_{j,k} U_{k,i} + u_i W_{j,i}.$$

  Dans la somme, par hypothèse, $W_{j,k}$ et $U_{k,i}$ sont connus car $k \in [\![1, i-1]\!]$. On obtient alors

$$\forall j \in [\![i, n]\!],\ W_{j,i} = \frac{1}{u_i}\left(a_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} W_{j,k} U_{k,i}\right). \tag{3.4}$$

- La $i^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbb{W}$ est maintenant connue puisque l'on vient de calculer (entre autres) $W_{i,i}$. On peut alors calculer la $i^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbb{U}$. En effet, soit $j \in [\![i+1, n]\!]$, on a

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} W_{i,k} U_{k,j} = \sum_{k=1}^{i-1} W_{i,k} U_{k,j} + W_{i,i} U_{i,j} + \sum_{k=i+1}^{n} W_{i,k} U_{k,j}.$$

  Or, $\mathbb{W}$ est triangulaire inférieure, donc $W_{i,k} = 0$, $\forall k > i$. On obtient donc

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-1} W_{i,k} U_{k,j} + W_{i,i} U_{i,j}.$$

  Dans la somme, par hypothèse, $W_{i,k}$ et $U_{k,j}$ sont connus car $k \in [\![1, i-1]\!]$. On obtient alors

$$\forall j \in [\![i+1, n]\!],\ U_{i,j} = \frac{1}{W_{i,i}}\left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} W_{i,k} U_{k,j}\right). \tag{3.5}$$

  et $W_{i,i} \neq 0$ car sinon la factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ de $\mathbb{A}$ ne serait pas possible.

Pour résumer, on va calculer sucessivement, pour i allant de 1 à n

- la $i^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbb{W}$:

$$\left\{\begin{array}{lcll} W_{j,i} & = & 0, & \forall j \in [\![1, i-1]\!], \\ W_{j,i} & = & \frac{1}{u_i}\left(a_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} W_{j,k} U_{k,i}\right), & \forall j \in [\![i, n]\!], \end{array}\right. \tag{3.6}$$

- la $i^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbb{U}$:

$$\left\{\begin{array}{lcll} U_{i,j} & = & 0, & \forall j \in [\![1, i-1]\!], \\ U_{i,i} & = & u_i, & \\ U_{i,j} & = & \frac{1}{W_{i,i}}\left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} W_{i,k} U_{k,j}\right), & \forall j \in [\![i+1, n]\!], \end{array}\right. \tag{3.7}$$

Q. 3 [Algo] *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *admettant une factorisation* $\mathbb{W}\mathbb{U}$ *paramétrée par* $\boldsymbol{u}$.

a. *Ecrire la fonction* ResTriSup *retournant* $\boldsymbol{x}$, *solution de* $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *où* $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est une matrice triangulaire supérieure inversible et* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$.

b. *Ecrire la fonction algorithmique* FactWU *retournant les matrices* $\mathbb{W}$ *et* $\mathbb{U}$.

c. *On suppose la fonction* ResTriInf *retournant* $\boldsymbol{x}$, *solution de* $\mathbb{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *avec* $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *triangulaire inférieure inversible, déjà écrite. Ecrire la fonction algorithmique* ResWU *retournant* $\boldsymbol{x}$, *solution de* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *en utilisant sa factorisation* $\mathbb{W}\mathbb{U}$ *paramétrée par* $\boldsymbol{u}$.

□

R. 3 **a.** Soit $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire inversible et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$. Pour résoudre le système $\mathbb{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, on utilise l'algorithme de remontée :
pour i allant de n à 1 (pas de -1) faire

$$x_i = \big(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} U_{i,j} x_j\big)/U_{i,i}.$$

Données : $\mathbb{U}$: matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ supérieure inversible.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$.

