Ing. MACS 1 **2024-2025**

***Analyse Numérique I : Rappels**[*]*

1 Analyse

1.1 En vrac

Théorème 1.1 (Théorème de Rolle)**.** *Soient a, b deux réels, $a < b$, et, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que*
- *f est continue sur $[a,b]$,*
- *f est dérivable sur $]a,b[$,*
- *$f(a) = f(b)$.*

Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 1.2 (Théorème de Bolzano ou des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Si $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas de même signe (i.e. $f(a)f(b) < 0$) alors il existe au moins $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Théorème 1.3 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soient a et b deux réels, $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Alors il existe $\xi \in]a,b[$ tel que*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Proposition 1.4 (Formule de Taylor-Lagrange d'ordre n)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$ dont la dérivée n-ième est dérivable sur $]a,b[$. Alors*
- *pour tout x, y dans $[a,b]$, $x \neq y$, il existe $\xi \in]\min(x,y), \max(x,y)[$ tel que*

$$f(x) = f(y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k)}(y) + \frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{1}$$

- *$\forall t \in [a,b]$, $\forall h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $(t+h) \in [a,b]$, il existe $\xi \in]\min(t,t+h), \max(t,t+h)[$ tel quel*

$$f(t+h) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(t) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{2}$$

Définition 1.5. *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est **dominée** par g au voisinage de a, si, au voisinage de a, il existe une fonction θ bornée telle que $f = \theta g$. Dans ce cas, on dit aussi que f **se comporte comme un grand O de** g au voisinage de a et on note alors $f \overset{a}{=} \mathcal{O}(g)$.*

Définition 1.6. *Soit f une fonction définie au voisinage de 0. On dit que $f(h)$ **se comporte comme un grand O de** h^p (au voisinage de 0) si f est dominée par $h \mapsto h^p$ au voisinage de 0 et on note alors $f(h) = \mathcal{O}(h^p)$.*

*. auteur : F. Cuvelier. Compilé le 24 octobre 2024 à 12 h 48.

Proposition 1.7 (Formule de Taylor-Landau d'ordre n)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, alors $\forall t \in [a,b]$, $\forall h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $(t+h) \in [a,b]$, il existe $\xi \in]\min(t,t+h), \max(t,t+h)[$ tel quel*

$$f(t+h) = f(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(t) + \mathcal{O}(h^{n+1}) \tag{3}$$

Corollaire 1.8 (Théorème de la bijection)**.** *Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a,b]$ et à valeurs réelles, alors elle constitue une bijection entre $[a,b]$ et l'intervalle fermé dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$.*

Proposition 1.9. *Soit f est une fonction bijective continue d'un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ sur un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$. Si f est dérivable en $\alpha \in I$ et que $f'(\alpha) \neq 0$ alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $\beta = f(\alpha) \in J$ et*

$$(f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)} \quad \textit{ou encore} \quad (f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\beta))}$$

1.2 Espace métrique [†]

Définition 1.10 (Distance sur un ensemble)**.** *On appelle **distance** sur un ensemble E, une application d de E^2 dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in E^3$ on a*
- *symétrie : $\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \mathrm{d}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$,*
- *séparation : $\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,*
- *inégalité triangulaire : $\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leqslant \mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \mathrm{d}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$*

Voici quelques exemples de distances :
- $\mathrm{d}(x,y) = |x - y|$ dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$
- $\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ dans $\mathbb{R}^n$, où $\|.\|$ est l'une quelconque des normes habituelles.

Définition 1.11 (Espace métrique)**.** *Un ensemble E muni d'une distance d est appelé **espace métrique** et on le note (E, d).*

Soient (E, d) un espace métrique, $\boldsymbol{a} \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$. On appelle
- **boule ouverte** de centre $\boldsymbol{a}$ et de rayon r l'ensemble

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{a}, r) = \{\boldsymbol{x} \in E;\ \mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < r\},$$

- **boule fermée** de centre $\boldsymbol{a}$ et de rayon r l'ensemble

$$\overline{\mathcal{B}(\boldsymbol{a}, r)} = \{\boldsymbol{x} \in E;\ \mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) \leqslant r\},$$

- **sphere** de centre $\boldsymbol{a}$ et de rayon r l'ensemble

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{a}, r) = \{\boldsymbol{x} \in E;\ \mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = r\},$$

Une partie $A \subset E$ est dites **bornée** si

$$\exists \boldsymbol{x} \in E,\ \exists R \in \mathbb{R}_+^*,\quad A \subset \mathcal{B}(\boldsymbol{x}, R).$$

†. En grande partie extrait du site bibmat

1.2.1 Suites

Définition 1.12 (Suite convergente)**.** *Soient (E, d) un **espace métrique** et $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que la suite $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ converge si*

$$\exists \boldsymbol{\alpha} \in E,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall k > N, \quad \mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha}) < \epsilon. \tag{4}$$

Dans ce cas on dit que la suite $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\boldsymbol{\alpha} \in E$.

Une suite qui ne converge vers aucun $\boldsymbol{\alpha} \in E$ est dites **divergente** et vérifie

$$\forall \boldsymbol{\alpha} \in E,\ \exists \epsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists k > N, \quad \mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha}) \geqslant \epsilon.$$

Si la suite $(\boldsymbol{u}^{[k]})$ de E converge vers α (nécessairement unique dans E) alors on dit que $\boldsymbol{\alpha}$ est la **limite** de $(\boldsymbol{u}^{[k]})$ et on note

$$\lim_{k\to+\infty} \boldsymbol{u}^{[k]} = \boldsymbol{\alpha} \ \text{ ou } \ \boldsymbol{u}^{[k]} \underset{k\to+\infty}{=} \boldsymbol{\alpha}.$$

1.2.2 Ouverts et fermés

Soit (E, d) un espace métrique.
Soient $\boldsymbol{x} \in E$ et $V \subset E$. On dit que V est un **voisinage** de $\boldsymbol{x}$ s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathcal{B}(\boldsymbol{x}, r) \subset V$.
On dit que $U \subset E$ est un **ouvert** de E si elle est voisinage de tous ses points :

$$\forall \boldsymbol{x} \in U,\ \exists r \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathcal{B}(\boldsymbol{x}, r) \subset U \tag{5}$$

Proposition 1.13.
- *E et $\varnothing$ sont des ouverts,*
- *une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert,*
- *une intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

On dit que $U \subset E$ est un **fermé** de E si son complémentaire est un ouvert de E.

