

## EXERCICE 11

Soient  $(t_i)_{i=0}^n$ ,  $(n+1)$  points distincts de  $[-1; 1]$ .

On note  $\mathcal{F}([-1; 1]; \mathbb{R})$  l'espace des fonctions définies de  $[-1; 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Soient  $g \in \mathcal{F}([-1; 1]; \mathbb{R})$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On souhaite approcher  $\int_{-1}^1 g(t)dt$  par  $\mathcal{S}_n(g)$ , une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{S}_n(g) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{i=0}^n w_i g(t_i)$$

Q. 1

Démontrer que l'application  $g \mapsto \mathcal{S}_n(g)$  définie de  $\mathcal{F}([-1; 1]; \mathbb{R})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est linéaire.

R. 1

Soient  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{F}([-1; 1]; \mathbb{R})$  (espace vectoriel), et  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels. Alors  $\lambda f + \mu g \in \mathcal{F}([-1; 1]; \mathbb{R})$ , et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n(\lambda f + \mu g) &= 2 \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f + \mu g)(x_j) \\ &= 2 \sum_{j=0}^n w_j (\lambda f(x_j) + \mu g(x_j)) \\ &= \lambda 2 \sum_{j=0}^n w_j f(x_j) + \mu 2 \sum_{j=0}^n w_j g(x_j) \\ &= \lambda \mathcal{S}_n(f) + \mu \mathcal{S}_n(g). \end{aligned}$$

L'application  $\mathcal{S}_n$  est donc linéaire.

On pose

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

Q. 2

a. Montrer que si  $\mathcal{S}_n$  a pour degré d'exactitude  $n$  au moins alors, on a

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad w_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_i(t) dt. \quad (\text{P-1})$$

b. Montrer que si (P-1) est vérifiée, alors  $\mathcal{S}_n$  a pour degré d'exactitude  $n$  au moins.

R. 2

a. Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On a  $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ . Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude  $n$  au moins et donc on a

$$\mathcal{S}_n(L_i) \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_{-1}^1 L_i(t) dt.$$

Comme  $L_i(t_j) = \delta_{i,j}$ ,  $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on en déduit

$$\mathcal{S}_n(L_i) = 2 \sum_{j=0}^n w_j L_i(t_j) = 2w_i.$$

Ce qui donne

$$w_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_i(t) dt.$$

b. Par hypothèse, les poids  $(w_i)_{i=0}^n$  étant donnés par (P-1), La formule de quadrature s'écrit

$$\mathcal{S}_n(g) \stackrel{\text{hyp}}{=} \sum_{i=0}^n g(t_i) \int_{-1}^1 L_i(t) dt.$$

On note  $\mathcal{L}_n(P)$  le polynôme d'interpolation de Lagrange de  $\mathbb{R}_n[X]$  passant par les points  $(t_i, g(t_i))_{i=0}^n$  donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}_n(P)(t) = \sum_{i=0}^n g(t_i) L_i(t).$$

Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a  $P = \mathcal{L}_n(P)$  et

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P(t) dt &= \int_{-1}^1 \mathcal{L}_n(P)(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 \sum_{i=0}^n L_i(t) P(t_i) dt \\ &= \sum_{i=0}^n P(t_i) \int_{-1}^1 L_i(t) dt \\ &= 2 \sum_{i=0}^n w_i P(t_i) = \mathcal{S}_n(P). \end{aligned}$$

La formule de quadrature est donc exacte pour tous les polynômes de degré  $n$  au moins.

On rappelle que la formule de quadrature  $\mathcal{S}_n$  à  $(n + 1)$  points distincts, dont les poids  $(w_i)_{i=0}^n$  sont données par (P-1), a pour degré

d'exactitude  $(n + m)$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  si et seulement si

$$\int_{-1}^1 \pi_n(t) Q(t) dt = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_{m-1}[X] \quad (\text{P-2})$$

avec  $\pi_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^n (t - t_i)$ .

Par la suite, on suppose que les  $(t_i)_{i=0}^n$  sont les  $(n + 1)$  racines distinctes dans  $] - 1; 1[$  du polynôme de Legendre de degré  $(n + 1)$  et que les poids  $(w_i)_{i=0}^n$  sont données par (P-1).

Les polynômes de Legendre peuvent être définis par la formule de récurrence de Bonnet

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t), \quad \forall n \geq 1 \quad (\text{P-3})$$

avec  $P_0(t) = 1$  et  $P_1(t) = t$ .

