## Analyse Numérique I\*

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année / L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications Institut Galilée Université Paris XIII.

2025/11/29

# Chapitre VI

Intégration numérique

## Plan

- Méthodes de quadrature élémentaires
- Formules élémentaires de Newton-Cotes
- Formules élémentaires de Gauss-Legendre
- Méthodes de quadrature composées
- Erreurs méthodes composées

On propose de chercher des approximations de

$$I = \int_{a}^{b} f(x) dx$$

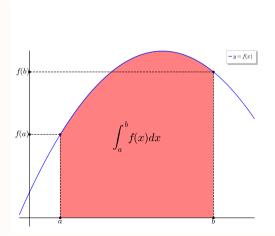


Figure: Représentation de  $\int_a^b f(x)dx$  (aire de la surface colorée)

## **Definition 6.1**

Soient  $f \in C^0([a,b];\mathbb{R})$  et  $Q_n(f,a,b)$  la formule de quadrature élémentaire donnée par :

$$Q_n(f,a,b) \stackrel{\mathsf{def}}{=} (b-a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \tag{1}$$

avec  $\forall j \in [0, n]$   $w_j \in \mathbb{R}$  et  $x_j \in [a, b]$  distincts deux à deux. L'erreur associée à cette formule de quadrature, notée  $\mathcal{E}_{a,b}(f)$ , est définie par

$$\mathcal{E}_{a,b}(f) = \int_{a}^{b} f(x) dx - \mathcal{Q}_{n}(f, a, b), \quad \forall f \in \mathcal{C}^{0}([a, b]; \mathbb{R})$$
 (2)

## **Definition 6.2**

On dit qu'une formule d'intégration (ou formule de quadrature) est d'ordre p ou a pour **degré d'exactitude** p si elle est exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à p.



## Exercice 1 &

Soient f une fonction définie sur [a,b] à valeurs réelles et  $n \in \mathbb{N}$ . On souhaite approcher  $\int_a^b f(x)dx$  par  $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$  une formule de quadrature élémentaire

$$Q_n(f,a,b) \stackrel{\mathsf{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$
 (1)

où les  $(x_i)_{i=0}^n$  sont des points distincts 2 à 2 dans [a,b] et les  $(w_i)_{i=0}^n$  sont des réels.

- Démontrer que l'application  $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$  définie de  $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ , muni de la norme infini, à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est linéaire et continue.
- Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$  est de degré d'exactitude k si et seulement si

$$\forall r \in [0, k], \quad \mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx. \tag{2}$$



$$Q_n(f,a,b) \stackrel{\mathsf{def}}{=} (b-a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \tag{1}$$

## Proposition 6.1

Soit  $Q_n(f, a, b)$  definie en (1), une formule de quadrature élémentaire à (n + 1) points (distincts deux à deux dans [a, b]).

L'application  $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$  définie de  $\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ , muni de la norme infini, à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est linéaire continue, et elle a pour degré d'exactitude  $k \in \mathbb{N}$  si et seulement si

$$Q_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx, \quad \forall r \in [0, k].$$

## Plan

- Méthodes de quadrature élémentaires
- Formules élémentaires de Newton-Cotes
- Formules élémentaires de Gauss-Legendre
- Méthodes de quadrature composées
- Erreurs méthodes composées

# Formule du rectangle à gauche

$$f(x) \approx f(a)$$

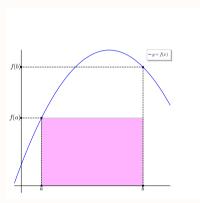


Figure: Formule du rectangle à gauche :  $\int_a^b f(x)dx \approx Q_0(f,a,b) = (b-a)f(a)$  (aire de la surface colorée)

# Formule du rectangle à droite

$$f(x) \approx f(b)$$

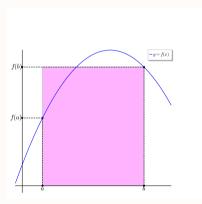


Figure: Formule du rectangle à droite :  $\int_a^b f(x)dx \approx Q_0(f,a,b) = (b-a)f(b)$  (aire de la surface colorée)

# Formule du point milieu

$$f(x) \approx f((a+b)/2)$$

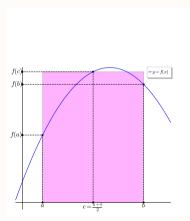


Figure: Formule du point milieu :  $\int_a^b f(x) dx \approx Q_0(f, a, b) = (b - a)f((a + b)/2)$  (aire de la surface colorée)

Montrer que les formules des rectangles sont de degré d'exactitude 0 et que la formule du point milieu est de degré d'exactitude 1.

La précision de ces formules n'est pas bonne!

Comment y remédier?

Montrer que les formules des rectangles sont de degré d'exactitude 0 et que la formule du point milieu est de degré d'exactitude 1.

La précision de ces formules n'est pas bonne!

## Comment y remédier?

En approchant la fonction f par des polynômes d'interpolation de degré  $\geq 1$ .

Soient f une fonction définie sur [a,b] à valeurs réelles et  $n \in \mathbb{N}$ . On souhaite approcher  $\int_a^b f(x)dx$  par  $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$  une formule de quadrature élémentaire

$$Q_n(f,a,b) \stackrel{\mathsf{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \tag{1}$$

où les  $(x_i)_{i=0}^n$  sont des points distincts 2 à 2 dans [a,b] et les  $(w_i)_{i=0}^n$  sont des réels.

On note  $x = \varphi(t) = \alpha + \beta t$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^*$ , le changement de variable affine,  $t_i = \varphi^{-1}(x_i)$ ,  $\forall i \in [0, n]$ , et

$$Q_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)) = (\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)) \sum_{i=0}^n w_i g(t_i).$$
 (2)

Expliciter  $\varphi^{-1}$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$ .

- Montrer que si  $Q_n(f, a, b)$  est de degré d'exactitude k alors  $Q_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$  est de degré d'exactitude k.
- Q. 3 Montrer que si  $Q_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$  est de degré d'exactitude k alors  $Q_n(f, a, b)$  est de degré d'exactitude k.

$$Q_n(f,a,b) \stackrel{\mathsf{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x) dx \tag{1}$$

## **Proposition 6.2**

Soit  $Q_n(f, a, b)$  definie en (1), une formule de quadrature élémentaire à (n + 1) points  $(x_i)_{i \in [0, n]}$  (distincts deux à deux dans [a, b]).