Proposition 1.14.
- *E et $\varnothing$ sont des fermés,*
- *une réunion finie de fermés est un fermé,*
- *une intersection quelconque de fermés est un fermé.*

Soit $A \subset E$.
- On dit que $\boldsymbol{x} \in E$ est un **point intérieur** de A si
$$\exists r \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathcal{B}(\boldsymbol{x}, r) \subset A.$$
On appelle **intérieur de** A et on note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs de A.
L'ensemble $\mathring{A}$ est un ouvert : c'est le plus grand ouvert contenu dans A.
- On dit que $\boldsymbol{x} \in E$ est un **point adhérent** à A si
$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ \mathcal{B}(\boldsymbol{x}, t) \cap A \neq \varnothing.$$
On appelle **adhérence de** A et on note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents de A. L'ensemble $\overline{A}$ est un fermé : c'est le plus petit fermé contenant A.

Théorème 1.15. *Soient $A \subset E$ et $\boldsymbol{x} \in E$.*
- *$\boldsymbol{x} \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite $(\boldsymbol{u}^{[k]})$ de A qui converge vers $\boldsymbol{x}$.*
- *A est fermé si et seulement si, pour toute suite $(\boldsymbol{u}^{[k]})$ de A qui converge vers $\boldsymbol{\alpha} \in E$, alors $\boldsymbol{\alpha} \in A$.*

Définition 1.16. *Une partie $K \subset E$ est dites **compacte** si, de toute suite $(\boldsymbol{u}^{[k]})$ de K, on peut extraire une sous-suite convergente vers un élement de K.*

- toute réunion finie de compacts est compacte,
- toute intersection quelconque de compacts est compacte,
- toute partie compacte de E est fermée et bornée.

1.2.3 Limites et continuité

Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction. Soit $\boldsymbol{\alpha} \in E$. on dit que f **admet une limite** en $\boldsymbol{\alpha}$ si

$$\exists \boldsymbol{\beta} \in F,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in E,\ \Big(\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) < \delta \ \Rightarrow\ \mathrm{d}(f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\beta}) < \varepsilon\Big) \tag{6}$$

Cette limite, si elle existe, est nécessairement unique, égale à $\boldsymbol{\beta}$, et on note alors

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\alpha}} f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\beta} \ \text{ ou } \ f(\boldsymbol{x}) \underset{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\alpha}}{\longrightarrow} \boldsymbol{\beta}.$$

Proposition 1.17. *f admet une limite $\boldsymbol{\beta}$ en $\boldsymbol{\alpha}$ si et seulement si pour toute suite $\boldsymbol{u}^{[k]}$ de E qui converge vers $\boldsymbol{\alpha}$, alors la suite $f(\boldsymbol{u}^{[k]})$ de F converge vers $\boldsymbol{\beta}$.*

Définition 1.18. *Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction.*
- *f est **continue en** $\boldsymbol{\alpha} \in E$ si f admet une limite en $\boldsymbol{\alpha}$ (nécessairement égale à $f(\boldsymbol{\alpha})$) ou encore*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall \boldsymbol{x} \in E,\ \Big(\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\alpha}) < \delta \ \Rightarrow\ \mathrm{d}(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{\alpha})) < \varepsilon\Big). \tag{7}$$
- *f est **continue sur** $A \subset E$ si elle est continue en chaque point de A.*

Théorème 1.19. *Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction.*
f est continue en $\boldsymbol{\alpha} \in E$ si et seulement si, pour toute suite $\boldsymbol{u}^{[k]}$ de E qui converge vers $\boldsymbol{\alpha}$, alors la suite $f(\boldsymbol{u}^{[k]})$ de F converge vers $f(\boldsymbol{\alpha})$.

Théorème 1.20. *Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
- *f est continue sur E,*
- *L'image réciproque d'un ouvert de F par f est un ouvert de E,*
- *L'image réciproque d'un fermé de F par f est un fermé de E.*

Définition 1.21. *Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction.*
*On dit que f est **Uniformément continue** sur $A \subset E$ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in A^2,\ \Big(\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \delta \ \Rightarrow\ \mathrm{d}(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) < \varepsilon\Big).$$

Définition 1.22. *Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction.*
- *On dit que f est **Lipschitzienne** de rapport $K \in \mathbb{R}_+$ ou K-**lipschitzienne** sur $A \subset E$ si*
$$\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in A^2,\ \mathrm{d}(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) \leqslant K\, \mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$
- *On dit que f est **contractante** sur $A \subset E$ si elle est **lipschitzienne** de rapport $K \in [0, 1[$ sur $A \subset E$.*

- Toute application lipschitzienne est uniformément continue.
- Toute application uniformément continue est continue.

Les réciproques sont fausses.