On a les propriétés suivantes:

**prop.1** le polynôme de Legendre  $P_n$  est de degré  $n$ ,

**prop.2** la famille  $\{P_k\}_{k=0}^n$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ ,

**prop.3** pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ , on a

$$\int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t)dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}, \quad (\text{P-4})$$

ce qui correspond à l'orthogonalité des polynômes de Legendre pour le produit scalaire

$$\langle P_m, P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t)dt.$$

**prop.4** Soit  $n \geq 1$ ,  $P_n$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  et ses  $n$  racines, notées  $(t_i)_{i=0}^n$ , sont simples dans  $] -1, 1[$ , c'est à dire

$$P_n(t) = C \prod_{i=0}^{n-1} (t - t_i), \quad C \in \mathbb{R}^*$$

où les  $t_i$  sont 2 à 2 distincts (et ordonnés). Les  $(n+1)$  racines simples de  $P_{n+1}$  sont alors chacune dans l'un des  $(n+1)$  intervalles  $] -1, t_0[$ ,  $]t_0, t_1[$ ,  $\dots$ ,  $]t_{n-2}, t_{n-1}[$ ,  $]t_{n-1}, 1[$ .

Q. 3

- a. En utilisant les polynômes de Legendre, démontrer que la formule de quadrature  $\mathcal{S}_n$  est de degré d'exactitude  $2n + 1$ .
- b. Montrer que la formule de quadrature  $\mathcal{S}_n$  n'est pas de degré d'exactitude  $2n + 2$ .
- c. Démontrer que  $\mathcal{S}_n$  est l'unique formule de quadrature à  $(n + 1)$  points distincts dans  $[-1; 1]$  ayant pour degré d'exactitude  $2n + 1$ .

R. 3

- a. Par hypothèse, les poids  $(w_i)_{i=0}^n$  sont données par (P-1),  $\mathcal{S}_n$  a pour degré d'exactitude  $2n + 1$  si et seulement si on a (P-2) avec  $m = n + 1$ .

D'après les propriétés des polynômes de Legendre  $P_n$ , on a  $P_{n+1}(t) = C\pi_n(t)$  avec  $C \in \mathbb{R}^*$ .

On en déduit que (P-2) avec  $m = n + 1$  est équivalent à

$$\int_{-1}^1 P_{n+1}(t)Q(t)dt = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_n[X].$$

Or, la famille des polynômes de Legendre  $\{P_0, \dots, P_n\}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  et comme les polynômes de Legendre sont orthogonaux, la relation précédente est vérifiée.

- b. Supposons qu'il existe une autre formule de quadrature élémentaire à  $(n + 1)$  points distincts dans  $[-1, 1]$

$$\tilde{\mathcal{S}}_n(g) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{i=0}^n \tilde{w}_i g(\tilde{t}_i)$$

ayant pour degré d'exactitude  $(2n + 1)$  précisément. D'après la **Q. 2**, on a donc

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \tilde{w}_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{L}_i(t) dt, \quad \text{où } \tilde{L}_i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

Notons  $\tilde{\pi}_n(t) = \prod_{i=0}^n (t - \tilde{t}_i)$ . Comme  $\mathcal{S}_n$  et  $\tilde{\mathcal{S}}_n$  ont pour degré d'exactitude  $(2n + 1)$  précisément, on déduit de (P-2) avec  $m = n + 1$ , que

$$\int_{-1}^1 \pi_n(t) Q(t) dt = \int_{-1}^1 \tilde{\pi}_n(t) Q(t) dt = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_n[X]$$

Le polynôme  $R = \pi_n - \tilde{\pi}_n$  est dans  $\mathbb{R}_n[X]$  car les polynômes  $\pi_n$  et  $\tilde{\pi}_n$  de  $\mathbb{R}_{n+1}[X]$  sont unitaires. On a alors

$$\int_{-1}^1 R(t) Q(t) dt = 0, \quad \forall Q \in \mathbb{R}_n[X]$$

En choisissant  $Q = R$ , on obtient

$$\int_{-1}^1 R^2(t) dt = 0$$

ce qui entraîne  $R = 0$  et donc les points  $(\tilde{t}_i)_{i=0}^n$  et  $(t_i)_{i=0}^n$  sont identiques à une permutation des indices près, c'est à dire

$$\tilde{t}_{\sigma(i)} = t_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

On a alors  $\tilde{w}_{\sigma(i)} = w_i$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et

$$\tilde{\mathcal{S}}_n(g) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{i=0}^n \tilde{w}_i g(\tilde{t}_i) = 2 \sum_{i=0}^n \tilde{w}_{\sigma(i)} g(\tilde{t}_{\sigma(i)}) = 2 \sum_{i=0}^n w_i g(t_i) = \mathcal{S}_n(g).$$

Soient  $a, b$  deux réels,  $a < b$ . On note  $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , où les  $(t_i)_{i=0}^n$  sont les  $(n+1)$  racines distinctes dans  $] -1; 1[$  du polynôme de Legendre de degré  $(n+1)$ .

