

*Analyse Numérique I :
Chapitre 6, Intégration numérique*

6.1 Méthodes de quadrature élémentaires

Définition 6.1. Soient $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ la **formule de quadrature élémentaire** donnée par :

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \quad (1)$$

avec $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ $w_j \in \mathbb{R}$ et $x_j \in [a, b]$ distincts deux à deux. L'erreur associée à cette formule de quadrature, notée $\mathcal{E}_{a,b}(f)$, est définie par

$$\mathcal{E}_{a,b}(f) = \int_a^b f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b), \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \quad (2)$$

Définition 6.2. On dit qu'une formule d'intégration (ou formule de quadrature) est d'ordre p ou a pour **degré d'exactitude** p si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à p .

Proposition 6.1. Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $(n + 1)$ points (distincts deux à deux dans $[a, b]$). L'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, muni de la norme infini, à valeurs dans $\mathbb{R}$ est linéaire continue, et elle a pour degré d'exactitude $k \in \mathbb{N}$ si et seulement si

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket.$$

Proposition 6.2. Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $(n + 1)$ points $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ (distincts deux à deux dans $[a, b]$). On note $x = \varphi(t) = \alpha + \beta t$, $\beta \in \mathbb{R}^*$, le changement de variable affine, $t_i = \varphi^{-1}(x_i)$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et

$$\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)) = (\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)) \sum_{i=0}^n w_i g(t_i). \quad (3)$$

Alors $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est de degré d'exactitude k si et seulement si $\mathcal{Q}_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$ est de degré d'exactitude k .

Proposition 6.3. La formule de quadrature élémentaire (1) à $(n + 1)$ points, distincts deux à deux, est de degré d'exactitude k (au moins) si et seulement si

$$(b - a) \sum_{i=0}^n w_i x_i^r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r + 1}, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket. \quad (4)$$

Corollaire 6.1. La formule de quadrature élémentaire (1) à $(n + 1)$ points est de degré d'exactitude 0 au moins

si et seulement si

$$\sum_{i=0}^n w_i = 1.$$

Proposition 6.4. Soient $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ des points deux à deux distincts de l'intervalle $[a, b]$ donnés. Il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (1) à $(n + 1)$ points de degré d'exactitude n au moins.

Proposition 6.5. Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $(n + 1)$ points (distincts deux à deux). On dit qu'elle est **symétrique** si

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \quad (5)$$

Dans ce cas si cette formule est exacte pour les polynômes de degré $2m$ alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré $2m + 1$.

Proposition 6.6. Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie en (1), une formule de quadrature élémentaire à $(n + 1)$ points $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ (distincts deux à deux).

La formule de quadrature est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les poids w_i sont donnés par

$$w_i = \frac{1}{b - a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} dt, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (6)$$

avec $t_i = (x_i - a)/(b - a)$.

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$ alors on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b) \right| \leq \frac{1}{(n + 1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} \int_a^b \prod_{i=0}^n |x - x_i| dx \quad (7)$$

Lemme 6.1. Soient $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 de l'intervalle $[a, b]$ vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Soient $(w_i)_{i=0}^n$ définis par

$$w_i = \frac{1}{b - a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

On a alors

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad w_i = w_{n-i}$$

et la formule de quadrature élémentaire associée est de degré d'exactitude au moins n si n est impaire et au moins $n + 1$ sinon.

Proposition 6.7 (Degré maximal d'exactitude). Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ défini par (1) une formule de quadrature élémentaire de degré d'exactitude au moins n . Elle est alors de degré d'exactitude $n + m$, $m \in \mathbb{N}^*$, au moins si et seulement si

$$\int_a^b \pi_n(x) Q(x) dx = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \quad (8)$$

où π_n est le polynôme de degré $n + 1$ défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i). \quad (9)$$

Le degré maximal d'exactitude d'une formule de quadrature élémentaire à $n + 1$ points est $2n + 1$. De plus, on a

$$(8) \iff \int_a^b \pi_n(x) x^k dx = 0, \quad \forall k \in \llbracket 0, m - 1 \rrbracket. \quad (10)$$

6.2 Formules élémentaires de Newton-Cotes

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad x_i = a + ih \text{ avec } h = (b - a)/n.$$

On a alors

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Proposition 6.8. Soient $f \in C^0([a, b]; \mathbb{R})$ et $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$: $x_i = a + ih$ avec $h = (b - a)/n$.

Les formules de quadrature élémentaires de Newton-Cotes s'écrivent sous la forme

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

où les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont donnés par (6).

Elles sont symétriques et leur degré d'exactitude (d.e. dans le tableau suivant) est égal à n si n est impair et à $n + 1$ sinon.

n	d.e.	w_i (poids)										nom
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$									trapèze
2	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$								Simpson
3	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$							Newton
4	5	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$						Villarcéau
5	5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$					?
6	7	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$				Weddle
7	7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{49}{640}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$			?
8	9	$\frac{989}{28350}$	$\frac{2944}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{454}{2835}$	$\frac{5248}{14175}$	$-\frac{464}{14175}$	$\frac{2944}{14175}$	$\frac{989}{28350}$		?