Théorème 1.23. *Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, K un compact de E, et $f : K \longrightarrow F$. Si f est continue sur K alors $f(K)$ est un compact de F.*

Théorème 1.24 (Théorème de Heine)**.** *Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.*

1.2.4 Suites de Cauchy

Définition 1.25 (Suite de Cauchy)**.** *Soit (E, d) un **espace métrique**. Une suite $(\boldsymbol{x}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est dites **de Cauchy** si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \textit{tel que } \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p,q \geqslant M,\quad \mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{[p]}, \boldsymbol{x}^{[q]}) < \epsilon.$$

ce qui correspond à

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{p,q\geqslant m} \mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{[p]}, \boldsymbol{x}^{[q]}) = 0.$$

Une autre manière de l'écrire est

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \textit{tel que } \forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant M,\ \forall l \in \mathbb{N},\quad \mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{[k+l]}, \boldsymbol{x}^{[k]}) < \epsilon.$$

ce qui correspond à

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{k\geqslant m, l\geqslant 0} \mathrm{d}(\boldsymbol{x}^{[k+l]}, \boldsymbol{x}^{[k]}) = 0.$$

Définition 1.26 (Espace métrique complet)**.** *Un espace metrique est dit **complet** si toute suite de Cauchy converge.*

Proposition 1.27. *Si E est un espace vectoriel normé de norme $\|.\|$ alors E est un espace métrique pour la distance d issue de sa norme et définie par $\mathrm{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$, $\forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E^2$.*

Définition 1.28 (Espace de Banach)**.** *On appelle **espace de Banach** un espace vectoriel normé complet pour la distance issue de sa norme.*

Par exemple, les espaces vectoriels normés $(\mathbb{R}, |\bullet|)$, $(\mathbb{C}, |\bullet|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\bullet\|)$, $(\mathbb{C}^n, \|\bullet\|)$ sont des espaces de Banach. Plus généralement, un espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

1.2.5 Ordre de convergence

Définition 1.29 (Ordre de convergence)**.** *Soient (E, d) un **espace métrique** et $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E **convergeant vers** $\boldsymbol{\alpha} \in E$ avec, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u}^{[k]} \neq \alpha$.*
*Soit $p \in [1, +\infty[$. On dit que cette suite **converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ avec un ordre** p **au moins** si*

$$\exists C > 0,\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\quad \textit{tels que}\ \ \forall k \geqslant k_0,\quad \mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k+1]}, \boldsymbol{\alpha}) \leqslant C\,\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha})^p. \tag{8}$$

où $C < 1$ si $p = 1$.
*On dit que cette suite **converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ avec un ordre** p (exactement) si elle converge à l'ordre p au moins et si*

$$\forall \varepsilon > 0,\quad \lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k+1]}, \boldsymbol{\alpha})}{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha})^{p+\varepsilon}} = +\infty. \tag{9}$$

Soient (E, d) un **espace métrique** et $(\boldsymbol{u}^{[k]})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E **convergeant** vers $\boldsymbol{\alpha} \in E$ avec, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u}^{[k]} \neq \alpha$.
Soit $p \in [1, +\infty[$.
La suite **converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ à l'ordre** 1 (exactement) si

$$\exists \mu \in]0,1[,\quad \text{tel que}\ \lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k+1]}, \boldsymbol{\alpha})}{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha})} = \mu. \tag{10}$$

Dans ce cas la convergence est dite **linéaire**.

- Si (10) est vérifiée pour $\mu = 0$, alors la convergence est dites **super-linéaire** .
- Si (10) n'est vérifiée pour aucun $\mu \in]0,1[$, alors la convergence est dites **sous-linéaire**.

La suite **converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ à l'ordre** $p > 1$ (exactement) si

$$\exists \mu > 0,\quad \text{tel que}\ \lim_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k+1]}, \boldsymbol{\alpha})}{\mathrm{d}(\boldsymbol{u}^{[k]}, \boldsymbol{\alpha})^p} = \mu. \tag{11}$$

et dans ce cas la convergence est **super-linéaire**.
La convergence d'ordre 2 (resp. 3) est dite **quadratique** (resp. **cubique**).

2 Algèbre linéaire

Soit V un **espace vectoriel** de dimension finie n, sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, ou sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Notons plus généralement $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Vecteurs

Une **base** de V est un ensemble $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ de n **vecteurs linéairement indépendants**. Le vecteur $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{e}_i$ sera représenté par le **vecteur colonne**

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

et on désignera par $\boldsymbol{v}^{\mathsf{t}}$ et $\boldsymbol{v}^*$ les **vecteurs lignes** suivants

$$\boldsymbol{v}^{\mathsf{t}} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}^* = \begin{pmatrix} \overline{v_1} & \overline{v_2} & \cdots & \overline{v_n} \end{pmatrix}$$

où $\overline{\alpha}$ est le nombre **complexe conjugué** du nombre α.

Définition 2.1. — *Le vecteur ligne $\boldsymbol{v}^{\mathsf{t}}$ est le **vecteur transposé** du vecteur colonne $\boldsymbol{v}$.*
— *Le vecteur ligne $\boldsymbol{v}^*$ est le **vecteur adjoint** du vecteur colonne $\boldsymbol{v}$.*

Définition 2.2. *L'application $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ définie pour tout $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ par*

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u}^{\mathsf{t}}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{\mathsf{t}}.\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i,\quad \textit{si}\ \ \mathbb{K} = \mathbb{R} \tag{12}$$

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u}^*.\boldsymbol{v} = \overline{\boldsymbol{v}^*.\boldsymbol{u}} = \overline{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle} = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} v_i,\quad \textit{si}\ \ \mathbb{K} = \mathbb{C} \tag{13}$$

*est appelée **produit scalaire** euclidien si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitien[a] si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour rappeler la dimension de l'espace, on écrit*

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle_n .$$

a. La convention choisie pour le produit scalaire hermitien étant ici : linéarité à droite et semi-linéarité à gauche. Il est aussi possible de définir le produit scalaire hermitien par le complexe conjugué de (13) :

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{v}^*.\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}.$$

Dans ce cas le produit scalaire est une forme sesquilinéaire à droite.

Définition 2.3. *Soit V est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*
- *Deux **vecteurs $\boldsymbol{u}$** et **$\boldsymbol{v}$** sont **Orthogonaux** si $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$.*
- *Un **vecteur $\boldsymbol{v}$** est **orthogonal à une partie** U de V si*

$$\forall \boldsymbol{u} \in U,\ \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = 0.$$

On note $\boldsymbol{v} \perp U$.
- *Un ensemble de vecteurs $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ de l'espace V est dit **orthonormal** si*

$$\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j\rangle = \delta_{i,j},\ \forall (i,j) \in [\![1,k]\!]^2$$

*où δ_{ij} est le **symbole de Kronecker** : $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j. \end{cases}$*

Définition 2.4. *Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ est représenté par $\mathbf{0}_n$ ou $\mathbf{0}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.*

Définition 2.5. *Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$ non nul. On définit l'**opérateur de projection** sur $\boldsymbol{u}$ par*

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{v}) = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle}{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle}\boldsymbol{u} = \frac{1}{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}\rangle}\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*\boldsymbol{v},\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n. \tag{14}$$

La matrice $\mathbb{P}_{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*$ s'appelle la matrice de la projection orthogonale suivant le vecteur $\boldsymbol{u}$.

