

## EXERCICE 1

Soient  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$  à valeurs réelles et  $n \in \mathbb{N}$ . On souhaite approcher  $\int_a^b f(x)dx$  par  $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$  une formule de quadrature élémentaire

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (\text{P-1})$$

où les  $(x_i)_{i=0}^n$  sont des points distincts 2 à 2 dans  $[a, b]$  et les  $(w_i)_{i=0}^n$  sont des réels.

Q. 1

Démontrer que l'application  $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$  définie de  $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ , muni de la norme infini, à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est linéaire et continue.

R. 1

On commence par démontrer la linéarité. Soient  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ , et  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels. Alors  $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ , et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(\lambda f + \mu g, a, b) &= (b - a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f + \mu g)(x_j) \\ &= (b - a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)) \\ &= \lambda (b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) + \mu (b - a) \sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \\ &= \lambda \mathcal{Q}_n(f, a, b) + \mu \mathcal{Q}_n(g, a, b). \end{aligned}$$

L'application  $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$  est donc linéaire. Pour démontrer qu'elle est continue, il suffit alors de démontrer que

$$\exists C > 0, \text{ tel que } |\mathcal{Q}_n(f, a, b)| \leq C \|f\|_\infty, \forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}).$$

Or, on a, pour tout  $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} |\mathcal{Q}_n(f, a, b)| &= |(b-a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j)| \\ &\leq (b-a) \sum_{j=0}^n |w_j| |f(x_j)| \\ &\leq C \|f\|_\infty, \text{ avec } C = (b-a) \sum_{j=0}^n |w_j| \text{ indépendant de } f. \end{aligned}$$

Q. 2

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$  est de degré d'exactitude  $k$  si et seulement si

$$\forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx. \quad (\text{P-2})$$

R. 2

$\Rightarrow$  Soit  $r \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , Comme  $x \mapsto x^r$  est dans  $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$ , et que la formule de quadrature est exacte pour tout polynôme de degré

inférieur ou égal à  $k$ , on en déduit

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket.$$

$\Leftarrow$  Soit  $P \in \mathbb{R}_k[X]$ . On peut le décomposer dans la base des monomes: il existe  $(a_i)_{i=0}^k$  réels tels que

$$P(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i.$$

Par linéarité de l'application  $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ , on a

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto P(x), a, b) = \sum_{i=0}^k a_i \mathcal{Q}_n(x \mapsto x^i, a, b).$$

Par hypothèse, on a

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = \int_a^b x^r dx, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket$$

et donc

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto P(x), a, b) = \sum_{i=0}^k a_i \int_a^b x^i dx.$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto P(x), a, b) = \int_a^b \sum_{i=0}^k a_i x^i dx = \int_a^b P(x) dx.$$

On en déduit donc que  $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$  est de degré d'exactitude  $k$ .

