Ing. MACS 1 2024-2025

Analyse Numérique I :
Résolution de systèmes non-linéaires

1 Recherche des zéros d'une fonction

1.1 Méthode de dichotomie ou de bissection

- $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$
$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k) = 0, \\ a_{k+1} = x_k,\ b_{k+1} = b_k & \text{si } f(b_k)f(x_k) < 0, \\ a_{k+1} = a_k,\ b_{k+1} = x_k & \text{sinon (i.e. } f(a_k)f(x_k) < 0.) \end{cases}$$
et
$$x_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2.$$

Proposition 1.1. *Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(a)f(b) < 0$ et admettant $\alpha \in]a,b[$ comme **unique** solution de $f(x) = 0$. Alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de dichotomie converge vers α et*
$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{b-a}{2^{k+1}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$
On a alors $\forall \epsilon > 0$, $\forall k \geqslant \frac{\log(\frac{b-a}{\epsilon})}{\log(2)} - 1$
$$|x_k - \alpha| \leqslant \epsilon.$$

1.2 Points fixes d'une fonction (dimension 1)

Théorème 1.2 (Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$ (application continue))**.** *Soient $[a,b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et Φ une application continue de $[a,b]$ dans lui-même. Alors, il existe **au moins** un point $\alpha \in [a,b]$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction** Φ.*
De plus, si Φ est contractante (lipschitzienne de rapport $L \in [0,1[$), c'est à dire
$$\exists L < 1 \text{ t.q. } |\Phi(x) - \Phi(y)| \leqslant L|x-y| \ \forall (x,y) \in [a,b]^2, \tag{1}$$
*alors Φ admet un **unique** point fixe $\alpha \in [a,b]$.*
Pour tout $x_0 \in [a,b]$, la suite
$$x_{k+1} = \Phi(x_k),\ \forall k \in \mathbb{N} \tag{2}$$
est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.
On a les deux estimations suivantes :
$$|x_k - \alpha| \leqslant L^k |x_0 - \alpha|,\ \forall k \geqslant 0, \tag{3}$$
$$|x_k - \alpha| \leqslant \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|,\ \forall k \geqslant 0, \tag{4}$$

Théorème 1.3 (Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$ (application contractante))**.** *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, et Φ une application contractante de I dans lui-même. Alors, il existe un unique point $\alpha \in I$ vérifiant $\Phi(\alpha) = \alpha$. Le point α est appelé **point fixe de la fonction** Φ. Pour tout $x_0 \in I$, la suite*
$$x_{k+1} = \Phi(x_k),\ \forall k \in \mathbb{N} \tag{5}$$
est bien définie et elle converge vers α avec un ordre 1 au moins.

Théorème 1.4 (Théorème du point fixe dans $\mathbb{R}$ (application $\mathcal{C}^1$))**.** *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, non vide, et $\Phi \in \mathcal{C}^1(I)$ vérifiant $\Phi(I) \subset I$ et*
$$\exists L < 1 \text{ tel que } \forall x \in I,\ |\Phi'(x)| \leqslant L, \tag{6}$$
Soit $x_0 \in I$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. On a alors
1. *la fonction Φ admet un unique point fixe $\alpha \in I$,*
2. *$\forall k \in \mathbb{N},\ x_k \in I$,*
3. *la suite (x_k) converge vers α avec un ordre 1 au moins.*
4. *Si $x_0 \neq \alpha$, alors*
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \tag{7}$$
et, si $\Phi'(\alpha) \neq 0$, la convergence est d'ordre 1 (exactement).

Théorème 1.5 (Convergence locale du point fixe)**.** *Soit α un point fixe d'une fonction Φ de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de α.*
Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$, alors il existe $\delta > 0$ pour lequel x_k converge vers α pour tout x_0 tel que $|x_0 - \alpha| \leqslant \delta$. De plus, si $x_0 \neq \alpha$, on a
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha} = \Phi'(\alpha). \tag{8}$$
si $\Phi'(\alpha) \neq 0$, la convergence est d'ordre 1 (exactement).

1.2.1 Points fixes attractifs et répulsifs

Soit $\Phi : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ admettant un point fixe $\alpha \in [a,b]$.

- Si $|\Phi'(\alpha)| < 1$ alors α est un point fixe attractif,
- Si $|\Phi'(\alpha)| > 1$ alors α est un point fixe répulsif.

1.2.2 Ordres

Proposition 1.6. *Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $\Phi \in \mathcal{C}^{p+1}(\mathcal{V})$ pour un certain voisinage $\mathcal{V}$ de α point fixe de Φ. Si $\Phi^{(i)}(\alpha) = 0$, pour $1 \leqslant i \leqslant p$, alors la méthode de point fixe associée à la fonction Φ est d'ordre $(p+1)$ au moins et*
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1} - \alpha}{(x_k - \alpha)^{p+1}} = \frac{\Phi^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)!}. \tag{9}$$
Elle est d'ordre $(p+1)$ (exactement) si $\Phi^{(p+1)}(\alpha) \neq 0$.