Proposition 2.6. *Le **procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt** est un algorithme permettant de construire une famille orthonormée à partir d'une famille libre $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i\in[\![1,p]\!]}$ de $\mathbb{K}^n$. On construit successivement les vecteurs $\boldsymbol{u}_i$*

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\quad \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}_k}(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{v}_i\rangle}{\langle \boldsymbol{u}_k, \boldsymbol{u}_k\rangle}\boldsymbol{u}_k.$$

*La famille $\{\boldsymbol{u}_i\}_{i\in[\![1,p]\!]}$ est alors une **famille orthogonale** de $\mathbb{K}^n$ et*

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\quad \operatorname{Vect}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_i) = \operatorname{Vect}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i).$$

*Pour construire une **famille orthonormée** $\{z_i\}_{i\in[\![1,p]\!]}$, il suffit de normaliser les vecteurs de la famille orthogonale :*

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\quad \boldsymbol{z}_i = \frac{\boldsymbol{u}_i}{\langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i\rangle^{1/2}}.$$

2.2 Matrices

2.2.1 Généralités

Une matrice à m lignes et n colonnes est appelée *matrice de type* (m,n), et on note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, ou simplement $\mathcal{M}_{m,n}$, l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ formé par les matrices de type (m,n) à éléments dans $\mathbb{K}$.

Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ d'éléments $\mathrm{A}_{ij} \in \mathbb{K}$ est notée

$$\mathbb{A} = (\mathrm{A}_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n},$$

le premier indice i correspond aux lignes et le second j aux colonnes. On désigne par $(\mathbb{A})_{ij}$ l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne. On peut aussi le noter $\mathrm{A}_{i,j}$.

Définition 2.7. *La matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est représentée par $\mathbb{O}_{m,n}$ ou $\mathbb{O}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité. Si $m = n$ on peut aussi noter $\mathbb{O}_n$ cette matrice.*

Définition 2.8.
- *Soit une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, on note $\mathbb{A}^* \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ la **matrice adjointe** de la matrice $\mathbb{A}$, définie de façon unique par*

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle_m = \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}^*\boldsymbol{v}\rangle_n,\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^m$$

qui entraine $(\mathbb{A}^*)_{ij} = \overline{\mathrm{A}_{ji}}$.
- *Soit une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on note $\mathbb{A}^t \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ la **matrice transposée** de la matrice $\mathbb{A}$, définie de façon unique par*

$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle_m = \langle \boldsymbol{u}, \mathbb{A}^t\boldsymbol{v}\rangle_n,\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n,\ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$$

qui entraine $(\mathbb{A}^t)_{ij} = \mathrm{A}_{ji}$.

Définition 2.9. *Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, le **produit**$\mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est défini par*

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!],\quad (\mathbb{A}\mathbb{B})_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{A}_{ik}B_{kj}. \tag{15}$$

Proposition 2.10. *Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, alors*

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^t = \mathbb{B}^t\mathbb{A}^t,\quad si\ \mathbb{K} = \mathbb{R}, \tag{16}$$
$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^* = \mathbb{B}^*\mathbb{A}^*,\quad si\ \mathbb{K} = \mathbb{C} \tag{17}$$

Note. *Les matrices considérées jusqu'à la fin de ce paragraphe sont carrées.*

Définition 2.11. *Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors les éléments $\mathrm{A}_{ii} = (\mathbb{A})_{ii}$ sont appelés **éléments diagonaux** et les éléments $\mathrm{A}_{ii} = (\mathbb{A})_{ij}, i \neq j$ sont appelés **éléments hors-diagonaux**.*

Définition 2.12. *On appelle **matrice identitée** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont les éléments diagonaux sont tous égals à 1 et les éléments hors-diagonaux nulles. On la note $\mathbb{I}$ ou encore $\mathbb{I}_n$ et on a*

$$(\mathbb{I})_{i,j} = \delta_{ij},\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2.$$

Définition 2.13. *Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** ou **régulière** s'il existe une matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant*

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I} \tag{18}$$

*Dans le cas contraire, on dit que la matrice $\mathbb{A}$ est **singulière** ou **non inversible**.*

Définition 2.14. *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. On note $\mathbb{A}^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'unique matrice vérifiant*

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}. \tag{19}$$

*Cette matrice est appelée **matrice inverse** de $\mathbb{A}$.*

Définition 2.15. *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$*
- *On note $\ker(\mathbb{A}) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\ ;\ \mathbb{A}\boldsymbol{v} = 0\}$ le **noyau** de $\mathbb{A}$.*
- *On note $\operatorname{im}(\mathbb{A}) = \{\mathbb{A}\boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^m\ ;\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\}$ l'**image** de $\mathbb{A}$.*
- *On note $\operatorname{rank}(\mathbb{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\operatorname{im}(\mathbb{A}))$ le **rang** de $\mathbb{A}$.*

Théorème 2.16 (théorème du rang)**.** *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$*. On a*

$$\mathrm{rank}(\mathbb{A}) + \dim(\ker(\mathbb{A})) = n$$

Proposition 2.17. *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. $\mathbb{A}$ *est inversible,*
2. $\mathrm{rank}(\mathbb{A}) = n$,
3. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n,\ \mathbb{A}\boldsymbol{x} = 0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{x} = 0$, *(i.e.* $\ker \mathbb{A} = \{0\}$*)*
4. $\det(\mathbb{A}) \neq 0$,
5. *toutes les valeurs propres de* $\mathbb{A}$ *sont non nulles,*
6. *il existe* $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *tel que* $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}$*,*
7. *il existe* $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *tel que* $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$*.*

