Ing. MACS 1 2024-2025

Analyse Numérique I :
Interpolation

1 Polynôme d'interpolation de Lagrange

Définition 1.1. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(n+1)$ couples de $\mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, tels que les x_i sont distincts deux à deux. Le* ***polynôme d'interpolation de Lagrange*** *de $\mathbb{R}_n[X]$, noté P_n, et vérifiant*

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad \mathrm{P}_n(x_i) = y_i \tag{1}$$

est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \mathrm{L}_i(x), \tag{2}$$

où les $\mathrm{L}_i \in \mathbb{R}_n[X]$ sont les ***polynômes de base de Lagrange*** *donnés par*

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{L}_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{3}$$

Théorème 1.1. *Le* ***polynôme d'interpolation de Lagrange****, $\mathcal{P}_n$, associé aux $(n+1)$ couples $(x_i, y_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$, est l'unique polynôme de degré au plus n, vérifiant*

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \ \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{4}$$

1.2 Erreur de l'interpolation

Soit une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que les y_i sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{5}$$

On cherche à évaluer l'erreur $E_n(t) = f(x) - \mathcal{P}_n(t)$, $\forall t \in [a,b]$.

Lemme 1.1 (Séparation des zéros d'une fonction)**.** *Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $(x_i)_{i=0}^n$ dans I, avec $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, tel que*

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad f(x_i) = 0.$$

1. *Si $f \in \mathcal{C}^0(I;\mathbb{R})$, avec f dérivable sur I, alors, il existe $(\xi_i)_{i=1}^n$ dans I, avec $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \ldots < \xi_n < x_n$, tel que*
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad f^{(1)}(\xi_i) = 0.$$
2. *Si $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I;\mathbb{R})$, avec $f^{(n-1)}$ dérivable alors il existe $\xi \in]x_0, x_n[$ tel que $f^{(n)}(\xi) = 0$.*

Théorème 1.2. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i)_{i=0}^n$, $(n+1)$ points distincts de l'intervalle $[a,b]$. Soient $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a;b];\mathbb{R})$ et $\mathcal{P}_n$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré n passant par $(x_i, f(x_i))$, $\forall i \in [\![0,n]\!]$. Alors, $\forall x \in [a,b]$, $\exists \xi_x \in (min(x_i,x), max(x_i,x))$,*

$$f(x) - \mathcal{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{6}$$

1.3 Points de Chebyshev

Trouver $(\bar{x}_i)_{i=0}^n$, $\bar{x}_i \in [a,b]$, distincts deux à deux, tels que

$$\max_{t \in [a,b]} \prod_{i=0}^{n} |t - \bar{x}_i| \leqslant \max_{t \in [a,b]} \prod_{i=0}^{n} |t - x_i|, \ \forall (x_i)_{i=0}^n, \ x_i \in [a,b], \text{ distincts 2 à 2} \tag{7}$$

On a alors le résultat suivant

Théorème 1.3. *Les points réalisant (7) sont les points de Chebyshev donnés par*

$$\bar{x}_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right), \ \forall i \in [\![0,n]\!]. \tag{8}$$

1.4 Stabilité

On note $\Lambda_n = \max\limits_{x \in [a,b]} \sum\limits_{i=0}^{n} |\mathrm{L}_i(x)|$, dites *Constante de Lebesgue.*

Proposition 1.1. *Soient $n \in N^*$ et $x_0, \cdots, x_n$ des points distincts de $[a,b]$. L'application $\mathcal{L}_n : \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ qui a toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ donne le polynôme d'interpolation de Lagrange P_n associés aux couples de $(x_i, f(x_i))_{i \in [\![0,n]\!]}$ est bien définie et linéaire. De plus, en munissant $\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$ de la norme $\|.\|_\infty$, on a*

$$\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leqslant \Lambda_n \|f\|_\infty, \tag{9}$$

ce qui assure la continuité de $\mathcal{L}_n$, et

$$\|\mathcal{L}_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \Lambda_n. \tag{10}$$

Théorème 1.4. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$, on a*

$$\|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leqslant (1 + \Lambda_n) \inf_{\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - \mathrm{Q}\|_\infty \tag{11}$$

- Pour les **points équidistants** $x_i = a + ih$, $i \in [\![0,n]\!]$ et $h = (b-a)/n$,
$$\Lambda_n \geqslant \frac{2^n}{4n^2} \tag{12}$$
et le comportement asymptotique
$$\Lambda_n \approx \frac{2^{n+1}}{e.n\ln(n)} \quad \text{quand } n \to +\infty \tag{13}$$
- Pour les **points de Tchebychev**,
$$\Lambda_n \leqslant C\ln(n), \quad \text{avec} \quad C > 0 \tag{14}$$
et le comportement asymptotique
$$\Lambda_n \approx \frac{2}{\pi} \ln(n) \quad \text{quand } n \to +\infty \tag{15}$$

2 Polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite

Définition 2.1. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ $(n+1)$ *triplets de* $\mathbb{R}^3$*, où les* x_i *sont des points distincts deux à deux de* $\mathbb{R}$*. Le* ***polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite****, noté* H_n*, associé aux* $(n+1)$ *triplets* $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$*, est défini par*

$$\mathrm{H}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^{n} z_i B_i(x) \tag{16}$$

avec

$$A_i(x) = \big(1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i)\big)L_i^2(x) \quad \textit{et} \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \tag{17}$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Théorème 2.1. *Le* ***polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite****,* H_n*, associé aux* $n+1$ *triplets* $(x_i, y_i, z_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$*, est l'unique polynôme de degré au plus* $2n+1$*, vérifiant*

$$\mathrm{H}_n(x_i) = y_i \quad \textit{et} \quad \mathrm{H}_n'(x_i) = z_i, \ \forall i \in [\![0, n]\!] \tag{18}$$

Théorème 2.2. *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x_0, \cdots, x_n$*,* $n+1$ *points distincts de l'intervalle* $[a, b]$*. Soient* $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a;b];\mathbb{R})$ *et* H_n *le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux* $n+1$ *triplets* $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i\in[\![0,n]\!]}$*. On a alors* $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$*, tels que*

$$f(x) - \mathrm{H}_n(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2 \tag{19}$$