On note  $x = \varphi(t) = \alpha + \beta t$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^*$ , le changement de variable affine,  $t_i = \varphi^{-1}(x_i), \forall i \in [0, n]$ , et

$$Q_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b)) = (\varphi^{-1}(b) - \varphi^{-1}(a)) \sum_{i=0}^n w_i g(t_i).$$
 (3)

Alors  $Q_n(f, a, b)$  est de degré d'exactitude k si et seulement si  $Q_n(g, \varphi^{-1}(a), \varphi^{-1}(b))$  est de degré d'exactitude k.

Par ex. 
$$\varphi(t) = a + (b-a)t$$
,  $\varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$ .



## Exercice 3 4

Soient f une fonction définie sur [a,b] à valeurs réelles,  $n \in \mathbb{N}$  et  $(x_i)_{i=0}^n$  des points distincts 2 à 2 dans [a,b]. On souhaite approcher  $\int_a^b f(x) dx$  par  $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ , une formule de quadrature élémentaire,

$$Q_n(f,a,b) \stackrel{\mathsf{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \tag{1}$$

où les  $(w_i)_{i=0}^n$  sont des réels à déterminer.

Démontrer que (1) est de degré d'exactitude k (au moins) si et seulement si

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n}w_{i}x_{i}^{r}=\frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, \quad \forall r \in [0,k].$$
 (2)

Les points  $(x_i)_{i=0}^n$  étant fixés, montrer qu'il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (1) à (n+1) points de degré d'exactitude n au moins.

$$Q_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x) dx$$
 (1)

#### Proposition 6.3

La formule de quadrature élémentaire (1) à (n+1) points, distincts deux à deux, est de degré d'exactitude k (au moins) si et seulement si

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n}w_{i}x_{i}^{r}=\frac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, \quad \forall r \in [0,k].$$
 (4)

## **Proposition 6.4**

Soient  $(x_i)_{i\in \mathbb{T}_0, p\mathbb{T}}$  des points deux à deux distincts de l'intervalle [a, b] donnés. Il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (1) à (n+1) points de degré d'exactitude n au moins. Les poids  $(w_i)_{i=0}^n$  sont alors solutions de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \end{pmatrix}$$
Méthodes de quadrature élémentaires

## Exercice 4 🥸

Soient  $(x_i)_{i=0}^n$  (n+1) points donnés et distincts 2 à 2 d'un intervalle [a,b] (a < b). Ecrire une fonction algorithmique WeightsFromPoints permettant de déterminer les poids  $(w_i)_{i=0}^n$  de telle sorte que la formule de quadrature élémentaire associée soit de degré d'exactitude n au moins en s'inspirant de résultats obtenus dans la démonstration de la Proposition 5.1.4. On pourra utiliser la fonction algorithmique  $\mathbf{x} \leftarrow \operatorname{Solve}(\mathbb{A}, \mathbf{b})$  permettant de résoudre le système linéaire  $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

$$(b-a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

$$Q_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x) dx$$
 (1)

#### **Proposition 6.5**

Soit  $Q_n(f, a, b)$  definie en (1), une formule de quadrature élémentaire à (n + 1) points (distincts deux à deux). On dit qu'elle est **symétrique** si

$$\forall i \in [0, n], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}.$$
 (6)

Dans ce cas si cette formule est exacte pour les polynômes de degré 2m alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré 2m + 1.

voir Exercice 5 ₩

#### Exercice 5 🍇

Soient f une fonction définie sur [a,b] à valeurs réelles et  $n \in \mathbb{N}$ . On souhaite approcher  $\int_a^b f(x) dx$  par  $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ , une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$Q_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$
 (1)

où les  $(x_i)_{i=0}^n$  sont des points distincts 2 à 2 dans [a,b] et les  $(w_i)_{i=0}^n$  sont des réels vérifiant

$$\forall i \in [0, n], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}.$$
 (2)

Ftablir que

$$\forall i \in [0, n], \ x_i - \frac{a+b}{2} = -\left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2}\right).$$

- 3 Si n est impair, montrer que  $\forall i \in [0, n], x_i \neq \frac{a+b}{2}$ .
- En justifiant, donner explicitement un exemple de points (x<sub>i</sub>)<sup>n</sup><sub>i=0</sub> vérifiant (2) (n restant quelconque).
- 0.2) Démontrer que l'application  $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$  définie de  $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$ , muni de la norme infini, à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est linéaire et continue.

Soient  $m \in \mathbb{N}^*$  et P un polynôme de degré 2m+1 s'écrivant sous la forme

$$P(x) = \sum_{i=0}^{2m+1} a_j x^j$$

avec  $(a_j)_{j=0}^{2m+1}$  des réels et  $a_{2m+1} \neq 0$ .

- Calculer les dérivées P<sup>(2m+1)</sup> et P<sup>(2m+2)</sup>.
  - a Montrer que

$$P(x) = C\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} + R(x)$$
 (3)

en déterminant le degré maximum de R et en exprimant C en fonction des  $(a_j)_{j=0}^{2m+1}$ .

Q. 4 Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_{a}^{b} \left( x - \frac{a+b}{2} \right)^{2k+1} dx = 0. \tag{4}$$

- Q. 5 On suppose que la formule de quadrature élémentaire (1) est exacte pour les polynômes de  $\mathbb{R}_{2m}[X]$ .
  - ⑤ Déduire de (3) et (4) que la formule de quadrature élémentaire (1) est exacte pour P si et seulement si

$$(b-a)\sum_{i=0}^{n}w_{i}\left(x_{i}-\frac{a+b}{2}\right)^{2m+1}=0.$$
 (5)

- 2 En utilisant Q. 1, démontrer que (5) est toujours vérifiée.
- Q. 6

  Ecrire de manière très précise le résultat démontré.

$$Q_n(f,a,b) \stackrel{\mathsf{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x) dx \tag{1}$$

#### **Proposition 6.6**

Soit  $Q_n(f, a, b)$  definie en (1), une formule de quadrature élémentaire à (n + 1) points  $(x_i)_{i \in [0, n]}$  (distincts deux à deux).

