

1 Analyse

1.1 En vrac

Théorème 1.1 (Théorème de Rolle). Soient a, b deux réels, $a < b$, et, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que

- f est continue sur $]a, b[$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 1.2 (Théorème de Bolzano ou des valeurs intermédiaires). Soit $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Si $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas de même signe (i.e. $f(a)f(b) < 0$) alors il existe au moins $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Théorème 1.3 (Théorème des accroissements finis). Soient a et b deux réels, $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Proposition 1.4 (Formule de Taylor-Lagrange d'ordre n). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^n([a, b])$ dont la dérivée n -ième est dérivable sur $]a, b[$. Alors

- pour tout x, y dans $[a, b]$, $x \neq y$, il existe $\xi \in]\min(x, y), \max(x, y)[$ tel que

$$f(x) = f(y) + \sum_{k=1}^n \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k)}(y) + \frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (1)$$

- $\forall t \in [a, b]$, $\forall h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $(t+h) \in [a, b]$, il existe $\xi \in]\min(t, t+h), \max(t, t+h)[$ tel que

$$f(t+h) = f(t) + \sum_{k=1}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(t) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (2)$$

Définition 1.5. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est **dominée** par g au voisinage de a , si, au voisinage de a , il existe une fonction θ bornée telle que $f = \theta g$. Dans ce cas, on dit aussi que f **se comporte comme un grand O** de g au voisinage de a et on note alors $f \stackrel{a}{=} \mathcal{O}(g)$.

Définition 1.6. Soit f une fonction définie au voisinage de 0. On dit que $f(h)$ **se comporte comme un grand O** de h^p (au voisinage de 0) si f est dominée par $h \mapsto h^p$ au voisinage de 0 et on note alors $f(h) = \mathcal{O}(h^p)$.

Proposition 1.7 (Formule de Taylor-Landau d'ordre n). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$, alors $\forall t \in [a, b]$, $\forall h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $(t+h) \in [a, b]$, il existe $\xi \in]\min(t, t+h), \max(t, t+h)[$ tel que

$$f(t+h) = f(t) + \sum_{k=1}^n \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(t) + \mathcal{O}(h^{n+1}) \quad (3)$$

Corollaire 1.8 (Théorème de la bijection). Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$ et à valeurs réelles, alors elle constitue une bijection entre $[a, b]$ et l'intervalle fermé dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$.

Proposition 1.9. Soit f est une fonction bijective continue d'un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ sur un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$. Si f est dérivable en $\alpha \in I$ et que $f'(\alpha) \neq 0$ alors sa réciproque f^{-1} est dérivable en $\beta = f(\alpha) \in J$ et

$$(f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(\alpha)} \quad \text{ou encore} \quad (f^{-1})'(\beta) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\beta))}$$

1.2 Espace métrique²

Définition 1.10 (Distance sur un ensemble). On appelle **distance** sur un ensemble E , une application d de E^2 dans $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in E^3$ on a

- symétrie : $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$,
- séparation : $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$,
- inégalité triangulaire : $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$

Voici quelques exemples de distances :

- $d(x, y) = |x - y|$ dans $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$
- $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ dans $\mathbb{R}^n$, où $\|\cdot\|$ est l'une quelconque des normes habituelles.

Définition 1.11 (Espace métrique). Un ensemble E muni d'une distance d est appelé **espace métrique** et on le note (E, d) .

Soient (E, d) un espace métrique, $\mathbf{a} \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$. On appelle

- **boule ouverte** de centre $\mathbf{a}$ et de rayon r l'ensemble

$$\mathcal{B}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in E; d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < r\},$$

- **boule fermée** de centre $\mathbf{a}$ et de rayon r l'ensemble

$$\overline{\mathcal{B}(\mathbf{a}, r)} = \{\mathbf{x} \in E; d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq r\},$$

- **sphere** de centre $\mathbf{a}$ et de rayon r l'ensemble

$$\mathcal{S}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in E; d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = r\},$$

Une partie $A \subset E$ est dite **bornée** si

$$\exists \mathbf{x} \in E, \exists R \in \mathbb{R}_+, \quad A \subset \mathcal{B}(\mathbf{x}, R).$$

2. En grande partie extrait du site bibmat

1. auteur : F. Cuvelier. Compilé le 8 octobre 2024 à 16h 05.

1.2.1 Suites

Définition 1.12 (Suite convergente). Soient (E, d) un *espace métrique* et $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On dit que la suite $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ converge si

$$\exists \alpha \in E, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k > N, \quad d(\mathbf{u}^{[k]}, \alpha) < \epsilon. \quad (4)$$

Dans ce cas on dit que la suite $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha \in E$.

Une suite qui ne converge vers aucun $\alpha \in E$ est dite **divergente** et vérifie

$$\forall \alpha \in E, \exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists k > N, \quad d(\mathbf{u}^{[k]}, \alpha) \geq \epsilon.$$

Si la suite $(\mathbf{u}^{[k]})$ de E converge vers α (nécessairement unique dans E) alors on dit que α est la **limite** de $(\mathbf{u}^{[k]})$ et on note

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{u}^{[k]} = \alpha \quad \text{ou} \quad \mathbf{u}^{[k]} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \alpha.$$

1.2.2 Ouverts et fermés

Soit (E, d) un espace métrique.

Soient $\mathbf{x} \in E$ et $V \subset E$. On dit que V est un **voisinage** de $\mathbf{x}$ s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathcal{B}(\mathbf{x}, r) \subset V$.

On dit que $U \subset E$ est un **ouvert** de E si elle est voisinage de tous ses points :

$$\forall \mathbf{x} \in U, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbf{x}, r) \subset U \quad (5)$$

Proposition 1.13. • E et $\emptyset$ sont des ouverts,
• une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert,
• une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

On dit que $U \subset E$ est un **fermé** de E si son complémentaire est un ouvert de E .

