Ing. MACS 1 2024-2025

Analyse Numérique I :
Résolution de systèmes linéaires
Méthodes directes

1 Conditionnement

Définition 1.1. *Soit* $\|.\|$ *une norme matricielle subordonnée, le conditionnement d'une matrice régulière* $\mathbb{A}$*, associé à cette norme, est le nombre*

$$\operatorname{cond}(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\| \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\|.$$

Nous noterons $\operatorname{cond}_p(\mathbb{A}) = \|\mathbb{A}\|_p \left\|\mathbb{A}^{-1}\right\|_p$.

Proposition 1.2. *Soit* $\mathbb{A}$ *une matrice régulière. On a les propriétés suivantes*

1. $\forall \alpha \in \mathbb{K}^*$, $\operatorname{cond}(\alpha\mathbb{A}) = \operatorname{cond}(\mathbb{A})$.
2. $\operatorname{cond}_p(\mathbb{A}) \geqslant 1$, $\forall p \in [\![1, +\infty]\!]$.
3. $\operatorname{cond}_2(\mathbb{A}) = 1$ *si et seulement si* $\mathbb{A} = \alpha\mathbb{Q}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{K}^*$ *et* $\mathbb{Q}$ *matrice unitaire*

Théorème 1.3. *Soit* $\mathbb{A}$ *une matrice inversible. Soient* $\boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ *les solutions respectives de*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}.$$

Supposons $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$*, alors l'inégalité*

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leqslant \operatorname{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

est satisfaite, et c'est la meilleure possible : pour une matrice $\mathbb{A}$ *donnée, on peut trouver des vecteurs* $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ *et* $\boldsymbol{\Delta b} \neq \boldsymbol{0}$ *tels qu'elle devienne une égalité.*

Théorème 1.4. *Soient* $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A}$ *deux matrices inversibles. Soient* $\boldsymbol{x}$ *et* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ *les solutions respectives de*

$$\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \ \text{ et } \ (\mathbb{A} + \Delta\mathbb{A})(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{b}.$$

Supposons $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$*, alors on a*

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}\|} \leqslant \operatorname{cond}(\mathbb{A}) \frac{\|\Delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}.$$

Remarque. *Une matrice est donc* ***bien conditionnée*** *si son conditionnement est proche de* 1.

2 Méthodes directes

2.1 Résultats préliminaires

Lemme 2.1 (matrice de permutation)**.** *Soit* $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$*. On note* $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *la matrice identitée dont on a permuté les lignes i et j. Alors la matrice* $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ *est symétrique et orthogonale. Pour toute matrice* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

1. *la matrice* $\mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ *est matrice* $\mathbb{A}$ *dont on a permuté les* ***lignes*** *i et j,*
2. *la matrice* $\mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ *est matrice* $\mathbb{A}$ *dont on a permuté les* ***colonnes*** *i et j,*

Lemme 2.2 (matrice d'élimination)**.** *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *avec* $A_{1,1} \neq 0$*. Il existe une matrice* $\mathbb{E} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *triangulaire inférieure à diagonale unité telle que*

$$\mathbb{E}\mathbb{A}\boldsymbol{e}_1 = A_{1,1}\boldsymbol{e}_1 \tag{1}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ *est le premier vecteur de la base canonique de* $\mathbb{C}^n$.

Théorème 2.3 (décomposition de Schur)**.** *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*. Il existe une matrice unitaire* $\mathbb{U}$ *et une matrice triangulaire supérieure* $\mathbb{T}$ *telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{U}\mathbb{T}\mathbb{U}^* \tag{2}$$

2.2 Méthode de Gauss-Jordan

Proposition 2.4. *Soit* $\mathbb{A}$ *une matrice carrée, inversible ou non. Il existe (au moins) une matrice inversible* $\mathbb{G}$ *telle que* $\mathbb{G}\mathbb{A}$ *soit triangulaire supérieure.*

2.3 Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$

Théorème 2.5 (Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$)**.** *Soit* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *une matrice dont les sous-matrices principales sont inversibles alors il existe*