La formule de quadrature est de degré d'exactitude n au moins si et seulement si pour tout  $i \in [0, n]$ , les poids  $w_i$  sont donnés par

$$w_{i} = \frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} \prod_{\substack{j=0 \ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_{j}}{x_{i} - x_{j}} dx = \int_{0}^{1} \prod_{\substack{j=0 \ j \neq i}}^{n} \frac{t - t_{j}}{t_{i} - t_{j}} dt, \quad \forall i \in [0, n]$$
 (7)

avec  $t_i = (x_i - a)/(b - a)$ .

Si  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$  alors on a

$$\left| \int_{a}^{b} f(x) dx - \mathcal{Q}_{n}(f, a, b) \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_{\infty} \int_{a}^{b} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_{i}) \right| dx$$
 (8)

voir Exercice 6 ₩



#### Exercice 6 49

Soient a,b deux réels, a < b et  $\mathcal{F}([a;b]; \mathbf{R})$  l'espace des fonctions définie de [a;b] à valeurs dans  $\mathbf{R}$ . Soient  $f \in \mathcal{F}([a;b]; \mathbf{R})$  et  $n \in \mathbf{N}$ . On souhaite approcher  $\int_a^b f(x) dx$  par  $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ , une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$Q_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$
 (1)

où les  $(x_i)_{i=0}^n$  sont des points distincts 2 à 2 dans [a,b] et les  $(w_i)_{i=0}^n$  sont des réels.

Démontrer que l'application  $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$  définie de  $\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est linéaire.

On note, pour tout  $i \in [0, n]$ ,

$$L_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

et  $t_i=(x_i-a)/(b-a)$ . On rappelle que le polynôme d'interpolation de Lagrange

associés aux points  $(x_i, f(x_i))_{i \in [0,n]}$  s'écrit

$$\mathcal{L}_n(f)(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i)$$

et que si  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$  alors on a

$$\forall x \in [a, b], \ \exists \xi_x \in [a, b], \ f(x) - \mathcal{L}_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$
 (2)

Q. 2 Montrer que

$$\frac{1}{b-a} \int_{a}^{b} L_{i}(x) dx = \int_{0}^{1} \prod_{\substack{j=0\\j \neq i}}^{n} \frac{t-t_{j}}{t_{i}-t_{j}} dt.$$
 (3)

(Q. 3) (a) Montrer que si  $Q_n$  a pour degré d'exactitude n au moins alors, on a

$$\forall i \in [0, n], \quad w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(x) dx.$$
 (4)

- Montrer que si (3) est vérifiée, alors Q<sub>n</sub> a pour degré d'exactitude n au moins
- On suppose les poids  $(w_i)_{i=0}^n$  donnés par (3). Montrer que si  $f \in C^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$  alors on a

$$\left|\int_{a}^{b} f(x) dx - \mathcal{Q}_{n}(f, a, b)\right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \left\|f^{(n+1)}\right\|_{\infty} \int_{a}^{b} \left|\prod_{i=0}^{n} (x - x_{i})\right| dx \qquad (5)$$



## Lemme 6.1

Soient  $(x_i)_{i=0}^n$  des points distincts 2 à 2 de l'intervalle [a, b] vérifiant

$$\forall i \in [0, n], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Soient  $(w_i)_{i=0}^n$  définis par

$$w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b \prod_{\substack{j=0\\i\neq j}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} dx, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

On a alors

$$\forall i \in [0, n], \quad w_i = w_{n-i}$$

et la formule de quadrature élémentaire associée est de degré d'exactitude au moins n si n est impaire et au moins n+1 sinon.

Soient  $(x_i)_{i=0}^n$  des points distincts 2 à 2 de l'intervalle [a,b] vérifiant

$$\forall i \in [0, n], \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

On note  $L_i \in \mathbb{R}_n[X], \ i \in \llbracket 0, n 
rbracket$  les (n+1) polynômes de base de Lagrange définis par

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

et vérifiant  $L_i(x_j) = \delta_{i,j}, \, \forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ 

Soit  $i \in [0, n]$ . Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathrm{L}_i((a+b)-x) = \mathrm{L}_{n-i}(x).$$

Soient  $(w_i)_{i=0}^n$  définis par

$$w_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b \mathcal{L}_i(t) dt, \quad \forall i \in [0, n]$$

Montrer que l'on a alors

$$\forall i \in [0, n], \quad w_i = w_{n-i}$$

$$Q_n(f,a,b) \stackrel{\mathsf{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x) dx \tag{1}$$

#### **Proposition 6.7**

Soit  $Q_n(f,a,b)$  défini par (1) une formule de quadrature élémentaire de degré d'exactitude au moins n. Elle est alors de degré d'exactitude n+m,  $m \in \mathbb{N}^*$ , au moins si et seulement si

$$\int_{a}^{b} \pi_{n}(x) Q(x) dx = 0, \ \forall Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X]$$

$$\tag{9}$$

où  $\pi_n$  est le polynôme de degré n+1 défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i). \tag{10}$$

Le degré maximal d'exactitude d'une formule de quadrature élémentaire à n+1 points est 2n+1. De plus, on a

$$(9) \Longleftrightarrow \int_{a}^{b} \pi_{n}(x) x^{k} dx = 0, \ \forall k \in [0, m-1].$$

voir Exercice 8

#### Exercice 8 4

Soient a,b deux réels, a < b et  $\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$  l'espace des fonctions définie de [a;b] à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soient  $f \in \mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On souhaite approcher  $\int_a^b f(x) dx$  par  $\mathcal{Q}_n(f,a,b)$ , une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$Q_n(f,a,b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$
 (1)

où les  $(x_i)_{i=0}^n$  sont des points distincts 2 à 2 dans [a,b] et les  $(w_i)_{i=0}^n$  sont des réels. On suppose que (1) a pour degré d'exactitude n au moins.