Proposition 1.14. • E et $\emptyset$ sont des fermés,
• une réunion finie de fermés est un fermé,
• une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Soit $A \subset E$.

- On dit que $\mathbf{x} \in E$ est un **point intérieur** de A si

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbf{x}, r) \subset A.$$

On appelle **intérieur** de A et on note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs de A .

L'ensemble $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert : c'est le plus grand ouvert contenu dans A .

- On dit que $\mathbf{x} \in E$ est un **point adhérent** à A si

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbf{x}, r) \cap A \neq \emptyset.$$

On appelle **adhérence** de A et on note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents de A . L'ensemble $\overline{A}$ est un fermé : c'est le plus petit fermé contenant A .

Théorème 1.15. Soient $A \subset E$ et $\mathbf{x} \in E$.

- $\mathbf{x} \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite $(\mathbf{u}^{[k]})$ de A qui converge vers $\mathbf{x}$.
- A est fermé si et seulement si, pour toute suite $(\mathbf{u}^{[k]})$ de A qui converge vers $\alpha \in E$, alors $\alpha \in A$.

Définition 1.16. Une partie $K \subset E$ est dite **compacte** si, de toute suite $(\mathbf{u}^{[k]})$ de K , on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K .

- toute réunion finie de compacts est compacte,
- toute intersection quelconque de compacts est compacte,
- toute partie compacte de E est fermée et bornée.

1.2.3 Limites et continuité

Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \rightarrow F$ une fonction. Soit $\alpha \in E$. on dit que f **admet une limite** en α si

$$\exists \beta \in F, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \in E, \left(d(\mathbf{x}, \alpha) < \delta \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), \beta) < \varepsilon \right) \quad (6)$$

Cette limite, si elle existe, est nécessairement unique, égale à β , et on note alors

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \alpha} f(\mathbf{x}) = \beta \quad \text{ou} \quad f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \alpha} \beta.$$

Proposition 1.17. f admet une limite β en α si et seulement si pour toute suite $\mathbf{u}^{[k]}$ de E qui converge vers α , alors la suite $f(\mathbf{u}^{[k]})$ de F converge vers β .

Définition 1.18. Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \rightarrow F$ une fonction.

- f est **continue** en $\alpha \in E$ si f admet une limite en α (nécessairement égale à $f(\alpha)$) ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \in E, \left(d(\mathbf{x}, \alpha) < \delta \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), f(\alpha)) < \varepsilon \right). \quad (7)$$

- f est **continue sur** $A \subset E$ si elle est continue en chaque point de A .

Théorème 1.19. Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \rightarrow F$ une fonction. f est continue en $\alpha \in E$ si et seulement si, pour toute suite $\mathbf{u}^{[k]}$ de E qui converge vers α , alors la suite $f(\mathbf{u}^{[k]})$ de F converge vers $f(\alpha)$.

Théorème 1.20. Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \rightarrow F$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est continue sur E ,
- L'image réciproque d'un ouvert de F par f est un ouvert de E ,
- L'image réciproque d'un fermé de F par f est un fermé de E .

Définition 1.21. Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \rightarrow F$ une fonction. On dit que f est **Uniformément continue** sur $A \subset E$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A^2, \left(d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < \varepsilon \right).$$

Définition 1.22. Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, et $f : E \rightarrow F$ une fonction.

- On dit que f est **Lipschitzienne** de rapport $K \in \mathbb{R}_+$ ou **K-lipschitzienne** sur $A \subset E$ si

$$\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A^2, \quad d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq K d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

- On dit que f est **contractante** sur $A \subset E$ si elle est **lipschitzienne** de rapport $K \in [0, 1[$ sur $A \subset E$.

- Toute application lipschitzienne est uniformément continue.
- Toute application uniformément continue est continue.

Les réciproques sont fausses.

Théorème 1.23. Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques, K un compact de E , et $f : K \rightarrow F$. Si f est continue sur K alors $f(K)$ est un compact de F .

Théorème 1.24 (Théorème de Heine). *Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.*

1.2.4 Suites de Cauchy

Définition 1.25 (Suite de Cauchy). *Soit (E, d) un **espace métrique**. Une suite $(\mathbf{x}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite **de Cauchy** si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p, q \geq M, \quad d(\mathbf{x}^{[p]}, \mathbf{x}^{[q]}) < \epsilon.$$

ce qui correspond à

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{p, q \geq m} d(\mathbf{x}^{[p]}, \mathbf{x}^{[q]}) = 0.$$

Une autre manière de l'écrire est

$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N}, k \geq M, \forall l \in \mathbb{N}, \quad d(\mathbf{x}^{[k+l]}, \mathbf{x}^{[k]}) < \epsilon.$$

ce qui correspond à

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq m, l \geq 0} d(\mathbf{x}^{[k+l]}, \mathbf{x}^{[k]}) = 0.$$

Définition 1.26 (Espace métrique complet). *Un espace métrique est dit **complet** si toute suite de Cauchy converge.*

Proposition 1.27. *Si E est un espace vectoriel normé de norme $\|\cdot\|$ alors E est un espace métrique pour la distance d issue de sa norme et définie par $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in E^2$.*

Définition 1.28 (Espace de Banach). *On appelle **espace de Banach** un espace vectoriel normé complet pour la distance issue de sa norme.*

Par exemple, les espaces vectoriels normés $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ sont des espaces de Banach. Plus généralement, un espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

1.2.5 Ordre de convergence

Définition 1.29 (Ordre de convergence). *Soient (E, d) un **espace métrique** et $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E **convergeant vers** $\alpha \in E$ avec, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u}^{[k]} \neq \alpha$.*

*Soit $p \in [1, +\infty[$. On dit que cette suite **converge vers** α avec un **ordre p au moins** si*

$$\exists C > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \text{ tels que } \forall k \geq k_0, \quad d(\mathbf{u}^{[k+1]}, \alpha) \leq C d(\mathbf{u}^{[k]}, \alpha)^p. \quad (8)$$

où $C < 1$ si $p = 1$.