Table 1: Méthodes de Newton-Cotes

6.3 Formules élémentaires de Gauss-Legendre

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par la formule de récurrence de Bonnet

$$(n + 1)P_{n+1}(t) = (2n + 1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t), \quad \forall n \geq 1 \quad (11)$$

avec $P_0(t) = 1$ et $P_1(t) = t$.

On a les propriétés suivantes:

prop.1 le polynôme de Legendre P_n est de degré n ,

prop.2 la famille $\{P_k\}_{k=0}^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$,

prop.3 pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t)dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}, \quad (12)$$

ce qui correspond à l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour le produit scalaire

$$\langle P_m, P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t)dt.$$

prop.4 Soit $n \geq 1$, P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et ses n racines, notées $(t_i)_{i=0}^n$, sont simples dans $] -1, 1[$, c'est à dire

$$P_n(t) = C \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i), \quad C \in \mathbb{R}^*$$

où les t_i sont 2 à 2 distincts (et ordonnés). Les $(n + 1)$ racines simples de P_{n+1} sont alors chacune dans l'un des $(n + 1)$ intervalles $] -1, t_0[$, $]t_0, t_1[$, $\dots$, $]t_{n-2}, t_{n-1}[$, $]t_{n-1}, 1[$.

Proposition 6.9. Soit $(t_i)_{i=0}^n$ les $(n + 1)$ racines distinctes du polynôme de Legendre de degré $(n + 1)$. On note $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et w_i les poids donnés par (6). La formule de quadrature élémentaire

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

est appelée la formule de quadrature de Gauss-Legendre. C'est l'unique formule de quadrature élémentaire à $(n + 1)$ points ayant pour degré d'exactitude $2n + 1$.

n	exactitude	w_i (poids)	t_i (points)
0	1	1	0
1	3	1/2, 1/2	$-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3}$
2	5	5/18, 8/18, 5/18	$-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5}$

Table 2: Méthodes de Gauss-Legendre sur $[-1, 1]$

Théorème 6.1. Soient $f \in C^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$ et $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ la formule de quadrature de Gauss-Legendre définie dans la Proposition 6.9. Alors on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, a, b) \right| \leq \frac{\|f^{(2n+2)}\|_{\mathcal{X}}}{(2n+2)!} \int_a^b \pi_n(x)^2 dx \quad (13)$$

où $\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, les x_i étant les points de la formule de quadrature.

7 Méthodes de quadrature composées

Définition 7.1. Soit $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 0, k \rrbracket}$ une subdivision de l'intervalle $[\alpha, \beta]$:

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = \beta.$$

On a alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x) dx. \quad (14)$$

Soit $\mathcal{Q}_n(g, a, b)$ la formule de quadrature élémentaire à $n + 1$ points d'ordre p donnée par

$$\mathcal{Q}_n(g, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \approx \int_a^b g(x) dx.$$

La méthode de quadrature composée associée à $\mathcal{Q}_n$, notée $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$, est donnée par

$$\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^k \mathcal{Q}_n(f, \alpha_{i-1}, \alpha_i) \approx \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad (15)$$

Proposition 7.1. Soit $\mathcal{Q}_n$ une formule de quadrature élémentaire à $n+1$ points. Si $\mathcal{Q}_n$ est d'ordre p alors la méthode de quadrature composée associée est aussi d'ordre p : elle est exacte pour tout polynôme de degré p .

Théorème 7.1 ([1], page 43 (admis)). Soient $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$ une méthode de quadrature composée associée à une méthode de quadrature élémentaire $\mathcal{Q}_n$ de degré d'exactitude $p \geq n$ et $f \in \mathcal{C}^{p+1}([\alpha, \beta]; \mathbb{R})$. On a alors

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f, \alpha, \beta) \right| \leq C_p(\beta - \alpha) h^{p+1} \|f^{(p+1)}\|_{\infty} \quad (16)$$

avec $h = \max_{j \in [1, k]} (\alpha_j - \alpha_{j-1})$ et $C_p > 0$. Ceci s'écrit aussi sous la forme

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f, \alpha, \beta) \right| = \mathcal{O}(h^{p+1}) \quad (17)$$

et son **ordre de convergence** est $p+1$.

8 Dominance (rappels?)

Définition 8.1. Soient X un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, et f et g deux fonctions définies sur X à valeurs réelles. On dit que f est dominée par g au voisinage de $a \in \bar{X}$ s'il existe un voisinage U de a et un réel $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in U \cap X, \quad |f(x)| \leq C|g(x)|.$$

On note $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \mathcal{O}(g(x))$, ou $f \underset{a}{=} \mathcal{O}(g)$ (notation de Bachmann), ou, lorsqu'il n'y pas d'ambiguïté sur la valeur de a , $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$.

Proposition 8.1. Soient X un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur X à valeurs réelles, et $a \in \bar{X}$.

- Si a est fini, $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ si et seulement si

$$\exists \eta > 0, \exists C > 0, \text{ tel que } \forall x \in X, |x - a| < \eta \implies |f(x)| \leq C|g(x)|.$$

- Si $a = +\infty$, $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \mathcal{O}(g(x))$ si et seulement si

$$\exists M > 0, \exists C > 0, \text{ tel que } \forall x \in X, x > M \implies |f(x)| \leq C|g(x)|.$$

References

- [1] M. Crouzeix and A.L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, 1992.