Q. 1 Démontrer que l'application  $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f,a,b)$  définie de  $\mathcal{F}([a;b];\mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est linéaire.

Soient  $\pi_n$  le polynôme de degré (n+1) défini par

$$\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

et  $m \in \mathbb{N}^*$ 

rappel division euclidienne: Soient A et B deux polynômes, B étant non nul, alors il existe un unique couple de polynômes (O, R) tel que

$$A = BQ + R$$
 et  $deg(R) < deg(B)$ .

Dans la division euclidienne de A par B, Q est le quotient et R le reste.

④ Soit P∈ R<sub>n+m</sub>[X]. Déterminer les degrés maximaux des polynômes Q (quotient) et R (reste), obtenus par la division euclidienne de P par π<sub>n</sub>, et satisfaisant.

$$\mathbf{P}=\pi_{n}\mathbf{Q}+\mathbf{R}.$$

En déduire que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n+m}[X], \int_{a}^{b} P(x)dx - Q_n(P, a, b) = \int_{a}^{b} Q(x)\pi_n(x)dx.$$
 (2)

où Q est le quotient de la division euclidienne de P par  $\pi_n$ ,

Q. 3

Démontrer que (1) a pour degré d'exactitude n + m au moins si et seulement si

$$\forall \mathbf{H} \in \mathbb{R}_{m-1}[X], \quad \int_{a}^{b} \pi_n(x) \mathbf{H}(x) dx = 0.$$
 (3)

Q. 4 En déduire le degré maximal d'exactitude de (1).

Démontrer que (1) a pour degré d'exactitude n + m au moins si et seulement si

$$\int_{a}^{b} \pi_{n}(x) x^{k} dx = 0, \ \forall k \in [0, m-1].$$
 (4)

## Avec une discrétisation régulière de l'intervalle [a, b]:

## Méthode de Newton-Cotes .

Bien d'autres méthodes peuvent être obtenues (avec d'autres points), certaines permettant le calcul d'intégrales avec poids de la forme  $\int_a^b w(x)f(x)dx$ :

- méthode de Newton-Cotes ouvertes,
- méthode de Gauss-Legendre,
- méthode de Gauss-Jacobi.
- méthode de Gauss-Tchebychev,
- méthode de Gauss-Laguerre.
- méthode de Gauss-Hermitte,
- méthode de Gauss-Lobatto,
- méthode de Romberg...

## Plan

- Méthodes de quadrature élémentaires
- Formules élémentaires de Newton-Cotes
- Formules élémentaires de Gauss-Legendre
- Méthodes de quadrature composées
- Erreurs méthodes composées

#### Proposition 6.8

Soient  $f \in \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$  et  $(x_i)_{i \in [0,n]}$  une discrétisation régulière de l'intervalle [a,b]:  $x_i = a + ih$  avec h = (b-a)/n. Les formules de quadrature élémentaires de Newton-Cotes s'écrivent sous la forme

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^{n} w_{i} f(x_{i})$$

où les poids  $(w_i)_{i=0}^n$  sont donnés par (7).

Elles sont symétriques et leur degré d'exactitude (d.e. dans le tableau suivant) est égal n si n est impair et n+1 sinon.

n	d.e.	$w_i$ (poids)									nom
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$								trapèze
2	3	$\frac{1}{6}$	2/3	$\frac{1}{6}$							Simpson
3	3	1/8	38	38	18						Newton
4	5	7 90	16 45	$\frac{2}{15}$	16 45	$\frac{7}{90}$					Villarceau
5	5	19 288	2 <u>5</u> 96	25 144	25 144	25 96	19 288				?
6	7	41 840	9 35	9 280	34 105	$\frac{9}{280}$	9 35	41 840			Weddle
7	7	751 17280	3577 17280	49 640	2989 17280	2989 17280	49 640	3577 17280	751 17280		?
8	9	989 28350	2944 14175	$-\frac{464}{14175}$	5248 14175	$-\frac{454}{2835}$	5248 14175	$-\frac{464}{14175}$	2944 14175	989 28350	?

Table: Méthodes de Newton-Cotes

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \right)$$
 (12)

Calcul des coefficients  $w_i$ ?:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \right)$$
 (12)

## Calcul des coefficients $w_i$ ? : Méthode 1 :

Formule doit être exacte pour les monômes  $1, X, X^2$ : on résoud le système

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 &= 1, & (f(x) = 1) \\ aw_0 + (a+h)w_1 + (a+2h)w_2 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = a+h, & (f(x) = x) \\ a^2w_0 + (a+h)^2w_1 + (a+2h)^2w_2 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3} (3a^2 + 6ah + 4h^2), & (f(x) = x^2). \end{cases}$$

Mais il y a plus simple ...

$$\int_{a}^{b} f(x) dx \approx \frac{b - a}{6} \left( f(a) + 4f(\frac{a + b}{2}) + f(b) \right)$$
 (12)

#### Calcul des coefficients $w_i$ ? : Méthode 2 :

Formule doit être exacte pour les monômes  $1, X, X^2$  et les  $w_i$  ne dépendent pas de l'intervalle [a, b]: on peut les calculer sur l'intervalle [0, 1] en résolvant le système

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 & = 1, & (f(x) = 1) \\ 0 \times w_0 + \frac{1}{2}w_1 + 1 \times w_2 & = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, & (f(x) = x) \\ 0^2 \times w_0 + (\frac{1}{2})^2 \times w_1 + (1)^2 \times w_2 & = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, & (f(x) = x^2). \end{cases}$$

Formules élémentaires de Newton-Cotes

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \right)$$
 (12)

Calcul des coefficients  $w_i$ ? : Méthode 3 :  $\forall i \in [0, n]$ 

$$w_i = \int_0^1 L_i(t) dt$$
, avec  $L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} = \prod_{\substack{j=0 \ j \neq i}}^n \frac{nt - j}{i - j}$ 

$$L_0(t) = \frac{2t - 1}{-1} \frac{2t - 2}{-2} = (2t - 1)(t - 1)$$

$$L_1(t) = \frac{2t}{1} \frac{2t - 2}{-1} = -4(t - 1)t$$

$$L_2(t) = \frac{2t}{2} \frac{2t - 1}{1} = (2t - 1)t$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \right)$$
 (12)

Degré d'exactitude 3 : au moins ordre 3

$$\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} \neq \frac{1}{6} \left( 0^4 + 4(\frac{1}{2})^4 + 1^4 \right) = \frac{5}{24}$$

## Exercice 9 🧆

- Ecrire une fonction algorithmique WeightsPointsNC retournant les (n+1) points et les (n+1) points de la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à (n+1) points.
- Ecrire une fonction algorithmique QuadElemNC retournant la valeur de  $Q_n(f, a, b)$  correpondant à la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à (n + 1) points.