*On dit que cette suite **converge vers** α avec un **ordre p (exactement)** si elle converge à l'ordre p au moins et si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{d(\mathbf{u}^{[k+1]}, \alpha)}{d(\mathbf{u}^{[k]}, \alpha)^{p+\varepsilon}} = +\infty. \quad (9)$$

Soient (E, d) un **espace métrique** et $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E **convergeant vers** $\alpha \in E$ avec, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u}^{[k]} \neq \alpha$.

Soit $p \in [1, +\infty[$.

La suite **converge vers** α à l'ordre 1 (exactement) si

$$\exists \mu \in]0, 1[, \quad \text{tel que } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{d(\mathbf{u}^{[k+1]}, \alpha)}{d(\mathbf{u}^{[k]}, \alpha)} = \mu. \quad (10)$$

Dans ce cas la convergence est dite **linéaire**.

- Si (10) est vérifiée pour $\mu = 0$, alors la convergence est dite **super-linéaire**.
- Si (10) n'est vérifiée pour aucun $\mu \in]0, 1[$, alors la convergence est dite **sous-linéaire**. La suite **converge vers** α à l'ordre $p > 1$ (exactement) si

$$\exists \mu > 0, \quad \text{tel que } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{d(\mathbf{u}^{[k+1]}, \alpha)}{d(\mathbf{u}^{[k]}, \alpha)^p} = \mu. \quad (11)$$

et dans ce cas la convergence est **super-linéaire**.

La convergence d'ordre 2 (resp. 3) est dite **quadratique** (resp. **cubique**).

2 Algèbre linéaire

Soit V un **espace vectoriel** de dimension finie n , sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, ou sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Notons plus généralement $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Vecteurs

Une **base** de V est un ensemble $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de n **vecteurs linéairement indépendants**. Le vecteur $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i$ sera représenté par le **vecteur colonne**

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

et on désignera par $\mathbf{v}^t$ et $\mathbf{v}^*$ les **vecteurs lignes** suivants

$$\mathbf{v}^t = (v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n), \quad \mathbf{v}^* = (\overline{v_1} \quad \overline{v_2} \quad \dots \quad \overline{v_n})$$

où $\overline{\alpha}$ est le nombre **complexe conjugué** du nombre α .

Définition 2.1. — *Le vecteur ligne $\mathbf{v}^t$ est le **vecteur transposé** du vecteur colonne $\mathbf{v}$.
— Le vecteur ligne $\mathbf{v}^*$ est le **vecteur adjoint** du vecteur colonne $\mathbf{v}$.*

Définition 2.2. *L'application $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ définie pour tout $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ par*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^t \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \quad (12)$$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u}} = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} v_i, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (13)$$

*est appelée **produit scalaire euclidien** si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, **hermitien**^a si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour rappeler la dimension de l'espace, on écrit*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_n.$$

a. La convention choisie pour le produit scalaire hermitien étant ici : linéarité à droite et semi-linéarité à gauche. Il est aussi possible de définir le produit scalaire hermitien par le complexe conjugué de (13) :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}.$$

Dans ce cas le produit scalaire est une forme sesquilinéaire à droite.

Définition 2.3. Soit V est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

- ◊ Deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont **Orthogonaux** si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.
- ◊ Un vecteur $\mathbf{v}$ est **orthogonal à une partie** U de V si

$$\forall \mathbf{u} \in U, \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

On note $\mathbf{v} \perp U$.

- ◊ Un ensemble de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ de l'espace V est dit **orthonormal** si

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2$$

où δ_{ij} est le **symbole de Kronecker** : $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

Définition 2.4. Le vecteur nul de $\mathbb{K}^n$ est représenté par $\mathbf{0}_n$ ou $\mathbf{0}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Définition 2.5. Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$ non nul. On définit l'**opérateur de projection** sur $\mathbf{u}$ par

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u} = \frac{1}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \mathbf{u} \mathbf{u}^* \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n. \quad (14)$$

La matrice $\mathbb{P}_{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \mathbf{u}^*$ s'appelle la matrice de la projection orthogonale suivant le vecteur $\mathbf{u}$.

Proposition 2.6. Le **procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt** est un algorithme permettant de construire une famille orthonormée à partir d'une famille libre $\{\mathbf{v}_i\}_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ de $\mathbb{K}^n$. On construit successivement les vecteurs $\mathbf{u}_i$

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \text{proj}_{\mathbf{u}_k}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k \rangle} \mathbf{u}_k.$$

La famille $\{\mathbf{u}_i\}_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ est alors une **famille orthogonale** de $\mathbb{K}^n$ et

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i) = \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i).$$

Pour construire une **famille orthonormée** $\{\mathbf{z}_i\}_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$, il suffit de normaliser les vecteurs de la famille orthogonale :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \mathbf{z}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle^{1/2}}.$$

2.2 Matrices

2.2.1 Généralités

Une matrice à m lignes et n colonnes est appelée **matrice de type** (m, n) , et on note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, ou simplement $\mathcal{M}_{m,n}$, l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ formé par les matrices de type (m, n) à éléments dans $\mathbb{K}$.

Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ d'éléments $A_{ij} \in \mathbb{K}$ est notée

$$\mathbb{A} = (A_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n},$$

le premier indice i correspond aux lignes et le second j aux colonnes. On désigne par $(\mathbb{A})_{ij}$ l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne. On peut aussi le noter $A_{i,j}$.