Fonction $\boldsymbol{x} \leftarrow$ `ResTriSup`($\mathbb{U}, \boldsymbol{b}$)
  Pour $i \leftarrow n$ **à** 1 **faire(pas de** -1)
    $S \leftarrow 0$
    Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire**
      $S \leftarrow S + U(i,j) * x(j)$
    Fin Pour
    $x(i) \leftarrow (b(i) - S)/U(i,i)$
  Fin Pour
Fin Fonction

b. Voici l'algorithme final :

Données : $\boldsymbol{u}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$ dont toutes les composantes sont non nulles.
$\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{W}\mathbb{U}$ paramétrée par $\boldsymbol{u}$.
Résultat : $\mathbb{U}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure
avec $U_{i,i} = u_i, \ \forall i \in [\![1, n]\!]$
$\mathbb{W}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure.

Fonction $[\mathbb{W}, \mathbb{U}] \leftarrow$ `FactWU`($\mathbb{A}, \boldsymbol{u}$)
  $\mathbb{W} \leftarrow \mathbb{O}_n$ ▷ $\mathbb{O}_n$ matrice nulle $n \times n$
  $\mathbb{U} \leftarrow \mathbb{O}_n$
  Pour $i \leftarrow 1$ **à** n **faire**
    $U(i,i) \leftarrow \boldsymbol{u}(i)$
    Pour $j \leftarrow i$ **à** n **faire** ▷ Calcul de la colonne i de $\mathbb{W}$
      $S_1 \leftarrow 0$
      Pour $k \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
        $S_1 \leftarrow S_1 + W(j,k) * U(k,i)$
      Fin Pour
      $W(j,i) \leftarrow (A(j,i) - S_1)/U(i,i)$
    Fin Pour
    Pour $j \leftarrow i+1$ **à** n **faire** ▷ Calcul de la ligne i de $\mathbb{U}$
      $S_2 \leftarrow 0$
      Pour $k \leftarrow 1$ **à** $i-1$ **faire**
        $S_2 \leftarrow S_2 + W(i,k) * U(k,j)$
      Fin Pour
      $U(i,j) \leftarrow (A_{i,j} - S_2)/W(i,i)$.
    Fin Pour
  Fin Pour
Fin Fonction

c. On utilise la **Q.1**-d.

Voici la fonction `ResWU` permettant de résoudre, par une factorisation $\mathbb{WU}$ paramétrée par $\boldsymbol{u}$, le système linéaire $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Données : $\boldsymbol{u}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$ dont toutes les composantes sont non nulles.
$\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une factorisation $\mathbb{WU}$ paramétrée par $\boldsymbol{u}$.
$\boldsymbol{b}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$.
Résultat : $\boldsymbol{x}$: vecteur de $\mathbb{C}^n$.

```
Fonction x ← ResWU( A, b, u )
  [W, U] ← FactWU(A, u)          ▷ Factorisation WU paramétrée par u
  y ← ResTriInf(W, b)            ▷ Résolution du système Wy = b
  x ← ResTriSup(U, y)            ▷ Résolution du système Ux = y
Fin Fonction
```

Q. 4 *Nous allons démontrer par récurrence sur l'ordre $n \geqslant 2$ des matrices que si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice dont toutes les sous-matrices principales sont inversibles, alors elle admet une factorisation $\mathbb{WU}$ paramétrée par $\boldsymbol{u}$.*

- ***a.*** *Ecrire proprement la proposition $(\mathcal{P}_n)$ à démontrer par récurrence.*
- ***b.*** ***Initialisation :*** *montrer que $(\mathcal{P}_2)$ est vraie.*
- ***c.*** ***Hérédité :*** *en supposant que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie montrer que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vérifiée (on pourra utiliser une décomposition bloc)*
- ***d.*** *Conclure*

□

R. 4 **a.** Soit $n \geqslant 2$.

$(\mathcal{P}_n)$ Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $u_i \neq 0$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$. Si une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a toutes ses sous-matrices principales inversibles alors il existe une matrice $\mathbb{W} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure inversible et une matrice $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure de diagonale $\boldsymbol{u}$ telles ques $\mathbb{A} = \mathbb{WU}$.