# Sage http://www.sagemath.org/

```
cuvelier@ardwen:~$ sage
 SageMath version 10.3, Release Date: 2024-03-19
 Using Python 3.12.3. Type "help()" for help.
sage: %paste
var('t')
def BaseLagrange(n,i):
 I = 1
  for i in range(n+1):
   if i!=i:
      L=L*(n*t-j)/(i-j)
 return L
def NewtonCotes(n):
 W=[];
  for i in range(n+1):
    W.append(integrate(BaseLagrange(n.i).t.0.1))
 return W
## -- End pasted text --
sage: NewtonCotes(4)
[7/90, 16/45, 2/15, 16/45, 7/90]
sage:
```

## Problème lorsque *n* devient grand! : illustration sur un exemple simple.

Soit f(x) = 3x + 2, a = 0 et b = 1.

- Les formules de Newton-Cotes à (n + 1) points, n ≥ 1, sont exactes car f est un polynôme de degré 1.
- les poids  $(w_i)_{i \in [0,n]}$  peuvent être calculés sous forme fractionnaire.

Or  $x_i$  et  $w_i$  sont approchés à  $\approx 1e-16$  près sur ordinateur

$$x_i = i/n \approx \tilde{x}_i$$
 et  $w_i \approx \tilde{w}_i$ 

- Newton-Cotes exacte :  $\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$
- Newton-Cotes approchée :  $\sum_{i=0}^{n} \tilde{w}_i f(\tilde{x}_i)$



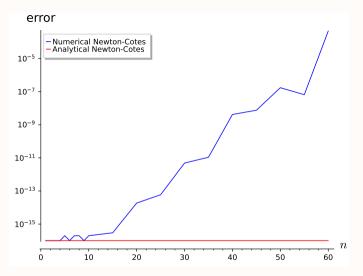


Figure: Instabilité des méthodes de Newton-Cotes élémentaires

#### Remarque 6.1

Pour les méthodes de Newton-Cotes, il ne faut pas trop "monter" en ordre car le phénomène de Runge (forte oscillation possible du polynôme d'interpolation sur les bords de l'intervalle) peut conduire à de très grandes erreurs. Au delà de n=7, des poids négatifs apparaissent dans les formules et les rendent beaucoup plus sensibles aux erreurs d'arrondis.

Que faire pour pallier ce problème : Sortir couvert!†

### Plan

- Méthodes de quadrature élémentaires
- o Formules élémentaires de Newton-Cotes
- Formules élémentaires de Gauss-Legendre
- Méthodes de quadrature composées
- Erreurs méthodes composées

$$Q_n(f,a,b) \stackrel{\mathsf{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \approx \int_a^b f(x) dx \tag{1}$$

Peut-on avoir une formule de quadrature de degré d'exactitude 2n + 1?

Pour celà il faut déterminer les points  $(x_i)_{i=0}^n$  appartenant à [a,b] distincts 2 à 2.



Exercice 10

Déterminer les points  $t_0$ ,  $t_1$  de l'intervalle [-1,1] et les poids  $w_0$ ,  $w_1$  tel que la formule de quadrature

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx 2\sum_{i=0}^{1} w_i g(t_i)$$

soit de degré d'exactitude 3.

En déduire une formule de quadrature pour le calcul de  $\int_a^b f(x)dx$  qui soit de degré d'exactitude 3.

$$Q_n(f,a,b) \stackrel{\mathsf{def}}{=} (b-a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x) dx \tag{1}$$

Peut-on avoir une formule de quadrature de degré d'exactitude 2n + 1?

Oui pour n = 1! Et pour n > 1?

Pour celà il faut déterminer les points  $(x_i)_{i=0}^n$  appartenant à [a,b] distincts 2 à 2.

Les polynômes de Legendre vont être d'une grande utilité!

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par la formule de récurrence de Bonnet

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t), \ \forall n \ge 1$$
(13)

avec  $P_0(t) = 1$  et  $P_1(t) = t$ .

On a les propriétés suivantes:

- **prop.1** le polynôme de Legendre  $P_n$  est de degré n,
- **prop.2** la famille  $\{P_k\}_{k=0}^n$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ ,
- **prop.3** pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ , on a

$$\int_{-1}^{1} P_m(t) P_n(t) dt = \frac{2}{2n+1} \delta_{m,n}, \tag{14}$$

ce qui correspond à l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour le produit scalaire

$$\langle \mathbf{P}_m, \mathbf{P}_n \rangle = \int_{-1}^1 \mathbf{P}_m(t) \mathbf{P}_n(t) dt.$$

**prop.4** Soit  $n \ge 1$ ,  $P_n$  est scindé sur  $\mathbb R$  et ses n racines, notées  $(t_i)_{i=0}^n$ , sont simples dans ]-1,1[, c'est à dire

$$P_n(t) = C \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i), \ C \in \mathbb{R}^*$$

où les  $t_i$  sont 2 à 2 distincts (et ordonnés). Les (n+1) racines simples de  $P_{n+1}$  sont alors chacunes dans l'un des (n+1) intervalles  $[-1,t_0[,]t_0,t_1[,\ldots,]t_{n-2},t_{n-1}[,]t_{n-1},1[$ .



