

EXERCICE 5

Soient f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$. On souhaite approcher $\int_a^b f(x)dx$ par $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b - a) \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (\text{P-1})$$

où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + b}{2} \quad \text{et} \quad w_i = w_{n-i}. \quad (\text{P-2})$$

Q. 1

a. Etablir que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad x_i - \frac{a + b}{2} = - \left(x_{n-i} - \frac{a + b}{2} \right).$$

b. Si n est impair, montrer que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, x_i \neq \frac{a + b}{2}$.

c. Si n est pair, montrer qu'il existe un unique $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $x_i = \frac{a + b}{2}$.

d. En justifiant, donner explicitement un exemple de points $(x_i)_{i=0}^n$ vérifiant (P-2) (n restant quelconque).

a. De (P-2), on déduit

$$(P-2) \Leftrightarrow x_i + x_{n-i} = a + b \Leftrightarrow x_i - \frac{a+b}{2} = - \left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2} \right)$$

b. Si $n = 2k - 1$, (n impair), on a alors un nombre **pair** de points. Par l'absurde supposons $\exists i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $x_i = \frac{a+b}{2}$. Dans ce cas, on a $x_{n-i} = \frac{a+b}{2} = x_i$. Comme les points $(x_j)_{j=0}^n$ sont distincts deux à deux, pour avoir une contradiction, il suffit de montrer que $i \neq n - i$. En effet, on a

$$\llbracket 0, n \rrbracket = \llbracket 0, 2k - 1 \rrbracket = \llbracket 0, k - 1 \rrbracket \cup \llbracket k, 2k - 1 \rrbracket.$$

- si $i \in \llbracket 0, k - 1 \rrbracket$ alors

$$0 \leq i \leq k - 1 \Leftrightarrow n - (k - 1) \leq n - i \leq n \Leftrightarrow k \leq n - i \leq n,$$

et donc $n - i \neq i$

- si $i \in \llbracket k, 2k - 1 \rrbracket$ alors

$$k \leq i \leq 2k - 1 \Leftrightarrow n - (2k - 1) \leq n - i \leq n - k \Leftrightarrow 0 \leq n - i \leq k - 1,$$

et donc $n - i \neq i$.

c. Si $n = 2k$, (n pair), on a alors un nombre **impair** de points. Comme $n - k = k$, on obtient à partir de (P-2)

$$\frac{x_k + x_{n-k}}{2} = \frac{a+b}{2}$$

c'est à dire

$$x_k = \frac{a+b}{2}.$$

Comme les points sont distincts deux à deux, on obtient l'unicité.

d. Soit $(x_i)_{i=0}^n$ la discrétisation régulière de l'intervalle $[a, b]$,

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad x_i = a + ih.$$

Dans ce cas, tous les points sont distincts deux à deux et on a pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $n-i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et

$$\frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + ih + a + (n-i)h}{2}.$$

Or $a + nh = b$, ce qui donne

$$\frac{x_i + x_{n-i}}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Q. 2

Démontrer que l'application $f \mapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ définie de $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, muni de la norme infini, à valeurs dans \mathbb{R} est linéaire et continue.

On commence par démontrer la linéarité. Soient f et g dans $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, et λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$, et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(\lambda f + \mu g, a, b) &= (b - a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f + \mu g)(x_j) \\ &= (b - a) \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)) \\ &= \lambda(b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) + \mu(b - a) \sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \\ &= \lambda \mathcal{Q}_n(f, a, b) + \mu \mathcal{Q}_n(g, a, b). \end{aligned}$$

L'application $f \longmapsto \mathcal{Q}_n(f, a, b)$ est donc linéaire. Pour démontrer qu'elle est continue, il suffit alors de démontrer que

$$\exists C > 0, \quad \text{tel que } |\mathcal{Q}_n(f, a, b)| \leq C \|f\|_\infty, \quad \forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}).$$

Or, on a, pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{Q}_n(f, a, b)| &= |(b - a) \sum_{j=0}^n w_j f(x_j)| \\ &\leq (b - a) \sum_{j=0}^n |w_j| |f(x_j)| \\ &\leq C \|f\|_\infty, \quad \text{avec } C = (b - a) \sum_{j=0}^n |w_j| \text{ indépendant de } f. \end{aligned}$$

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme de degré $2m + 1$ s'écrivant sous la forme

$$P(x) = \sum_{j=0}^{2m+1} a_j x^j$$

avec $(a_j)_{j=0}^{2m+1}$ des réels et $a_{2m+1} \neq 0$.

Q. 3

a. Calculer les dérivées $P^{(2m+1)}$ et $P^{(2m+2)}$.

b. Montrer que

$$P(x) = C \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} + R(x) \quad (\text{P-3})$$

en déterminant le degré maximum de R et en exprimant C en fonction des $(a_j)_{j=0}^{2m+1}$.