b. Initialisation. Avec $n = 2$, nous allons regarder si il possible de déterminer les coefficients de $\mathbb{W}$ et de $\mathbb{U}$ pour avoir $\mathbb{A} = \mathbb{WU}$, c'est à dire

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{1,1} & 0 \\ W_{2,1} & W_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & U_{1,2} \\ 0 & u_2 \end{pmatrix}.$$

Ceci revient donc à déterminer,en fonction des coefficients de $\mathbb{A}$ et de $\boldsymbol{u}$, les composantes $W_{1,1}$, $W_{2,1}$, $W_{2,2}$ et $U_{1,2}$ solutions de :

$$\begin{cases} W_{1,1}u_1 & = & A_{1,1} \\ W_{2,1}u_1 & = & A_{2,1} \\ W_{1,1}U_{1,2} & = & A_{1,2} \\ W_{2,1}U_{1,2} + W_{2,2}u_2 & = & A_{2,2} \end{cases}$$

Comme $u_1 \neq 0$, on a $W_{1,1} = A_{1,1}/u_1$ et $W_{2,1} = A_{2,1}/u_1$. De plus, par hypothèse, la sous-matrice principale de $\mathbb{A}$ d'ordre 1, c'est à dire $A_{1,1}$, est inversible et donc $A_{1,1} \neq 0$. On obtient alors $W_{1,1} \neq 0$ et

$$W_{1,1}U_{1,2} = A_{1,2} \Leftrightarrow U_{1,2} = u_1 A_{1,2}/A_{1,1}.$$

De la dernière equation, on obtient

$$\begin{aligned} W_{2,1}U_{1,2} + W_{2,2}u_2 = A_{2,2} &\Leftrightarrow \frac{A_{2,1}}{u_1}\frac{u_1 A_{1,2}}{A_{1,1}} + W_{2,2}u_2 = A_{2,2} \\ &\Leftrightarrow W_{2,2} = \frac{1}{u_2}\frac{A_{1,1}A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,2}}{A_{1,1}} \end{aligned}$$

Au final, on a

$$\left\{\begin{array}{lcl} W_{1,1} & = & A_{1,1}/u_1 \neq 0 \\ W_{2,1} & = & A_{2,1}/u_1 \\ U_{1,2} & = & u_1 A_{1,2}/A_{1,1} \\ W_{2,2} & = & \frac{1}{u_2}\frac{A_{1,1}A_{2,2}-A_{2,1}A_{1,2}}{A_{1,1}}. \end{array}\right.$$

Il reste à démontrer que la matrice $\mathbb{W}$ est inversible. On a $\det \mathbb{W} = W_{1,1}W_{2,2}$ et $W_{1,1} \neq 0$. Par hypothèse, la sous-matrice principale de $\mathbb{A}$ d'ordre 2, c'est à dire elle même, est inversible et donc $\det(\mathbb{A}) = A_{1,1}A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,2} \neq 0$. On obtient donc $W_{2,2} \neq 0$. La matrice $\mathbb{W}$ est donc inversible et $(\mathcal{P}_2)$ est vérifiée.

c. Hérédité. Soit $n \geqslant 2$. On suppose que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. On va démontrer que $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vérifiée. Soient $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $u_i \neq 0$, $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ dont toutes ses sous-matrices principales inversibles. On peut la décomposer sous la forme bloc suivante

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c} \mathbb{B} & \boldsymbol{f} \\ \hdashline \boldsymbol{e}^* & d \end{array}\right)$$

où

— $\mathbb{B}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{B}_{i,j} = \mathrm{A}_{i,j}$, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

— $\boldsymbol{f}$ est le vecteur de $\mathbb{C}^n$ tel que $f_i = \mathrm{A}_{i,n+1}$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$,

— $\boldsymbol{e}$ est le vecteur de $\mathbb{C}^n$ tel que $e_i = \overline{\mathrm{A}_{n+1,i}}$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$

— $d \in \mathbb{C}$ est le scalaire $d = \mathrm{A}_{n+1,n+1}$.