Définition 2.7. La matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est représentée par $\mathbf{0}_{m,n}$ ou $\mathbf{0}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Si $m = n$ on peut aussi noter $\mathbf{0}_n$ cette matrice.

Définition 2.8. ◊ Soit une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, on note $\mathbb{A}^* \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ la **matrice adjointe** de la matrice $\mathbb{A}$, définie de façon unique par

$$\langle \mathbb{A} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_m = \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}^* \mathbf{v} \rangle_n, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^m$$

qui entraîne $(\mathbb{A}^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$.

- ◊ Soit une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on note $\mathbb{A}^t \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ la **matrice transposée** de la matrice $\mathbb{A}$, définie de façon unique par

$$\langle \mathbb{A} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_m = \langle \mathbf{u}, \mathbb{A}^t \mathbf{v} \rangle_n, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$$

qui entraîne $(\mathbb{A}^t)_{ij} = A_{ji}$.

Définition 2.9. Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, le **produit** $\mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est défini par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (\mathbb{A}\mathbb{B})_{ij} = \sum_{k=1}^p A_{ik} B_{kj}. \quad (15)$$

Proposition 2.10. Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, alors

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^t = \mathbb{B}^t \mathbb{A}^t, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad (16)$$

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^* = \mathbb{B}^* \mathbb{A}^*, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (17)$$

Note. Les matrices considérées jusqu'à la fin de ce paragraphe sont carrées.

Définition 2.11. Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors les éléments $A_{ii} = (\mathbb{A})_{ii}$ sont appelés **éléments diagonaux** et les éléments $A_{ii} = (\mathbb{A})_{ij}, i \neq j$ sont appelés **éléments hors-diagonaux**.

Définition 2.12. On appelle **matrice identité** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont les éléments diagonaux sont tous égaux à 1 et les éléments hors-diagonaux nuls. On la note $\mathbb{I}$ ou encore $\mathbb{I}_n$ et on a

$$(\mathbb{I})_{i,j} = \delta_{ij}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2.$$

Définition 2.13. Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **inversible** ou **régulière** s'il existe une matrice $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I} \quad (18)$$

Dans le cas contraire, on dit que la matrice $\mathbb{A}$ est **singulière** ou **non inversible**.

Définition 2.14. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. On note $\mathbb{A}^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'unique matrice vérifiant

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{I}. \quad (19)$$

Cette matrice est appelée **matrice inverse** de $\mathbb{A}$.

Définition 2.15. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

- ◊ On note $\ker(\mathbb{A}) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n : \mathbb{A}\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ le **noyau** de $\mathbb{A}$.
- ◊ On note $\text{im}(\mathbb{A}) = \{\mathbb{A}\mathbf{v} \in \mathbb{K}^m : \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n\}$ l'**image** de $\mathbb{A}$.
- ◊ On note $\text{rank}(\mathbb{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \dim(\text{im}(\mathbb{A}))$ le **rang** de $\mathbb{A}$.

Théorème 2.16 (théorème du rang). Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On a

$$\text{rank}(\mathbb{A}) + \dim(\ker(\mathbb{A})) = n$$

Proposition 2.17. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1. $\mathbb{A}$ est inversible,
2. $\text{rank}(\mathbb{A}) = n$,
3. $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$, $\mathbb{A}\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = 0$, (i.e. $\ker \mathbb{A} = \{0\}$)
4. $\det(\mathbb{A}) \neq 0$,
5. toutes les valeurs propres de $\mathbb{A}$ sont non nulles,
6. il existe $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}$,
7. il existe $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$.

Proposition 2.18. Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles. On a alors $\mathbb{A}\mathbb{B}$ inversible et

$$(\mathbb{A}^t)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^t, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \quad (20)$$

$$(\mathbb{A}^*)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^*, \quad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \quad (21)$$

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1} \quad (22)$$

$$(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A} \quad (23)$$

Définition 2.19. Une matrice **carrée** $\mathbb{A}$ est :

- ◊ **symétrique** si $\mathbb{A}$ est réelle et $\mathbb{A} = \mathbb{A}^t$,
- ◊ **hermitienne** si $\mathbb{A} = \mathbb{A}^*$,
- ◊ **normale** si $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$,
- ◊ **orthogonale** si $\mathbb{A}$ est réelle et $\mathbb{A}\mathbb{A}^t = \mathbb{A}^t\mathbb{A} = \mathbb{I}$,
- ◊ **unitaire** si $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A} = \mathbb{I}$,

Proposition 2.20. • une matrice symétrique ou hermitienne est nécessairement normale.
• une matrice orthogonale (resp. unitaire) est nécessairement normale et inversible d'inverse $\mathbb{A}^t$ (resp. $\mathbb{A}^*$).

Définition 2.21. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice **hermitienne**.

◊ Elle est **définie positive** si $\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad (24)$

◊ Elle est **semi définie positive** si $\langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad (25)$

Définition 2.22. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La trace d'une matrice carrée $\mathbb{A} = (a_{ij})$ est définie par

$$\text{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Définition 2.23. Soit $\mathcal{T}_n$ le **groupe des permutations** de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. A tout élément $\sigma \in \mathcal{T}_n$, on associe la **matrice de permutation** de $\mathbb{P}_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est définie par

$$(\mathbb{P}_\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}.$$

On peut noter qu'une matrice de permutation est orthogonale.

Définition 2.24. Soient $\mathbb{A} = (A_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n$ le **groupe des permutations** de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Le **déterminant** d'une matrice $\mathbb{A}$ est défini par

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{T}_n} \varepsilon_\sigma \prod_{j=1}^n A_{\sigma(j),j}$$

où ε_σ désigne la signature de la permutation σ .