Proposition 2.18. *Soient* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *inversibles. On a alors* $\mathbb{A}\mathbb{B}$ *inversible et*

$$\left(\mathbb{A}^t\right)^{-1} = \left(\mathbb{A}^{-1}\right)^t, \quad si\ \mathbb{K} = \mathbb{R}, \tag{20}$$

$$\left(\mathbb{A}^*\right)^{-1} = \left(\mathbb{A}^{-1}\right)^*, \quad si\ \mathbb{K} = \mathbb{C}. \tag{21}$$

$$\left(\mathbb{A}\mathbb{B}\right)^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1} \tag{22}$$

$$\left(\mathbb{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbb{A} \tag{23}$$

Définition 2.19. *Une matrice* ***carrée*** $\mathbb{A}$ *est :*

- ◇ ***symétrique*** *si* $\mathbb{A}$ *est réelle et* $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t$*,*
- ◇ ***hermitienne*** *si* $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$*,*
- ◇ ***normale*** *si* $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$*,*
- ◇ ***orthogonale*** *si* $\mathbb{A}$ *est réelle et* $\mathbb{A}\mathbb{A}^t = \mathbb{A}^t\mathbb{A} = \mathbb{I}$*,*
- ◇ ***unitaire*** *si* $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A} = \mathbb{I}$*,*

Proposition 2.20.
- *une matrice symétrique ou hermitienne est nécessairement normale.*
- *une matrice orthogonale (resp. unitaire) est nécessairement normale et inversible d'inverse* $\mathbb{A}^t$ *(resp.* $\mathbb{A}^*$*).*

Définition 2.21. *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *une matrice* ***hermitienne****.*

- ◇ *Elle est* ***définie positive*** *si*
$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle > 0,\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\} \tag{24}$$
- ◇ *Elle est* ***semi définie positive*** *si*
$$\langle \mathbb{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \geqslant 0,\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\} \tag{25}$$

Définition 2.22. *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. La trace d'une matrice carrée* $\mathbb{A} = (a_{ij})$ *est définie par*

$$\mathrm{tr}\,(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Définition 2.23. *Soit* $\mathcal{T}_n$ *le* ***groupe des permutations*** *de l'ensemble* $\{1, 2, \ldots, n\}$*. A tout élément* $\sigma \in \mathcal{T}_n$*, on associe la* ***matrice de permutation*** *de* $\mathbb{P}_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est définie par*

$$(\mathbb{P}_\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}.$$

On peut noter qu'une matrice de permutation est orthogonale.

Définition 2.24. *Soient* $\mathbb{A} = (A_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\mathcal{T}_n$ *le* ***groupe des permutations*** *de l'ensemble* $\{1, 2, \ldots, n\}$*.. Le* ***déterminant*** *d'une matrice* $\mathbb{A}$ *est défini par*

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{T}_n} \varepsilon_\sigma \prod_{j=1}^{n} A_{\sigma(j),j}$$

où ε_σ *désigne la signature de la permutation* σ*.*

Proposition 2.25 (Méthode de Laplace ou des coffacteurs)**.** *Soit* $\mathbb{A} = (A_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On note* $\mathbb{A}^{[i,j]} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ *la matrice obtenue en supprimant la ligne* i *et la colonne* j *de* $\mathbb{A}$*. On a alors le* ***développement par rapport à la ligne*** $i \in [\![1, n]\!]$

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{i,j} \det\left(\mathbb{A}^{[i,j]}\right), \tag{26}$$

et le ***développement par rapport à la colonne*** $j \in [\![1, n]\!]$

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{i,j} \det\left(\mathbb{A}^{[i,j]}\right). \tag{27}$$

Le terme $(-1)^{i+j} \det\left(\mathbb{A}^{[i,j]}\right)$ *est appellé le* ***cofacteur*** *du terme* $A_{i,j}$*.*

Définition 2.26. *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On dit que* $\lambda \in \mathbb{C}$ *est* ***valeur propre*** *de* $\mathbb{A}$ *s'il existe* $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ ***non nul*** *tel que*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}. \tag{28}$$

Le vecteur $\boldsymbol{u}$ *est appelé* ***vecteur propre*** *associé à la valeur propre* λ*.*
Le couple $(\lambda, \boldsymbol{u})$ *est appelé* ***élément propre*** *de* $\mathbb{A}$*.*

Définition 2.27. *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$ *une valeur propre de* $\mathbb{A}$*. Le sous-espace*

$$E_\lambda = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n : \mathbb{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}\} = \ker(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) \tag{29}$$

est appelé ***sous-espace propre*** *associé à la valeur propre* λ*. La dimension de* E_λ *est appelée* ***multiplicité géométrique*** *de la valeur propre* λ*.*

Définition 2.28. *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Le polynôme de degré* n *défini par*

$$\mathcal{P}_{\mathbb{A}}(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) \tag{30}$$

est appellé ***polynôme caractéristique*** *de la matrice* $\mathbb{A}$*.*

Proposition 2.29. *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- *Les racines complexes du polynôme caractéristique* $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ *sont les valeurs propres de la matrice* $\mathbb{A}$.
- *Si la racine* λ *de* $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ *est de multiplicité* k*, on dit que la valeur propre* λ *est de* ***Multiplicité algébrique*** k.
- *La matrice* $\mathbb{A}$ *possède* n *valeurs propres distinctes ou non.*

Définition 2.30. *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On note* $\lambda_i(\mathbb{A})$, $i \in [\![1,n]\!]$, *les* n *valeurs propres de* $\mathbb{A}$. *Le* ***spectre*** *de la matrice* $\mathbb{A}$ *est le sous-ensemble*

$$\mathrm{Sp}(\mathbb{A}) = \bigcup_{i=1}^{n} \{\lambda_i(\mathbb{A})\} \tag{31}$$

du plan complexe.