On note $\underline{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{C}^n$, tel que $\underline{u}_i = u_i \neq 0$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$. Comme les sous-matrices principales de $\mathbb{B}$ sont les n premières sous-matrices principales de $\mathbb{A}$, elles sont donc inversibles. Par hypothèse de récurrence, il existe une matrice $\underline{\mathbb{W}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure inversible et une matrice $\underline{\mathbb{U}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure de diagonale $\underline{\boldsymbol{u}}$ telles ques

$$\mathbb{B} = \underline{\mathbb{W}}\,\underline{\mathbb{U}}.$$

On va construire des matrices $\mathbb{W}$ et $\mathbb{U}$ vérifiant la propriété. Soient $\mathbb{W} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ décomposées sous la forme bloc

$$\mathbb{W} = \left(\begin{array}{c:c} \underline{\mathbb{W}} & \boldsymbol{0} \\ \hdashline \boldsymbol{g}^* & \alpha \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{U} = \left(\begin{array}{c:c} \underline{\mathbb{U}} & \boldsymbol{h} \\ \hdashline \boldsymbol{0}^* & u_{n+1} \end{array}\right)$$

où $\boldsymbol{g} \in \mathbb{C}^n$, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{C}^n$ and $\alpha \in \mathbb{C}$. Les deux matrices sont blocs compatibles pour la multiplication et on a alors

$$\mathbb{W}\mathbb{U} = \left(\begin{array}{c:c} \underline{\mathbb{W}} & \boldsymbol{0} \\ \hdashline \boldsymbol{g}^* & \alpha \end{array}\right)\left(\begin{array}{c:c} \underline{\mathbb{U}} & \boldsymbol{h} \\ \hdashline \boldsymbol{0}^* & u_{n+1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} \underline{\mathbb{W}}\,\underline{\mathbb{U}} & \underline{\mathbb{W}}\boldsymbol{h} \\ \hdashline \boldsymbol{g}^*\underline{\mathbb{U}} & \boldsymbol{g}^*\boldsymbol{h} + \alpha u_{n+1} \end{array}\right)$$

Comme $\mathbb{B} = \underline{\mathbb{W}}\,\underline{\mathbb{U}}$, on va identifier bloc par bloc les matrices $\mathbb{W}\mathbb{U}$ et $\mathbb{A}$, puis vérifier que le système est resolvable. On obtient donc par identification le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \underline{\mathbb{W}}\boldsymbol{h} & = & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g}^*\underline{\mathbb{U}} & = & \boldsymbol{e}^* \\ \boldsymbol{g}^*\boldsymbol{h} + \alpha u_{n+1} & = & d \end{array}\right.$$

Par hypothèse de récurrence $\underline{\mathbb{W}}$ est triangulaire inférieure inversible et $\underline{\mathbb{U}}$ triangulaire superieure de diagonale $\boldsymbol{u}$ (donc inversible et $u_{n+1} \neq 0$) : le système précédent admet donc comme solution

$$\left\{\begin{array}{lcl} \boldsymbol{h} & = & \underline{\mathbb{W}}^{-1}\boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & = & \underline{\mathbb{U}}^{*-1}\boldsymbol{e} \\ \alpha & = & \frac{1}{u_{n+1}}(d - \boldsymbol{g}^*\boldsymbol{h}) \end{array}\right.$$

On a donc construit une matrice $\mathbb{W}$ triangulaire inférieure et une matrice $\mathbb{U}$ triangulaire superieure de diagonale $\boldsymbol{u}$ telles que $\mathbb{A} = \mathbb{W}\mathbb{U}$.

Il reste à démontrer que $\mathbb{W}$ est inversible. Comme la matrice $\mathbb{A}$ est inversible, on en déduit que

$$\det \mathbb{A} = \det(\mathbb{W}\mathbb{U}) = \det \mathbb{W} \times \det \mathbb{U} \neq 0$$

On obtient alors $\det \mathbb{W} \neq 0$ ce qui entraine l'inversibilité de la matrice $\mathbb{W}$. La proposition $(\mathcal{P}_{n+1})$ est donc vérifiée

d. Conclusion. On a démontré par récurrence que la proposition $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.