Proposition 2.25 (Méthode de Laplace ou des cofacteurs). Soit $\mathbb{A} = (A_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathbb{A}^{[i,j]} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de $\mathbb{A}$. On a alors le **développement par rapport à la ligne** $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} A_{i,j} \det(\mathbb{A}^{[i,j]}), \quad (26)$$

et le **développement par rapport à la colonne** $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\det(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{i,j} \det(\mathbb{A}^{[i,j]}). \quad (27)$$

Le terme $(-1)^{i+j} \det(\mathbb{A}^{[i,j]})$ est appelé le **cofacteur** du terme $A_{i,j}$.

Définition 2.26. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est **valeur propre** de $\mathbb{A}$ s'il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ **non nul** tel que

$$\mathbb{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}. \quad (28)$$

Le vecteur $\mathbf{u}$ est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ .
Le couple $(\lambda, \mathbf{u})$ est appelé **élément propre** de $\mathbb{A}$.

Définition 2.27. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\mathbb{A}$. Le sous-espace

$$E_\lambda = \{\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n : \mathbb{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}\} = \ker(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) \quad (29)$$

est appelé **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ . La dimension de E_λ est appelée **multiplicité géométrique** de la valeur propre λ .

Définition 2.28. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme de degré n défini par

$$\mathcal{P}_\mathbb{A}(\lambda) = \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) \quad (30)$$

est appelé **polynôme caractéristique** de la matrice $\mathbb{A}$.

Proposition 2.29. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- ◊ Les racines complexes du polynôme caractéristique $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ sont les valeurs propres de la matrice $\mathbb{A}$.
- ◊ Si la racine λ de $\mathcal{P}_{\mathbb{A}}$ est de multiplicité k , on dit que la valeur propre λ est de **Multiplicité algébrique** k .
- ◊ La matrice $\mathbb{A}$ possède n valeurs propres distinctes ou non.

Définition 2.30. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\lambda_i(\mathbb{A})$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les n valeurs propres de $\mathbb{A}$. Le **spectre** de la matrice $\mathbb{A}$ est le sous-ensemble

$$\text{Sp}(\mathbb{A}) = \bigcup_{i=1}^n \{\lambda_i(\mathbb{A})\} \quad (31)$$

du plan complexe.

Proposition 2.31. Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a les relations suivantes

$$\text{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(\mathbb{A}), \quad (32)$$

$$\det(\mathbb{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i(\mathbb{A}), \quad (33)$$

$$\text{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \text{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A}), \quad (34)$$

$$\text{tr}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \text{tr}(\mathbb{A}) + \text{tr}(\mathbb{B}), \quad (35)$$

$$\det(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \det(\mathbb{A})\det(\mathbb{B}) = \det(\mathbb{B}\mathbb{A}), \quad (36)$$

$$\det(\mathbb{A}^*) = \overline{\det(\mathbb{A})}. \quad (37)$$

Définition 2.32. Le **rayon spectral** d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le nombre ≥ 0 défini par

$$\rho(\mathbb{A}) = \max \{|\lambda_i(\mathbb{A})|; i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

2.2.2 Matrices particulières

Définition 2.33. Une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est :

- ◊ **diagonale** si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$,
- ◊ **triangulaire supérieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$,
- ◊ **triangulaire inférieure** si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$,
- ◊ **triangulaire** si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure
- ◊ à **diagonale dominante** si

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (38)$$

- ◊ à **diagonale strictement dominante** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket. \quad (39)$$

Proposition 2.34. Soient $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires inférieures (resp. triangulaires supérieures). Alors la matrice $\mathbb{A}\mathbb{B}$ est aussi triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).

De plus on a

$$(\mathbb{A}\mathbb{B})_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Proposition 2.35. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure).

1. $\mathbb{A}$ est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls (i.e. $A_{i,i} \neq 0, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$).
2. Si $\mathbb{A}$ est inversible alors son inverse est triangulaire inférieure (resp. triangulaire supérieure) et

$$(\mathbb{A}^{-1})_{i,i} = \frac{1}{(\mathbb{A})_{i,i}}$$

Définition 2.36. On appelle **matrice bande** une matrice $\mathbb{A}$ telle que $a_{ij} \neq 0$ pour $|j - i| \leq c$. c est la **demi largeur de bande**.

Lorsque $c = 1$, la matrice est dite **tridiagonale**. Lorsque $c = 2$, la matrice est dite **pentadiagonale**.

Définition 2.37. On appelle **sous-matrice** d'une matrice donnée, la matrice obtenue en supprimant certaines lignes et certaines colonnes. En particulier, si on supprime les $(n - k)$ dernières lignes et colonnes d'une matrice carrée $\mathbb{A}$ d'ordre n , on obtient la **sous matrice principale** d'ordre k .

Définition 2.38. On appelle **matrice bloc** une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N,M}(\mathbb{K})$ écrite sous la forme

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,q} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{A}_{p,1} & \cdots & \mathbb{A}_{p,q} \end{array} \right)$$

où $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \mathbb{A}_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i, m_j}(\mathbb{K})$, et, avec $N = \sum_{i=1}^p n_i$ et $M = \sum_{j=1}^q m_j$.

On dit que $\mathbb{A}$ est une matrice **bloc-carrée** si $p = q$ et si tous les blocs diagonaux sont des matrices carrées.