1.2.3 Méthode de la corde

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b) - f(a)} f(x_k),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

On pose $\Phi(x) = x - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x)$, alors $x_{k+1} = \Phi(x_k)$.

Proposition 1.7 (convergence, méthode de la corde)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$ et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. On suppose de plus que $\forall x \in [a,b]$*
$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \leqslant f(x) \leqslant \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \tag{10}$$
$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \tag{11}$$

On note $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par $x_0 \in [a,b]$ et pour tout $k \geqslant 0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\lambda}. \tag{12}$$

alors la suite (x_k) est bien définie et converge vers l'unique racine $\alpha \in [a,b]$ de f.

Proposition 1.8 (ordre de convergence de la méthode de la corde)**.** *Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ tel que $f(b) \neq f(a)$. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la méthode de la corde*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(x_k),\ \forall k \in \mathbb{N} \text{ avec } x_0 \in [a,b]$$

Si cette suite converge vers $\alpha \in]a,b[$ alors la convergence est au moins d'ordre 1.
De plus, si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un certain voisinage $\mathcal{V}$ de α et si $f'(\alpha) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ alors la convergence est au moins d'ordre 2.

1.2.4 Méthode de Newton

Proposition 1.9 (convergence de la méthode de Newton)**.** *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un certain voisinage d'une racine simple α de f. Soit x_0 donné dans ce voisinage, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de Newton*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

est localement convergente d'ordre 2.

1.3 Méthode de la sécante

Alternative à la méthode de Newton lorsque l'on ne connait pas la dérivée de la fonction f :

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Proposition 1.10 (Convergence méthode de la sécante)**.** *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un certain voisinage d'une racine simple α de f. Soient x_{-1} et x_0 donnés dans ce voisinage tels que $f(x_{-1}) \neq f(x_0)$, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la méthode de la sécante*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k),\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

est localement convergente d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$.

2 Résolution de systèmes non linéaires

Soient $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^0(U;\mathbb{R}^N)$

Trouver $\boldsymbol{\alpha} \in U \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0 \iff \begin{cases} \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_N) &= 0 \\ \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_N) &= 0 \\ \vdots & \\ \boldsymbol{f}_N(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_N) &= 0 \end{cases}$$

On pose, par ex., $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 0 \ \Leftrightarrow \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$$

Trouver $\boldsymbol{\alpha} \in U \subset \mathbb{R}^N$ tel que

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha} \iff \begin{cases} \boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_N) &= \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\Phi}_2(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_N) &= \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots & \\ \boldsymbol{\Phi}_N(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_N) &= \boldsymbol{\alpha}_N \end{cases}$$

2.1 Point fixe

Théorème 2.1 (Point fixe de Banach)**.** *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $U \subset \mathcal{B}$ un sous-ensemble fermé. On suppose que $\boldsymbol{\Phi} : U \longrightarrow U$ est une application strictement contractante, i.e.*

$$\exists L \in [0,1[,\quad \|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y})\| \leqslant L\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|,\quad \forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in U \times U. \tag{15}$$

Alors

1. *$\boldsymbol{\Phi}$ admet un unique point fixe $\boldsymbol{\alpha} \in U$ (i.e. unique solution de $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$).*
2. *La suite des itérés $\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}^{[k]})$ converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ pour toute valeur initiale $\boldsymbol{x}^{[0]} \in U$.*
3. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$,*
$$\left\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{x}^{[k]}\right\| \leqslant \frac{L^{k-l}}{1-L}\left\|\boldsymbol{x}^{[l+1]} - \boldsymbol{x}^{[l]}\right\|,\quad 0 \leqslant l \leqslant k \tag{16}$$

2.1.1 Méthode de Newton

$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction suffisament régulière. On défini la **matrice Jacobienne de** $\boldsymbol{f}$, notée $\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}$, par

$$\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

Théorème 2.2. *Soit $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$. On suppose que la matrice Jacobienne appliquée en $\boldsymbol{x}$, $\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})$ est inversible dans un voisinage de $\boldsymbol{\alpha}$, avec $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$. Alors pour tout $\boldsymbol{x}^{[0]}$ suffisament proche de $\boldsymbol{\alpha}$ la suite définie par*

$$\boldsymbol{x}^{[k+1]} = \boldsymbol{x}^{[k]} - \left(\left(\mathbb{J}_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^{[k]})\right)\right)^{-1} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{[k]})$$

converge vers $\boldsymbol{\alpha}$ et la convergence est d'ordre 2.