Proposition 2.31. *Soient* $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{B}$ *deux matrices de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On a les relations suivantes*

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathbb{A}) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbb{A}), & (32)\\
\det(\mathbb{A}) &= \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(\mathbb{A}), & (33)\\
\mathrm{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) &= \mathrm{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A}), & (34)\\
\mathrm{tr}(\mathbb{A}+\mathbb{B}) &= \mathrm{tr}\,A + \mathrm{tr}\,B, & (35)\\
\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) &= \det(\mathbb{A})\det(\mathbb{B}) = \det(\mathbb{B}\mathbb{A}), & (36)\\
\det(\mathbb{A}^*) &= \overline{\det(\mathbb{A})}. & (37)
\end{aligned}$$

Définition 2.32. *Le* ***rayon spectral*** *d'une matrice* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est le nombre* $\geqslant 0$ *défini par*

$$\rho(\mathbb{A}) = \max\{|\lambda_i(\mathbb{A})|\,;\, i \in [\![1,n]\!]\}$$

2.2.2 Matrices particulières

Définition 2.33. *Une matrice carrée* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est :*

- ***diagonale*** *si* $a_{ij} = 0$ *pour* $i \neq j$,
- ***triangulaire supérieure*** *si* $a_{ij} = 0$ *pour* $i > j$,
- ***triangulaire inférieure*** *si* $a_{ij} = 0$ *pour* $i < j$,
- ***triangulaire*** *si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure*
- ***à diagonale dominante*** *si*
$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \ \forall i \in [\![1,n]\!], \tag{38}$$
- ***à diagonale strictement dominante*** *si*
$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \ \forall i \in [\![1,n]\!]. \tag{39}$$

Proposition 2.34. *Soient* $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{B}$ *deux matrices de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *triangulaires inférieures (resp. triangulaires supérieures). Alors la matrice* $\mathbb{A}\mathbb{B}$ *est aussi triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).*
De plus on a

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}, \ \forall i \in [\![1,n]\!].$$

Proposition 2.35. *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).*

1. $\mathbb{A}$ *est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls (i.e.* $A_{i,i} \neq 0$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$*).*
2. *Si* $\mathbb{A}$ *est inversible alors son inverse est triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure) et*

$$(\mathbb{A}^{-1})_{i,i} = \frac{1}{(\mathbb{A})_{i,i}}$$

Définition 2.36. *On appelle* ***matrice bande*** *une matrice* $\mathbb{A}$ *telle que* $a_{ij} \neq 0$ *pour* $|j-i| \leqslant c$. c *est la* ***demi largeur de bande****.*
Lorsque $c = 1$*, la matrice est dite* ***tridiagonale*** *. Lorsque* $c = 2$*, la matrice est dite* ***pentadiagonale*** *.*

Définition 2.37. *On appelle* ***sous-matrice*** *d'une matrice donnée, la matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes. En particulier, si on supprime les* $(n-k)$ *dernières lignes et colonnes d'une matrice carrée* $\mathbb{A}$ *d'ordre* n*, on obtient la* ***sous matrice principale*** *d'ordre* k.

Définition 2.38. *On appelle* ***matrice bloc*** *une matrice* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N,M}(\mathbb{K})$ *écrite sous la forme*

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,q} \\ \hdashline \vdots & & \vdots \\ \hdashline \mathbb{A}_{p,1} & \cdots & \mathbb{A}_{p,q} \end{array}\right)$$

où $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall j \in [\![1,q]\!]$, $\mathbb{A}_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,m_j}(\mathbb{K})$*, et, avec* $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$ *et* $M = \sum_{j=1}^{q} m_j$.
On dit que $\mathbb{A}$ *et une matrice* ***bloc-carrée*** *si* $p = q$ *et si tous les blocs diagonaux sont des matrices carrées.*

Propriété 2.39 (Multiplication de matrices blocs)**.** *Soient* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N,M}(\mathbb{K})$ *et* $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{M,S}(\mathbb{K})$. *Le produit* $\mathbb{P} = \mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{N,S}(\mathbb{K})$ *peut s'écrire sous forme bloc si les matrices* $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{B}$ *sont compatibles par blocs : il faut que le nombre de blocs colonne de* $\mathbb{A}$ *soit égale au nombre de blocs ligne de* $\mathbb{B}$ *avec correspondance des dimensions.*

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,q} \\ \hdashline \vdots & & \vdots \\ \hdashline \mathbb{A}_{p,1} & \cdots & \mathbb{A}_{p,q} \end{array}\right) \quad et \quad \mathbb{B} = \left(\begin{array}{c:c:c} \mathbb{B}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,r} \\ \hdashline \vdots & & \vdots \\ \hdashline \mathbb{B}_{q,1} & \cdots & \mathbb{A}_{q,r} \end{array}\right)$$

avec $\mathbb{A}_{i,k} \in \mathcal{M}_{n_i,m_k}(\mathbb{K})$ *et* $\mathbb{B}_{k,j} \in \mathcal{M}_{m_k,s_j}(\mathbb{K})$ *pour tout* $i \in [\![1,p]\!]$, $k \in [\![1,q]\!]$ *et* $j \in [\![1,r]\!]$. *La matrice produit* $\mathbb{P}$ *s'écrit alors sous la forme bloc*

$$\mathbb{P} = \left(\begin{array}{c:c:c} \mathbb{P}_{1,1} & \cdots & \mathbb{P}_{1,r} \\ \hdashline \vdots & & \vdots \\ \hdashline \mathbb{P}_{p,1} & \cdots & \mathbb{P}_{p,r} \end{array}\right)$$

avec $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $\forall j \in [\![1,r]\!]$ $\mathbb{P}_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,s_j}(\mathbb{K})$ *et*

$$\mathbb{P}_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} \mathbb{A}_{i,k}\mathbb{B}_{k,j}.$$

Définition 2.40. *On dit qu'une matrice bloc-carrée* $\mathbb{A}$ *est* ***triangulaire inférieure*** *(resp.* ***supérieure****)* ***par blocs*** *si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices* $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ *pour* $i < j$ *(resp.*

$i > j$). . *Elle s'écrit donc sous la forme*

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right) \quad (\textit{resp. } \mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,1} \\ \hdashline \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right)).$$