Propriété 2.39 (Multiplication de matrices blocs). Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{N,M}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{M,S}(\mathbb{K})$. Le produit $\mathbb{P} = \mathbb{A}\mathbb{B} \in \mathcal{M}_{N,S}(\mathbb{K})$ peut s'écrire sous forme bloc si les matrices $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont compatibles par blocs : il faut que le nombre de blocs colonne de $\mathbb{A}$ soit égale au nombre de blocs ligne de $\mathbb{B}$ avec correspondance des dimensions.

$$\mathbb{A} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \mathbb{A}_{1,q} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{A}_{p,1} & \cdots & \mathbb{A}_{p,q} \end{array} \right) \text{ et } \mathbb{B} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{B}_{1,1} & \cdots & \mathbb{B}_{1,r} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{B}_{q,1} & \cdots & \mathbb{B}_{q,r} \end{array} \right)$$

avec $\mathbb{A}_{i,k} \in \mathcal{M}_{n_i, m_k}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{B}_{k,j} \in \mathcal{M}_{m_k, s_j}(\mathbb{K})$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket, k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$. La matrice produit $\mathbb{P}$ s'écrit alors sous la forme bloc

$$\mathbb{P} = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{P}_{1,1} & \cdots & \mathbb{P}_{1,r} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbb{P}_{p,1} & \cdots & \mathbb{P}_{p,r} \end{array} \right)$$

avec $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket \mathbb{P}_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i, s_j}(\mathbb{K})$ et

$$\mathbb{P}_{i,j} = \sum_{k=1}^q \mathbb{A}_{i,k} \mathbb{B}_{k,j}.$$

Définition 2.40. On dit qu'une matrice bloc-carrée $\mathbb{A}$ est **triangulaire inférieure** (resp. **supérieure**) **par blocs** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ pour $i < j$ (resp.

$i > j$). . Elle s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix} \quad (\text{resp. } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix}).$$

Définition 2.41. On dit qu'une matrice bloc-carrée $\mathbb{A}$ est **diagonale par blocs** ou **bloc-diagonale** si elle peut s'écrire sous la forme d'une matrice bloc avec les sous matrices $\mathbb{A}_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$. Elle s'écrit donc sous la forme

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix}$$

Proposition 2.42. Soit $\mathbb{A}$ une matrice bloc-carré décomposée en $n \times n$ blocs. Si $\mathbb{A}$ est **bloc-diagonale** ou **triangulaire par blocs** alors son déterminant est le produit des déterminant des blocs diagonaux :

$$\det \mathbb{A} = \prod_{i=1}^n \det \mathbb{A}_{i,i} \quad (40)$$

Proposition 2.43. Soit $\mathbb{A}$ une matrice bloc-carré **inversible** décomposée en $n \times n$ blocs.

- Si $\mathbb{A}$ est **bloc-diagonale** alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **bloc-diagonale**.
- Si $\mathbb{A}$ est **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure) alors son inverse (décomposée en $n \times n$ blocs) est aussi **triangulaire inférieure par blocs** (resp. supérieure).

Dans ces deux cas les blocs diagonaux de la matrice inverse sont les inverses des blocs diagonaux de $\mathbb{A}$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{A}_{n,n}^{-1} \end{pmatrix} \\ \mathbb{A} &= \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \mathbb{A}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1}^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \bullet & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \bullet & \cdots & \bullet & \mathbb{A}_{n,n}^{-1} \end{pmatrix} \\ \mathbb{A} &= \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1} & \cdots & \cdots & \mathbb{A}_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{A}_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}_{1,1}^{-1} & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{A}_{n,n}^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.3 Normes vectorielles et normes matricielles

Définition 2.44. Une **norme** sur un espace vectoriel V est une application $\|\bullet\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes

- ◊ $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = 0$,
- ◊ $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{v} \in V$,
- ◊ $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$, $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V^2$ (inégalité triangulaire).

Une norme sur V est également appelée **norme vectorielle**. On appelle **espace vectoriel normé** un espace vectoriel muni d'une norme.

Les trois normes suivantes sont les plus couramment utilisées :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |v_i| \\ \|\mathbf{v}\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2} \\ \|\mathbf{v}\|_\infty &= \max_i |v_i|. \end{aligned}$$

Théorème 2.45. Soit V un espace de dimension finie. Pour tout nombre réel $p \geq 1$, l'application $\|\bullet\|_p$ définie par

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

est une norme.

Proposition 2.46. Pour $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^q \right)^{1/q} = \|\mathbf{u}\|_p \|\mathbf{v}\|_q. \quad (41)$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hölder**.

Définition 2.47. Deux **normes** $\|\bullet\|$ et $\|\bullet\|'$, définies sur un même espace vectoriel V , sont **équivalentes** s'il existe deux constantes C et C' telles que

$$\|\mathbf{v}\|' \leq C \|\mathbf{v}\| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}\| \leq C' \|\mathbf{v}\|' \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in V. \quad (42)$$

Proposition 2.48. Sur un espace vectoriel de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Définition 2.49. Une **norme matricielle** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une application $\|\bullet\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant

1. $\|\mathbb{A}\| = 0 \iff \mathbb{A} = 0$,
2. $\|\alpha \mathbb{A}\| = |\alpha| \|\mathbb{A}\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
3. $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|$, $\forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ (inégalité triangulaire)
4. $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| \|\mathbb{B}\|$, $\forall (\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$

Proposition 2.50. Etant donné une norme vectorielle $\|\bullet\|$ sur $\mathbb{K}^n$, l'application $\|\bullet\|_s : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie

par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\| \leq 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| = \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \\ \|\mathbf{v}\| = 1}} \|\mathbb{A}\mathbf{v}\|, \quad (43)$$

est une norme matricielle, appelée **norme matricielle subordonnée** (à la norme vectorielle donnée). De plus

$$\|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \quad (44)$$

et la norme $\|\mathbb{A}\|$ peut se définir aussi par

$$\|\mathbb{A}\|_s = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : \|\mathbb{A}\mathbf{v}\| \leq \alpha \|\mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \}. \quad (45)$$

Il existe au moins un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\mathbf{u} \neq 0 \quad \text{et} \quad \|\mathbb{A}\mathbf{u}\| = \|\mathbb{A}\|_s \|\mathbf{u}\|. \quad (46)$$