R. 3

a. On a $P(x) = a_{2m+1}x^{2m+1} + \sum_{j=0}^{2m} a_j x^j$ et comme la dérivée $(2m + 1)$ d'un polynôme de degré $2m$ est nulle, on obtient

$$P^{(2m+1)}(x) = a_{2m+1} \frac{d^{2m+1} x^{2m+1}}{dx^{2m+1}} = a_{2m+1} (2m + 1)!$$

et

$$P^{(2m+2)}(x) = 0.$$

b. C'est la division euclidienne du polynôme P de degré $(2m + 1)$ par le polynôme $x \mapsto \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1}$ de degré $(2m + 1)$. On a

donc C constante et $R \in \mathbb{R}_{2m}[X]$. Pour calculer C , on dérive $(2m + 1)$ fois (P-3), ce qui donne

$$P^{(2m+1)}(x) = C(2m + 1)!.$$

En identifiant, avec la sous-question précédente, on obtient $C = a_{2m+1}$.

Q. 4

Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2k+1} dx = 0. \quad (\text{P-4})$$

R. 4

En effectuant le changement de variable $\varphi : t \mapsto \frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}$ on obtient

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \left(\varphi(t) - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1} \varphi'(t) dt = \frac{b-a}{2} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2m+1} \int_{-1}^1 t^{2m+1} dt = 0.$$

On peut aussi utiliser directement la primitive de $\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+1}$ qui est $\frac{1}{2m+2} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^{2m+2} \dots$

Q. 5

On suppose que la formule de quadrature élémentaire (P-1) est exacte pour les polynômes de $\mathbb{R}_{2m}[X]$.

a. Déduire de (P-3) et (P-4) que la formule de quadrature élémentaire (P-1) est exacte pour P si et seulement si

$$(b - a) \sum_{i=0}^n w_i \left(x_i - \frac{a + b}{2} \right)^{2m+1} = 0. \quad (\text{P-5})$$

b. En utilisant **Q. 1**, démontrer que (P-5) est toujours vérifiée.

R. 5

a. On a, en utilisant la linéarité de l'intégrale et (P-3)

$$\int_a^b P(x) dx = C \int_a^b \left(x - \frac{a + b}{2} \right)^{2m+1} dx + \int_a^b R(x) dx$$

En utilisant la linéarité de $\mathcal{Q}_n(\bullet, a, b)$ et (P-3) on obtient

$$\mathcal{Q}_n(P, a, b) = (b - a)C \sum_{i=0}^n w_i \left(x_i - \frac{a + b}{2} \right)^{2m+1} + (b - a) \sum_{i=0}^n w_i R(x_i).$$

On a $R \in \mathbb{R}_{2m}[X]$ et, par hypothèse, la formule de quadrature est exacte pour les poly  mes de les polynômes de $\mathbb{R}_{2m}[X]$ ce qui donne

$$\mathcal{Q}_n(R, a, b) = (b - a) \sum_{i=0}^n w_i R(x_i).$$

Or, la formule de quadrature élémentaire (P-1) est exacte pour P si et seulement si

$$\mathcal{Q}_n(P, a, b) = \int_a^b P(x) dx$$

ce qui est donc équivalent à

$$(b-a)C \sum_{i=0}^n w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} = C \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} dx.$$

En utilisant (P-4) et le fait que $C = a_{2m+1} \neq 0$, on en déduit que la formule de quadrature élémentaire (P-1) est exacte pour P si et seulement si (P-5) est vérifiée.

- b. • Si $n = 2k$, (n paire), on a alors un nombre **impair** de points avec nécessairement $x_k = x_{n-k} = \frac{a+b}{2}$ et

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} + 0 \times w_k + \sum_{i=k+1}^{2k} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} - \sum_{i=k+1}^{2k} w_{n-i} \left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} - \sum_{j=0}^{k-1} w_j \left(x_j - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Si $n = 2k - 1$, (n impaire), on alors un nombre **pair** de points (avec $x_i \neq \frac{a+b}{2}, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$) et

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} + \sum_{i=k}^{2k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} \\
 &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} - \sum_{i=k}^{2k-1} w_{n-i} \left(x_{n-i} - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} \\
 &= \sum_{i=0}^{k-1} w_i \left(x_i - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} - \sum_{j=0}^{k-1} w_j \left(x_j - \frac{a+b}{2} \right)^{2m+1} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Q. 6

Ecrire de manière très précise le résultat démontré.

R. 6

Soit $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$, une formule de quadrature élémentaire, donnée par (P-1) où les $(x_i)_{i=0}^n$ sont des points distincts 2 à 2 dans $[a, b]$ et les $(w_i)_{i=0}^n$ sont des réels vérifiant (P-2). Si cette formule est exacte pour les polynômes de degré $2m$ alors elle est nécessairement exacte pour les polynômes de degré $2m + 1$.