Soit  $(t_i)_{i=0}^n$  les (n+1) racines distinctes du polynôme de Legendre de degré (n+1). On note  $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$ ,  $\forall i \in [0, n]$  et  $w_i$  les poids donnés par (7). La formule de quadrature élémentaire

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^{n} w_{i} f(x_{i})$$

est appelée la formule de quadrature de Gauss-Legendre. C'est l'unique formule de quadrature élémentaire à (n+1) points avant pour degré d'exactitude 2n+1.

n	exactitude	$w_i$ (poids)	$t_i$ (points)
0	1	1	0
1	3	1/2, 1/2	$-\sqrt{1/3},\sqrt{1/3}$
2	5	5/18, 8/18, 5/18	$-\sqrt{3/5}, 0, \sqrt{3/5}$

Table: Méthodes de Gauss-Legendre sur [-1, 1]

#### Théorème 6.1:



Soient  $f \in C^{2n+2}([a,b];\mathbb{R})$  et  $Q_n(f,a,b)$  la formule de quadrature de Gauss-Legendre définie dans la Proposition ??. Alors on a

$$\left| \int_{a}^{b} f(x) dx - \mathcal{Q}_{n}(f, a, b) \right| \leq \frac{\left\| f^{(2n+2)} \right\|_{\infty}}{(2n+2)!} \int_{a}^{b} \pi_{n}(x)^{2} dx \tag{15}$$

où  $\pi_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ , les  $x_i$  étant les points de la formule de quadrature.

#### Exercice 11 4

L'objectif de cet exercice est de calculer les points et les poids de la formule de quadrature de Gauss-Legendre à (n+1) points. La formule de quadrature de Gauss-Legendre à (n+1) points  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |-1|$  les donnée na

$$\int_{-1}^{1} g(t)dt \approx 2 \sum_{i=0}^{n} w_i g(t_i)$$

où les  $(t_i)_{i=0}^n$  sont les n+1 racines du polynôme de Legendre  $P_{n+1}(t)$ . Cette formule à pour degré d'exactitude 2n+1.

Soient  $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$  le produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$  et  $\|P\| = \langle P, P \rangle^{1/2}$  la norme associée.

Soit  $M_n$  le polynôme de Legendre normalisé de degré (n+1),  $M_n = \frac{P_n}{\|P_n\|}$ . On utilisera les résultats sur les polynômes de Legendre rappelés en cours.

Q. 1 Montrer que

$$c_{n+1}M_{n+1}(t) = tM_n(t) - c_nM_{n-1}(t), \quad n > 1$$
 (1)

avec

$$M_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \ M_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t \ \text{et} \ c_n = \sqrt{\frac{n^2}{4n^2 - 1}}$$

On définit le vecteur M(t) de  $\mathbb{R}^{n+1}$  par

$$\mathbf{M}(t) = (\mathbf{M}_{0}(t), \dots, \mathbf{M}_{-}(t))^{t}$$

Q. 2 Montrer que l'on a

$$t\mathbf{M}(t) = A\mathbf{M}(t) + c_{n+1}M_{n+1}(t)\mathbf{e}_{n+1}$$
(2)

où l'on explictera la matrice tridiagonale  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  en fonction des coefficients  $c_1, \ldots, c_n$ . Le vecteur  $e_{-1}$ , étant le (n+1)-ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Q. 3 En déduire que les (n+1) racines distinctes de  $\mathrm{M}_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$  sont les (n+1) valeurs propres de  $\mathbb{A}$ .

Q. 4 Montrer que

$$2\sum_{k=0}^{n} w_{k} \mathbf{M}_{i}(t_{k}) \mathbf{M}_{j}(t_{k}) = \delta_{i,j}, \ \forall (i,j) \in [0,n]^{2}$$
(3)

où 
$$\delta_{i,i} = 0$$
, si  $i \neq j$  et  $\delta_{i,i} = 1$ .

On note  $\mathbb{W} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  la matrice diagonale, de diagonale  $(w_0, \dots, w_n)$  et  $\mathbb{P} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  la matrice définie par  $\mathbb{P}_{i+1,i+1} = M_i(t_i), \ \forall (i,j) \in [0,n]^2$ .

- (a) Montrer que  $2\mathbb{P}^t \mathbb{WP} = \mathbb{I}$ .
  - ② En déduire que W-1 = 2PPt.
  - ⓐ En déduire que  $\frac{1}{w_i}$  = 2  $\sum_{k=0}^{n} (M_k(t_i))^2$ , ∀i ∈ [0, n].

On suppose que l'on dispose de la fonction **algorithmique**  $\operatorname{eig}(\mathbb{A})$  retournant l'ensemble des valeurs propres d'une matrice symétrique  $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  dans l'ordre croissant sous la forme d'un vecteur de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

- ② Ecrire la fonction [t, w] ← GaussLegendre(n) retournant le tableau des points t et le tableau des poids w en utilisant les résultats obtenus dans cet exercice.
  - Ecrire la fonction I QuadElemGaussLegendre(f, a, b, n) retournant une approximation de <sup>b</sup><sub>2</sub> f (x) dix en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre à (n + 1) points sur l'intervalle [a, b].

### Plan

- Méthodes de quadrature élémentaires
- o Formules élémentaires de Newton-Cotes
- Formules élémentaires de Gauss-Legendre
- Méthodes de quadrature composées
- Erreurs méthodes composées

Soit  $(\alpha_i)_{i \in [0,k]}$  une subdivison de l'intervalle  $[\alpha,\beta]$ :

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = \beta.$$

On a alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x)dx.$$
 (16)

Soit  $Q_n(g, a, b)$  la formule de quadrature élémentaire à n+1 points d'ordre p donnée par

$$Q_n(g, a, b) \stackrel{\mathsf{def}}{=} (b - a) \sum_{i=0}^n w_j g(x_j) \approx \int_a^b g(x) dx.$$

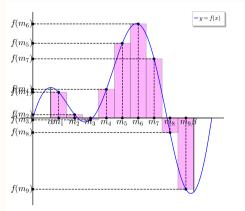
La **méthode de quadrature composée associée à**  $Q_n$ , notée  $Q_{k,n}^{\text{comp}}$ , est donnée par

$$Q_{k,n}^{\text{comp}}(f,\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{k} Q_n(f,\alpha_{i-1},\alpha_i) \approx \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$
 (17)

 $Q_p$  degré d'exactitude  $p \Rightarrow Q_{k,p}^{\text{comp}}$  degré d'exactitude p