Enfin une norme subordonnée vérifie toujours

$$\|\mathbb{I}\|_s = 1 \quad (47)$$

Théorème 2.51. Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a

$$\|\mathbb{A}\|_1 \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_1}{\|\mathbf{v}\|_1} = \max_{j \in [1, n]} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (48)$$

$$\|\mathbb{A}\|_2 \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_2}{\|\mathbf{v}\|_2} = \sqrt{\rho(\mathbb{A}^* \mathbb{A})} = \sqrt{\rho(\mathbb{A} \mathbb{A}^*)} = \|\mathbb{A}^*\|_2 \quad (49)$$

$$\|\mathbb{A}\|_\infty \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \\ \mathbf{v} \neq 0}} \frac{\|\mathbb{A}\mathbf{v}\|_\infty}{\|\mathbf{v}\|_\infty} = \max_{i \in [1, n]} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (50)$$

La norme $\|\bullet\|_2$ est invariante par transformation unitaire :

$$\mathbb{U}\mathbb{U}^* = \mathbb{I} \implies \|\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{A}\mathbb{U}\|_2 = \|\mathbb{U}\mathbb{A}\|_2 = \|\mathbb{U}^* \mathbb{A} \mathbb{U}\|_2. \quad (51)$$

Par ailleurs, si la matrice $\mathbb{A}$ est normale :

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^* \mathbb{A} \implies \|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A}). \quad (52)$$

Proposition 2.52. 1. Si une matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne, ou symétrique (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = \rho(\mathbb{A})$.

2. Si une matrice $\mathbb{A}$ est unitaire, ou orthogonale (donc normale), on a $\|\mathbb{A}\|_2 = 1$.

Théorème 2.53. 1. Soit $\mathbb{A}$ une matrice carrée quelconque et $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée ou non, quelconque. Alors

$$\rho(\mathbb{A}) \leq \|\mathbb{A}\|. \quad (53)$$

2. Etant donné une matrice $\mathbb{A}$ et un nombre $\varepsilon > 0$, il existe au moins une norme matricielle subordonnée telle que

$$\|\mathbb{A}\| \leq \rho(\mathbb{A}) + \varepsilon. \quad (54)$$

Théorème 2.54. L'application $\|\bullet\|_E : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\|\mathbb{A}\|_E = \left(\sum_{(i,j) \in [1,n]^2} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\text{tr}(\mathbb{A}^* \mathbb{A})}, \quad (55)$$

pour toute matrice $\mathbb{A} = (a_{ij})$ d'ordre n , est une norme matricielle non subordonnée (pour $n \geq 2$), invariante par transformation unitaire et qui vérifie

$$\|\mathbb{A}\|_2 \leq \|\mathbb{A}\|_E \leq \sqrt{n} \|\mathbb{A}\|_2, \quad \forall \mathbb{A} \in \mathcal{M}_n. \quad (56)$$

De plus $\|\mathbb{I}\|_E = \sqrt{n}$.

Théorème 2.55. 1. Soit $\|\bullet\|$ une norme matricielle subordonnée, et $\mathbb{B}$ une matrice vérifiant

$$\|\mathbb{B}\| < 1.$$

Alors la matrice $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ est inversible, et

$$\|(\mathbb{I} + \mathbb{B})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbb{B}\|}.$$

2. Si une matrice de la forme $(\mathbb{I} + \mathbb{B})$ est singulière, alors nécessairement

$$\|\mathbb{B}\| \geq 1$$

pour toute norme matricielle, subordonnée ou non.

2.4 Réduction des matrices

Définition 2.56. Soit $A : V \rightarrow V$ une application linéaire, représenté par une matrice carrée $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ relativement à une base $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in [1, n]}$. Relativement à une autre base $\{\mathbf{f}_i\}_{i \in [1, n]}$, la même application est représentée par la matrice

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P} \quad (57)$$

où $\mathbb{P}$ est la matrice inversible dont le j -ème vecteur colonne est formé des composantes du vecteur $\mathbf{f}_j$ dans la base $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in [1, n]}$:

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{f}_n \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{f}_2 \rangle & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \langle \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{f}_n \rangle \\ \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_1 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_{n-1} \rangle & \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{f}_n \rangle \end{pmatrix} \quad (58)$$

La matrice $\mathbb{P}$ est appelée **matrice de passage de la base $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in [1, n]}$ dans le base $\{\mathbf{f}_i\}_{i \in [1, n]}$** .

Définition 2.57. On dit que la matrice carrée $\mathbb{A}$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible $\mathbb{P}$ telle que la matrice $\mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P}$ soit diagonale.

Remarque. On notera que, dans le cas où $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n$ est diagonalisable, les éléments diagonaux de la matrice $\mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P}$ sont les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de la matrice $\mathbb{A}$, et que le j -ème vecteur colonne $\mathbf{p}_j$ de la matrice $\mathbb{P}$ est formé des composantes, dans la même base que $\mathbb{A}$, d'un vecteur propre associé à la valeur propre λ_j . On a

$$\mathbb{P}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{P} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \iff \mathbb{A} \mathbf{p}_j = \lambda_j \mathbf{p}_j, \quad \forall j \in [1, n]. \quad (59)$$

C'est à dire qu'une matrice est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de vecteurs propres.

Théorème 2.58. 1. Etant donnée une matrice **carrée** $\mathbb{A}$, il existe une matrice **unitaire** $\mathbb{U}$ telle que la matrice $\mathbb{U}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{U}$ soit **triangulaire**.

2. Etant donnée une matrice **normale** $\mathbb{A}$, il existe une matrice **unitaire** $\mathbb{U}$ telle que la matrice $\mathbb{U}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{U}$ soit **diagonale**.