- *une unique matrice* $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *triangulaire inférieure (lower triangular en anglais) à diagonale unité,*
- *une unique matrice* $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *triangulaire supérieure (upper triangular en anglais) inversible*

telles ques

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}.$$

Corollaire 2.6 ( ). *Si $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice hermitienne définie positive alors elle admet une unique factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$.*

Théorème 2.7 (Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$ avec permutations). *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Il existe une matrice $\mathbb{P}$, produit de matrices de permutation, une matrice $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire inférieure à diagonale unité et une matrice $\mathbb{U} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure inversible telles ques*

$$\mathbb{P}\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{U}. \tag{3}$$

2.4 Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$

Théorème 2.8 (Factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$). *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne inversible admettant une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{U}$. Alors $\mathbb{A}$ s'écrit sous la forme*

$$\mathbb{A} = \mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^* \tag{4}$$

où $\mathbb{D} = \operatorname{diag} \mathbb{U}$ est une matrice à coefficients réels.

Corollaire 2.9 ( ). *Une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation $\mathbb{L}\mathbb{D}\mathbb{L}^*$ avec $\mathbb{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrice triangulaire inférieure à diagonale unité et $\mathbb{D} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs* ***si et seulement si*** *la matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive.*

2.5 Factorisation de Cholesky

Définition 2.10. *Une* ***factorisation régulière de Cholesky*** *d'une matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une factorisation $\mathbb{A} = \mathbb{B}\mathbb{B}^*$ où $\mathbb{B}$ est une matrice triangulaire inférieure inversible.*
Si les coefficients diagonaux de $\mathbb{B}$ sont positifs, on parle alors d'une ***factorisation positive de Cholesky****.*

Théorème 2.11 (Factorisation de Cholesky). *La matrice $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet une factorisation régulière de Cholesky* ***si et seulement si*** *la matrice $\mathbb{A}$ est hermitienne définie positive. Dans ce cas, elle admet une unique factorisation positive.*

2.6 Factorisation $\mathbb{Q}\mathbb{R}$

Définition 2.12 (Matrice élémentaire de Householder). *Soit $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On appelle* ***matrice élémentaire de Householder*** *la matrice $\mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par*

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}) = \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*. \tag{5}$$

Propriété 2.13. *Toute matrice élémentaire de Householder est hermitienne et unitaire.*

Propriété 2.14. *Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ et $\boldsymbol{u} \in \mathbb{K}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$. On note $\boldsymbol{x}_{\parallel} = \operatorname{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} \rangle \boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{x}_{\perp} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\parallel}$. On a alors*

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}_{\perp} + \boldsymbol{x}_{\parallel}) = \boldsymbol{x}_{\perp} - \boldsymbol{x}_{\parallel}. \tag{6}$$

et

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \quad \text{si } \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u} \rangle = 0. \tag{7}$$

Théorème 2.15. *Soient $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{C}^n$ avec $\|\boldsymbol{b}\|_2 = 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| = \|\boldsymbol{a}\|_2$ et $\arg \alpha = -\arg \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \ [\pi]$. On a alors*

$$\mathbb{H}\left(\frac{\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}\|_2}\right)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}. \tag{8}$$

Corollaire 2.16. *Soit $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$ avec $a_1 \neq 0$ et $\exists j \in [\![2, n]\!]$ tel que $a_j \neq 0$. Soient $\theta = \arg a_1$ et*

$$\boldsymbol{u}_{\pm} = \frac{\boldsymbol{a} \pm \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath\theta}\boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{a} \pm \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath\theta}\boldsymbol{e}_1\|}$$

Alors

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_{\pm})\boldsymbol{a} = \mp \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath\theta}\boldsymbol{e}_1 \tag{9}$$

où $\boldsymbol{e}_1$ désigne le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Théorème 2.17 (Factorisation $\mathbb{Q}\mathbb{R}$). *Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Il existe une matrice unitaire $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que*

$$\mathbb{A} = \mathbb{Q}\mathbb{R}. \tag{10}$$

Si $\mathbb{A}$ est réelle alors $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont aussi réelles et l'on peut choisir $\mathbb{Q}$ de telle sorte que les coefficients diagonaux de $\mathbb{R}$ soient positifs. De plus, si $\mathbb{A}$ est inversible alors la factorisation est unique.