Définition 2.41. *On dit qu'une matrice bloc-carrée $\mathbb{A}$ est **diagonale par blocs** ou **bloc-diagonale** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. Elle s'écrit donc sous la forme*

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right)$$

Proposition 2.42. *Soit $\mathbb{A}$ une matrice bloc-carré décomposée en $n \times n$ blocs. Si $\mathbb{A}$ est **bloc-diagonale** ou **triangulaire par blocs** alors son déterminant est le produit des déterminant des blocs diagonaux :*

$$\det \mathbb{A} = \prod_{i=1}^{n} \det \mathbb{A}_{i,i} \tag{40}$$

Proposition 2.43. *Soit $\mathbb{A}$ une matrice bloc-carré **inversible** décomposée en $n \times n$ blocs.*

— *Si $\mathbb{A}$ est **bloc-diagonale** alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **bloc-diagonale**.*

— *Si $\mathbb{A}$ est **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure) alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure).*

Dans ces deux cas les blocs diagonaux de la matrice inverse sont les inverses des blocs diagonaux de $\mathbb{A}$. On a donc

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \cdots & \circ & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right) \quad \textit{et } \mathbb{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1}^{-1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{A}_{n,n}^{-1} \end{array}\right)$$

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right) \quad \textit{et } \mathbb{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1}^{-1} & \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} \\ \hdashline \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{0} \\ \hdashline \bullet & \cdots & \bullet & \mathbb{A}_{n,n}^{-1} \end{array}\right)$$

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,1} \\ \hdashline \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{A}_{n,n} \end{array}\right) \quad \textit{et } \mathbb{A}^{-1} = \left(\begin{array}{c:c:c:c} \mathbb{A}_{1,1}^{-1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hdashline \mathbb{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hdashline \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ \hdashline \mathbb{0} & \cdots & \mathbb{0} & \mathbb{A}_{n,n}^{-1} \end{array}\right)$$

2.3 Normes vectorielles et normes matricielles

Définition 2.44. *Une **norme** sur un espace vectoriel V est une application $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes*

- $\|\boldsymbol{v}\| = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = 0$,
- $\|\alpha\boldsymbol{v}\| = |\alpha| \, \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall \boldsymbol{v} \in V$,
- $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leqslant \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in V^2$ *(inégalité triangulaire).*

*Une norme sur V est également appelée **norme vectorielle** . On appelle **espace vectoriel normé** un espace vectoriel muni d'une norme.*

Les trois normes suivantes sont les plus couramment utilisées :

$$\|\boldsymbol{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

$$\|\boldsymbol{v}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2\right)^{1/2}$$

$$\|\boldsymbol{v}\|_\infty = \max_i |v_i| \,.$$

Théorème 2.45. *Soit V un espace de dimension finie. Pour tout nombre réel $p \geqslant 1$, l'application $\|\bullet\|_p$ définie par*

$$\|\boldsymbol{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p\right)^{1/p}$$

est une norme.

Proposition 2.46. *Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n$*

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q\right)^{1/q} = \|\boldsymbol{u}\|_p \|\boldsymbol{v}\|_q \,. \tag{41}$$

*Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hölder**.*

Définition 2.47. *Deux **normes** $\|\bullet\|$ et $\|\bullet\|'$, définies sur un même espace vectoriel V, sont **équivalentes** s'il exite deux constantes C et C' telles que*

$$\|\boldsymbol{v}\|' \leqslant C \|\boldsymbol{v}\| \quad \textit{et} \quad \|\boldsymbol{v}\| \leqslant C' \|\boldsymbol{v}\|' \quad \textit{pour tout } \boldsymbol{v} \in V. \tag{42}$$

Proposition 2.48. *Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Définition 2.49. *Une **norme matricielle** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application $\|\bullet\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ vérifiant*

1. $\|\mathbb{A}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbb{A} = 0$,
2. $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha| \, \|\mathbb{A}\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
3. $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leqslant \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|, \ \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ *(inégalité triangulaire)*
4. $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leqslant \|\mathbb{A}\| \, \|\mathbb{B}\|, \ \forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Proposition 2.50. *Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{K}^n$, l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}^+$ définie* *par*

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|} = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|\leqslant 1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{K}^n \\ \|\boldsymbol{v}\|=1}} \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|, \tag{43}$$

est une norme matricielle, appelée ***norme matricielle subordonnée*** *(à la norme vectorielle donnée). De plus*

$$\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{v}\| \ \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n \tag{44}$$

et la norme $\|\mathbb{A}\|$ *peut se définir aussi par*

$$\|\mathbb{A}\|_s = \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\| \leqslant \alpha \|\boldsymbol{v}\|, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{K}^n\right\}. \tag{45}$$

Il existe au moins un vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$ *tel que*

$$\boldsymbol{u} \neq 0 \ \ et \ \ \|\mathbb{A}\boldsymbol{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\boldsymbol{u}\|. \tag{46}$$

Enfin une norme subordonnée vérifie toujours

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1 \tag{47}$$

Théorème 2.51. *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*. On a*

$$\|\mathbb{A}\|_1 \overset{déf.}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_1}{\|\boldsymbol{v}\|_1} = \max_{j\in[\![1,n]\!]} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \tag{48}$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 \overset{déf.}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_2}{\|\boldsymbol{v}\|_2} = \sqrt{\rho\left(\mathbb{A}^*\mathbb{A}\right)} = \sqrt{\rho\left(\mathbb{A}\mathbb{A}^*\right)} = \|\mathbb{A}^*\|_2 \tag{49}$$

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \overset{déf.}{=} \sup_{\substack{\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^n \\ \boldsymbol{v}\neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\boldsymbol{v}\|_\infty}{\|\boldsymbol{v}\|_\infty} = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \tag{50}$$

La norme $\|\bullet\|_2$ *est invariante par transformation unitaire :*

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \Longrightarrow \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^*\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2. \tag{51}$$

Par ailleurs, si la matrice $\mathbb{A}$ *est normale :*

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A} \Longrightarrow \|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}). \tag{52}$$

Proposition 2.52.
1. *Si une matrice* $\mathbb{A}$ *est hermitienne, ou symétrique (donc normale), on a* $\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A})$.
2. *Si une matrice* $\mathbb{A}$ *est unitaire, ou orthogonale (donc normale), on a* $\|\mathbb{A}\|_2 = 1$.