3. Etant donnée une matrice **symétrique** $\mathbb{A}$, il existe une matrice **orthogonale** $\mathbb{U}$ telle que la matrice $\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ soit **diagonale**.

2.5 Suites de vecteurs et de matrices

Définition 2.59. Soit V un espace vectoriel muni d'une norme $\|\bullet\|$, on dit qu'une suite $(\mathbf{v}_k)$ d'éléments de V converge vers un élément $\mathbf{v} \in V$, si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}\| = 0$$

et on écrit

$$\mathbf{v} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{v}_k.$$

Théorème 2.60. Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k = 0$,
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}^k \mathbf{v} = 0$ pour tout vecteur $\mathbf{v}$,
3. $\rho(\mathbb{B}) < 1$,
4. $\|\mathbb{B}\| < 1$ pour au moins une norme matricielle subordonnée $\|\bullet\|$.

Théorème 2.61. Soit $\mathbb{B}$ une matrice carrée, et $\|\bullet\|$ une norme matricielle quelconque. Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbb{B}^k\|^{1/k} = \rho(\mathbb{B}).$$

Index

K, 6
 $\delta_{i,j}$, 7
 $\mathcal{O}(g)$, 1
 $\mathcal{O}(h^p)$, 1
 $\det(\mathbb{A})$, 11
 $\text{im}(\mathbb{A})$, 9
 $\ker(\mathbb{A})$, 9
 $\text{rank}(\mathbb{A})$, 9
 $\mathcal{M}_{m,n}$, 8
 $\text{Sp}(\mathbb{A})$, 12
 $\rho(\mathbb{A})$, 12
 $\text{tr}(\mathbb{A})$, 10
 $\mathbb{I}$ ou $\mathbb{I}_n$, 9
 $\mathcal{O}_{m,n}$, 8

Adhérence, 3

Boule
 fermée, 2
 ouverte, 2

Compacte, 4
 Convergence
 cubique, 6
 linéaire, 6
 ordre, 6
 quadratique, 6
 sous-linéaire, 6
 super-linéaire, 6
 Convergence :ordre, 6

Diagonalisable, 18
 Distance, 2
 Déterminant, 11

Elément propre, 11
 Ensemble
 adhérence, 3
 Borné, 2
 fermé, 3
 intérieur, 3

Ensemble :compact, 4
 Ensemble :orthonormal, 7
 Ensemble :ouvert, 3
 Ensemble :voisinage, 3
 Espace de Banach, 5
 Espace métrique, 2
 complet, 5
 Espace vectoriel
 norme, 15
 normé, 15

Fermé, 3

Fonction
 continuité, 4
 continuité uniforme, 4
 contractante, 5

limite, 4
 lipschitzienne, 5
 Formule
 Taylor-Lagrange, 1
 Taylor-Landau, 2

Gram-Schmidt, 7
 grand $\mathcal{O}$, 1
 groupe des permutations, 10

Hermitienne, 10

Identité, 9
 Intérieur, 3
 Inverse, 9
 Inversible, 9
 Inégalité de Hölder, 15

Kronecker, 7

Matrice
 adjointe, 8
 bande, 13
 bloc, 13
 bloc-carrée, 13
 de passage, 18
 demi largeur de bande, 13
 diagonale, 12
 diagonale dominante, 12
 diagonale par blocs, 14
 diagonale strictement dominante, 12
 diagonalisable, 18
 définie positive, 10
 déterminant, 11
 élément propre, 11
 hermitienne, 10
 identité, 9
 image, 9
 inverse, 9
 inversible, 9
 non inversible, 9
 normale, 10
 norme, 16
 noyau, 9
 nulle $\mathcal{O}_{m,n}$, 8
 orthogonale, 10
 pentadigonale, 13
 permutation, 10
 polynôme caractéristique, 11
 produit de, 8
 projection orthogonale, 7
 rang, 9
 rayon spectrale, 12
 régulière, 9
 semi définie positive, 10
 singulière, 9
 sous matrice, 13

- sous matrice principale, 13
- sous-espace propre, 11
- spectre, 12
- symétrique, 10
- trace, 10
- transposée, 8
- triangulaire, 12
- triangulaire inférieure, 12
- triangulaire par blocs, 14
- triangulaire supérieure, 12
- tridiagonale, 13
- unitaire, 10
- valeur propre, 11
- vecteur propre, 11

Normale, 10

Norme, 15

- invariance par transformation unitaire, 16
- matricielle non subordonnée, 17
- matricielle subordonnée, 16
- vectorielle, 15

Norme matricielle, 16

Normes

- équivalentes, 16

Opérateur de projection, 7

Ordre de convergence, 6

Orthogonale, 10

Ouvert, 3

Partie

- bornée, 2

permutations, 10

Point

- adhérent, 3
- intérieur, 3

Polynôme caractéristique, 11

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, 7

Projection orthogonale :opérateur, 7

Rayon spectral, 12

Régulière, 9

Singulière, 9

Sous matrice, 13

Sous matrice principale, 13

Sous-espace propre, 11

Spectre, 12

Suite

- convergente, 3
- divergente, 3

Suite de Cauchy, 5

Symétrique, 10

Théorème

- accroissements finis, 1
- Bolzano, 1
- de bijection, 2
- de Heine, 5
- des valeurs intermédiaire (TVI), 1

- Rolle, 1

Trace d'une matrice, 10

Unitaire, 10

Valeur propre, 11

- multiplicité algébrique, 11
- multiplicité géométrique, 11

Vecteur

- adjoint, 7
- base, 6
- colonne, 6
- convergence, 18
- ligne, 6
- nul $\mathbf{0}_n$ ou $\mathbf{0}$, 7
- orthogonal à une partie, 7
- orthogonaux, 7
- orthonormaux, 7
- produit scalaire, 7
- propre, 11
- transposé, 7

Voisinage, 3