

EXERCICE 3

Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles, $n \in \mathbb{N}$ et $(x_i)_{i=0}^n$ des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire,

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (\text{P-1})$$

où les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels à déterminer.

Q. 1

Démontrer que (P-1) est de degré d'exactitude k (au moins) si et seulement si

$$(b - a) \sum_{i=0}^n w_i x_i^r = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r + 1}, \quad \forall r \in \llbracket 0, k \rrbracket. \quad (\text{P-2})$$

R. 1

- \Rightarrow Si la formule (P-1) est de degré d'exactitude k , elle est donc exacte pour tout polynôme de $\mathbb{R}_k[X]$ et plus particulièrement pour tous les monômes $1, X, X^2, \dots, X^k$. Soit $r \in \llbracket 0, k \rrbracket$. En prenant $f(x) = x^r$, la formule (P-1) étant exacte par hypothèse, on obtient

$$\mathcal{Q}_n(x \mapsto x^r, a, b) = (b - a) \sum_{i=0}^n w_i x_i^r \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_a^b x^r dx = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r + 1}$$

- \Leftarrow On suppose que l'on a (P-2). Soit $P \in \mathbb{R}_k[X]$. On va montrer que la formule de quadrature (P-1) est alors exacte.

Le polynôme P peut s'écrire comme combinaison linéaire des monômes de $\{1, X, X^2, \dots, X^k\}$, base de $\mathbb{R}_k[X]$. On propose ici deux démonstrations.

– **1ère démonstration:** On a donc

$$P(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_j x^j, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En prenant $f = P$, la formule de quadrature (P-1) donne

$$\mathcal{Q}_n(P, a, b) = (b - a) \sum_{i=0}^n w_i P(x_i) = (b - a) \sum_{i=0}^n w_i \sum_{j=0}^k \alpha_j x_i^j$$

De plus, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b P(x) dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \int_a^b x^j dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j + 1}$$

et en utilisant (P-2) on obtient

$$\int_a^b P(x) dx = (b - a) \sum_{j=0}^k \alpha_j \sum_{i=0}^n w_i x_i^j$$

Ce qui donne

$$\int_a^b P(x) dx = \mathcal{Q}_n(P, a, b).$$

La formule de quadrature est donc de degré d'exactitude k .

– **2ème démonstration:**

On a donc

$$P = \sum_{j=0}^k \alpha_j X^j$$

et par linéarité de l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ (voir Proposition ??) on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(P, a, b) &= \mathcal{Q}_n\left(\sum_{j=0}^k \alpha_j X^j, a, b\right) \\ &= \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathcal{Q}_n(X^j, a, b). \end{aligned}$$

Par hypothèse, on a (P-2) et, comme par définition X^j est le polynôme $x \mapsto x^j$, on obtient

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \mathcal{Q}_n(X^j, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_a^b X^j(x) dx = \int_a^b x^j dx = \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j+1}.$$

De plus, par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_a^b P(x) dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \int_a^b x^j dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j+1}$$

et donc

$$\int_a^b P(x) dx = \sum_{j=0}^k \alpha_j \mathcal{Q}_n(X^j, a, b) = \mathcal{Q}_n(P, a, b).$$

Q. 2

Les points $(x_i)_{i=0}^n$ étant fixés, montrer qu'il existe alors une unique formule de quadrature élémentaire (P-1) à $(n + 1)$ points de degré d'exactitude n au moins.

R. 2

En fixant les points $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ deux à deux distincts, pour obtenir explicitement la formule de quadrature de type (P-1) il faut déterminer les $n + 1$ poids $(w_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$. Or, de (P-2), en prenant $k = n$, on obtient exactement $n + 1$ équations linéaires en les (w_i) s'écrivant matriciellement sous la forme :

$$(b - a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - a \\ \frac{b^2 - a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix}$$

La matrice intervenant dans le système précédent s'appelle **la matrice de Vandermonde** et elle est inversible (car les (x_i) sont deux à deux distincts, voir Exercice ??). Ceci établi donc l'existence et l'unicité de poids $(w_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ tels que la formule de quadrature élémentaire (P-1) soit d'ordre (au moins) n .

Il est aussi possible de démontrer l'unicité classiquement. Supposons qu'il existe $(w_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ et $(\tilde{w}_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on ait

$$\int_a^b P(x) dx = (b - a) \sum_{i=0}^n w_i P(x_i) = (b - a) \sum_{i=0}^n \tilde{w}_i P(x_i).$$

On a alors $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\sum_{i=0}^n (w_i - \tilde{w}_i) P(x_i) = 0. \tag{R3.1}$$

On rappelle que les fonctions de base de Lagrange associées aux $(n + 1)$ points $(x_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ notées L_i , sont dans $\mathbb{R}_n[X]$ et vérifient

$$L_i(x_j) = \delta_{i,j}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En choisissant $P = L_j$ dans (R3.1), on obtient

$$0 = \sum_{i=0}^n (w_i - \tilde{w}_i) L_j(x_i) = (w_j - \tilde{w}_j)$$

ce qui prouve l'unicité.