Théorème 2.53.
1. *Soit* $\mathbb{A}$ *une matrice carrée quelconque et* $\|\bullet\|$ *une norme matricielle subordonnée ou non, quelconque. Alors*
$$\rho(\mathbb{A}) \leqslant \|\mathbb{A}\|. \tag{53}$$
2. *Etant donné une matrice* $\mathbb{A}$ *et un nombre* $\varepsilon > 0$*, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que*
$$\|\mathbb{A}\| \leqslant \rho(\mathbb{A}) + \varepsilon. \tag{54}$$

Théorème 2.54. *L'application* $\|\bullet\|_E : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}^+$ *définie par*

$$\|\mathbb{A}\|_E = \left(\sum_{(i,j)=\in[\![1,n]\!]^2} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \sqrt{\operatorname{tr}\left(\mathbb{A}^*\mathbb{A}\right)}, \tag{55}$$

pour toute matrice $\mathbb{A} = (a_{ij})$ *d'ordre* n*, est une norme matricielle non subordonnée (pour* $n \geqslant 2$*), invariante par transformation unitaire et qui vérifie*

$$\|\mathbb{A}\|_2 \leqslant \|\mathbb{A}\|_E \leqslant \sqrt{n}\,\|\mathbb{A}\|_2, \ \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n. \tag{56}$$

De plus $\|\mathbb{I}\|_E = \sqrt{n}$.

Théorème 2.55.
1. *Soit* $\|\bullet\|$ *une norme matricielle subordonnée, et* $\mathbb{B}$ *une matrice vérifiant*
$$\|\mathbb{B}\| < 1.$$
Alors la matrice $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ *est inversible, et*
$$\left\|(\mathbb{I} + \mathbb{B})^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{1 - \|\mathbb{B}\|}.$$
2. *Si une matrice de la forme* $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ *est singulière, alors nécessairement*
$$\|\mathbb{B}\| \geqslant 1$$
pour toute norme matricielle, subordonnée ou non.

2.4 Réduction des matrices

Définition 2.56. *Soit* $A : V \to V$ *une application linéaire, représenté par une matrice carrée* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ *relativement à une base* $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$*. Relativement à une autre base* $\{\boldsymbol{f}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$*, la même application est représentée par la matrice*

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P} \tag{57}$$

où $\mathbb{P}$ *est la matrice inversible dont le* j*-ème vecteur colonne est formé des composantes du vecteur* $\boldsymbol{f}_j$ *dans la base* $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ *:*

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_1\rangle & \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_2\rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_n\rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{f}_1\rangle & \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{f}_2\rangle & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \langle \boldsymbol{e}_{n-1}, \boldsymbol{f}_n\rangle \\ \langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{f}_1\rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{f}_{n-1}\rangle & \langle \boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{f}_n\rangle \end{pmatrix} \tag{58}$$

La matrice $\mathbb{P}$ *est appelée* ***matrice de passage de la base*** $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ ***dans le base*** $\{\boldsymbol{f}_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$.

Définition 2.57. *On dit que la matrice carrée* $\mathbb{A}$ *est diagonalisable s'il existe une matrice inversible* $\mathbb{P}$ *telle que la matrice* $\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}$ *soit diagonale.*

Remarque. *On notera que, dans le cas où* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ *est diagonalisable, les éléments diagonaux de la matrice* $\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}$ *sont les valeurs propres* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *de la matrice* $\mathbb{A}$*, et que le* j*-ème vecteur colonne* $\boldsymbol{p}_j$ *de la matrice* $\mathbb{P}$ *est formé des composantes, dans la même base que* $\mathbb{A}$*, d'un vecteur propre associé à la valeur propre* λ_j*. On a*

$$\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \Longleftrightarrow \mathbb{A}\boldsymbol{p}_j = \lambda_j \boldsymbol{p}_j, \ \forall j \in [\![1, n]\!]. \tag{59}$$

C'est à dire qu'une matrice est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de vecteurs propres.

Théorème 2.58.
1. *Etant donnée une matrice* ***carrée*** $\mathbb{A}$*, il existe une matrice* ***unitaire*** $\mathbb{U}$ *telle que la matrice* $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ *soit* ***triangulaire***.
2. *Etant donnée une matrice* ***normale*** $\mathbb{A}$*, il existe une matrice* ***unitaire*** $\mathbb{U}$ *telle que la matrice* $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ *soit* ***diagonale***.

3. *Etant donnée une matrice* ***symétrique*** $\mathbb{A}$, *il existe une matrice* ***orthogonale*** $\mathbb{U}$ *telle que la matrice* $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ *soit* ***diagonale****.*

2.5 Suites de vecteurs et de matrices

Définition 2.59. *Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\|\bullet\|$, on dit qu'une suite $(\boldsymbol{v}_k)$ d'éléments de V* ***converge vers un élément*** $\boldsymbol{v} \in V$*, si*

$$\lim_{k\to\infty} \|\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}\| = 0$$

et on écrit

$$\boldsymbol{v} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{v}_k.$$

Théorème 2.60. *Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^k = 0$,
2. $\lim_{k\to\infty} \mathbb{B}^k \boldsymbol{v} = 0$ *pour tout vecteur* $\boldsymbol{v}$,
3. $\rho(\mathbb{B}) < 1$,
4. $\|\mathbb{B}\| < 1$ *pour au moins une norme matricielle subordonnée* $\|\bullet\|$.

Théorème 2.61. *Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée, et $\|\bullet\|$ une norme matricielle quelconque. Alors*

$$\lim_{k\to\infty} \left\|\mathbb{B}^k\right\|^{1/k} = \rho(\mathbb{B}).$$

Index