# Formule composite des points milieux



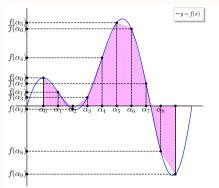
$$Q_0(g, a, b) \stackrel{\mathsf{def}}{=} (b - a)g(\frac{a + b}{2})$$

 $m_j$  milieu de l'intervalle  $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ ,

$$m_j = \frac{\alpha_{j-1} + \alpha_j}{2}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{k} \mathcal{Q}_0(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) = h \sum_{i=1}^{k} f(m_j)$$

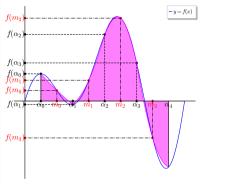
# Formule composite des trapèzes



$$\mathcal{Q}_1(g,a,b) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \frac{b-a}{2} (g(a) + g(b))$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{j=1}^{k} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_{j}} f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{k} Q_{0}(f, \alpha_{j-1}, \alpha_{j})$$
$$\approx \frac{h}{2} \sum_{j=1}^{k} (f(\alpha_{j-1}) + f(\alpha_{j}))$$

# Formule composite de Simpson



$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{j=1}^{k} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_{j}} f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{k} \mathcal{Q}_{2}(f, \alpha_{j-1}, \alpha_{j})$$

$$\begin{array}{c} \mathcal{Q}_2(g,a,b) \\ \stackrel{\text{def}}{=} \\ \frac{b-a}{6}(g(a)+4g(\frac{a+b}{2})+g(b)) \end{array}$$

 $m_j$  milieu de l'intervalle  $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ ,

$$m_j = \frac{\alpha_{j-1} + \alpha_j}{2}$$

$$\approx \sum_{j=1}^{k} \mathcal{Q}_{2}(f, \alpha_{j-1}, \alpha_{j})$$

$$\approx \frac{h}{6} \sum_{j=1}^{k} (f(\alpha_{j-1}) + 4f(m_{j}) + f(\alpha_{j}))$$

# Exercice 12

Ecrire une fonction algorithmique QuadSimpson retournant une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle  $[\alpha,\beta]$  utilisant la méthode de quadrature composée de Simpson en **minimisant** le nombre d'appels à la fonction f. On rappelle que la formule élémentaire de Simpson est donnée par

$$Q_2(g, a, b) \stackrel{\mathsf{def}}{=} \frac{b - a}{6} (g(a) + 4g(\frac{a + b}{2}) + g(b)).$$

### Plan

- Méthodes de quadrature élémentaires
- o Formules élémentaires de Newton-Cotes
- Formules élémentaires de Gauss-Legendre
- Méthodes de quadrature composées
- Erreurs méthodes composées

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{\text{comp}}(f,\alpha,\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\beta}^{\beta} f(x) dx - \mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f,\alpha,\beta).$$
 (18)

On a alors

$$\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{\text{comp}}(f) = \sum_{j=1}^{k} \left( \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(x) dx - \mathcal{Q}_n(f, \alpha_{j-1}, \alpha_j) \right) = \sum_{j=1}^{k} \mathcal{E}_{\alpha_{j-1}, \alpha_j}(f)$$

et on a vu que si  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$ 

$$|\mathcal{E}_{a,b}(f)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \int_a^b |\prod_{i=0}^n (x-x_i)| dx$$

Si  $x_i$  discrétisation régulière de [a, b], on peut démontrer (voir [Crouzeix-Mignot])

$$\max_{x \in [a,b]} |\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)| \le C \frac{e^{-n}}{\sqrt{n} \log(n)} (b - a)^{n+1}.$$

◆□▶ ◆□▶ ◆■▶ ◆■▶ ● めゅ@

En notant  $h_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$ ,  $h = \max_{j \in [1,k]} h_j$  et  $K_n$  un majorant de  $\max_{x \in [a,b]} |\prod_{i \in S} (x - x_i)|$ 

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{\text{comp}}(f)| & \leqslant & \sum_{j=1}^{k} |\mathcal{E}_{\alpha_{j-1},\alpha_{j}}(f)| \\ & \leqslant & \sum_{j=1}^{k} \frac{\mathcal{K}_{n}}{(n+1)!} \max_{x \in [\alpha_{j-1},\alpha_{j}]} |f^{(n+1)}(x)| h_{j}^{n+2} \\ & \leqslant & \mathcal{K}_{n} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [\alpha,\beta]} |f^{(n+1)}(x)| \sum_{j=1}^{k} h_{j} \\ & \leqslant & \mathcal{K}_{n}(\beta - \alpha) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_{\infty} \end{aligned}$$

Mais majoration non optimale!

Erreurs méthodes composées

On vient de montrer, pour Newton-Cotes composées : si  $f \in C^{n+1}([a,b];\mathbb{R})$ 

$$|\mathcal{E}_{\alpha,\beta}^{\text{comp}}(f)| \leq K_n(\beta - \alpha) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_{\infty}$$

### A l'aide des novaux de Peano :

## Théorème 6.2 : [Crouzeix-Mignot], page 43 (admis)

Soient  $Q_{k,n}^{comp}$  une méthode de quadrature composée associée à une méthode de quadrature élémentaire  $Q_n$  de degré d'exactitude  $p \ge n$  et  $f \in C^{p+1}([\alpha, \beta]; \mathbb{R})$ . On a alors

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f,\alpha,\beta) \right| \leqslant C_{p}(\beta - \alpha) h^{p+1} \left\| f^{(p+1)} \right\|_{\infty}$$
(19)

avec  $h = \max_{j \in [1,k]} (\alpha_j - \alpha_{j-1})$  et  $C_p > 0$ . Ceci s'écrit aussi sous la forme

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}(f,\alpha,\beta) \right| = \mathcal{O}(h^{p+1})$$
 (20)

et son **ordre de convergence** est p + 1.

2025/11/29

52 / 59

# Préssentir l'ordre de convergence? (Trapèze ordre 2 et Simpson ordre 4)

- Pour Simpson:  $E(h) = \mathcal{O}(h^4) = Ch^4$
- Pour Trapèze:  $E(h) = \mathcal{O}(h^2) = Ch^2$

$$E(h) = Ch^p$$
,  $\Longrightarrow E(h/10) = C(h/10)^p = \frac{E(h)}{10^p}$ 

```
Listing:: Script Matlab/Octave pour illustrer l'ordre des méthodes des Trapèzes et de Simpson

f=@(x) cos(x);
F=@(x) sin(x);
a=0;b=pi/2;
Iex=F(b)-F(a);
I1=QuadTrapeze(f,a,b,10);
I2=QuadTrapeze(f,a,b,100);
fprintf('Erreurs_uTrapeze:_u(N=10)_u%.5e_u-u(N=100)_u%.5e_n',abs(I1-Iex),abs(I2-Iex))
I1=QuadSimpson(f,a,b,10);
I2=QuadSimpson(f,a,b,100);
fprintf('Erreurs_uSimpson:_u(N=10)_u%.5e_u-u(N=100)_u%.5e_n',abs(I1-Iex),abs(I2-Iex))

Output

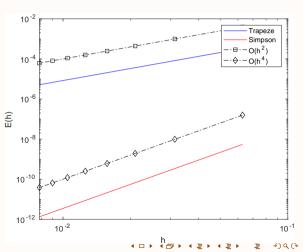
Erreurs Trapeze: (N=10) 2.05701e-03 - (N=100) 2.05618e-05
Erreurs Simpson: (N=10) 2.11547e-07 - (N=100) 2.11393e-11
```

Représenter graphiquement l'ordre de convergence? (Trapèze ordre 2 et Simpson ordre 4)

$$E(h) = Ch^p$$
,  $\Longrightarrow \log(E(h)) = \log(C) + p\log(h)$ 

En échelle logarithmique,  $h \mapsto E(h)$  est une droite de pente p

```
f=0(x) cos(x);
F=Q(x) \sin(x):
a=0; b=pi/2;
Iex=F(b)-F(a):
LN=25:25:200:
k=1;
for N=I.N
  H(k) = (b-a)/N;
  E1(k)=abs(QuadTrapeze(f,a,b,N)-Iex);
  E2(k)=abs(QuadSimpson(f,a,b,N)-Iex);
  k=k+1;
end
loglog(H.E1.'b', H.E2.'r', H.H.^2.'k-.s', ...
       H.O.01*H.^4.'k-.d')
xlabel('h'):vlabel('E(h)')
legend('Trapeze', 'Simpson', 'O(h^2)', 'O(h^4)')
```



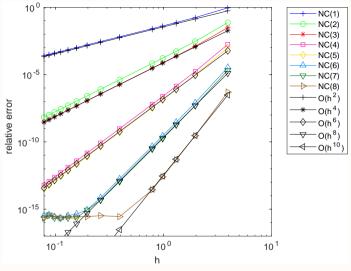


Figure: Erreur des méthodes de Newton-Cotes composées pour le calcul de  $\int_0^{5\pi/2} cos(x) dx$ , NC(n) correspondant à  $\mathcal{Q}_{k,n}^{\text{comp}}$  et  $h = \frac{5\pi}{2k}$ .

Degré d'exactitude (D.E.) de NC(n): n si n impair, n + 1 sinon.

Ordre de convergence de NC(n):

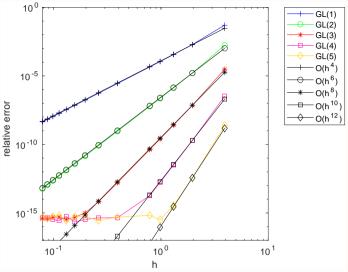


Figure: Erreur des méthodes de Gauss-Legendre composées pour le calcul de  $\int_{-\infty}^{5\pi/2} cos(x) dx$ , GL(n) correspondant à  $\mathcal{Q}_{k,n}^{\mathrm{comp}}$  et  $h = \frac{5\pi}{2k}$ .

Degré d'exactitude (D.E.) de GL(n):

$$2n + 1$$

Ordre de convergence de GL(n):

D.E. 
$$+ 1 = 2n + 2$$
.

Soit f une application définie sur  $[\alpha, \beta]$ , on souhaite approcher

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

par une méthode de quadrature composée de Newton-Cotes. On dispose de la fonction  $I \leftarrow \text{QuadElemNC}(f, a, b, n)$  (déjà écrite) retournant une approximation de  $\int_a^b f(x) dx$  par la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes à (n+1) points sur l'intervalle [a,b].

- Ecrire une fonction algorithmique QuadCompNC retournant une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  utilisant la méthode de quadrature composée (k intervalles) de Newton-Cotes (avec localement n+1 points).
- Q. 2 Proposer un exemple simple d'utilisation permettant de tester cette fonction.
- Proposer un exemple de validation de cette fonction par le degré d'exactitude de la méthode.
- Q. 4 Proposer un exemple de validation de cette fonction par l'ordre de convergence de la méthode.

Soit f une application définie sur  $[\alpha, \beta]$ , on souhaite approcher

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

par une méthode de quadrature composée de Gauss-Legendre.

On dispose de la fonction  $I \leftarrow \text{QuadElemGaussLegendre}(f, a, b, n)$  (déjà écrite) retournant une approximation de  $\int_a^b f(x) dx$  par la formule de quadrature élémentaire de Gauss-Legendre à (n+1) points sur l'intervalle [a,b].

- Ecrire une fonction algorithmique QuadCompGL retournant une approximation de l'intégrale d'une fonction f sur l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  utilisant la méthode de quadrature composée (k intervalles) de Gauss-Legendre (avec localement n+1 points).
- Q. 6 Proposer un exemple simple d'utilisation permettant de tester cette fonction.
- Proposer un exemple de validation de cette fonction par le degré d'exactitude de la méthode.
- Q. 8 Proposer un exemple de validation de cette fonction par l'ordre de convergence de la méthode.

## Conclusion

- Il existe un grand nombre d'autres méthodes!
- Intégration en dimensions supérieures?
  - ▶ Sur un orthotope (hyperrectangle), généralisation possible.
  - ▶ Sur un domaine fermé, borné : méthode des éléments finis
  - Sur une surface ...