Soient  $f \in \mathcal{F}([a; b]; \mathbb{R})$ , espace des fonctions définies de  $[a; b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et  $n \in \mathbb{N}$ .

On souhaite approcher  $\int_a^b f(x)dx$  par  $\mathcal{Q}_n(f, a, b)$ , une formule de quadrature élémentaire, donnée par

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (b-a) \sum_{i=0}^n w_i^* f(x_i)$$

On pose

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_i^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Q. 4

a. Montrer que la formule de quadrature  $\mathcal{Q}_n$  est de degré d'exactitude  $n$  au moins si et seulement si

$$w_i^* = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i^*(x) dx, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (\text{P-5})$$

b. En déduire que la formule de quadrature  $\mathcal{Q}_n$  est de degré d'exactitude  $n$  au moins si et seulement si

$$w_i^* = w_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

où les  $w_i$  sont donnée par (P-1).



a. Démontrons l'équivalence

$\Rightarrow$  Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On a  $L_i^\star \in \mathbb{R}_n[X]$ . Par hypothèse, la formule de quadrature a pour degré d'exactitude  $n$  au moins et donc on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i^\star, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \int_a^b L_i^\star(x) dx.$$

Or comme  $L_i^\star(x_j) = \delta_{i,j}$ ,  $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a

$$\mathcal{Q}_n(L_i^\star, a, b) = (b - a) \sum_{j=0}^n w_j^\star L_i^\star(x_j) = (b - a) w_i^\star.$$

Ce qui donne

$$w_i^\star = \frac{1}{b - a} \int_a^b L_i^\star(x) dx.$$

$\Leftarrow$  Par hypothèse, les poids  $(w_i^\star)_{i=0}^n$  étant donnés par (P-5), La formule de quadrature s'écrit

$$\mathcal{Q}_n(f, a, b) \stackrel{\text{hyp}}{=} \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i^\star(x) dx.$$

Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a  $P = \mathcal{L}_n(P)$  et

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x)dx &= \int_a^b \mathcal{L}_n(P)(x)dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^n L_i^*(x)P(x_i)dx \\ &= \sum_{i=0}^n P(x_i) \int_a^b L_i^*(x)dx \\ &= (b-a) \sum_{i=0}^n w_i^* P(x_i) = \mathcal{Q}_n(P, a, b). \end{aligned}$$

La formule de quadrature est donc exacte pour tout les polynômes de degré  $n$  au moins.

b. Il suffit pour celà de démontrer que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b L_i^*(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 L_i(t)dt. \quad (R_1)$$

On utilise le changement de variable

$$x = \varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

ce qui correspond bien à  $x_i = \varphi(t_i)$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On a alors

$$\begin{aligned} \int_a^b L_i^*(x)dx &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} L_i^* \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 L_i^* \circ \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_i^\star \circ \varphi(t) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{\varphi(t) - x_j}{x_i - x_j} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{\varphi(t) - \varphi(t_j)}{\varphi(t_i) - \varphi(t_j)} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right) - \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_j\right)}{\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i\right) - \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_j\right)} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j} = L_i(t). \end{aligned}$$

ce qui donne  $(R_1)$ .

On suppose que  $w_i^\star = w_i$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Q. 5

Montrer que  $\mathcal{Q}_n$  est l'unique formule de quadrature élémentaire à  $(n+1)$  points distincts dans  $[a, b]$  ayant pour degré d'exactitude  $(2n+1)$  précisément.

Soit  $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ . Avec le changement de variable  $x = \varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x)dx &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} P \circ \varphi(t) \varphi'(t) dt \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 P \circ \varphi(t) dt. \end{aligned} \tag{R_2}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(P, a, b) &= (b-a) \sum_{i=0}^n w_i^* P(x_i) \\ &= (b-a) \sum_{i=0}^n w_i P(\varphi(t)_i) \\ &= \frac{b-a}{2} \mathcal{S}_n(P \circ \varphi) \end{aligned} \tag{R_3}$$

Comme  $\varphi \in \mathbb{R}_1[X]$ , on a  $P \circ \varphi \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ .<sup>a</sup> La formule de quadrature  $\mathcal{S}_n$  étant de degré d'exactitude  $2n+1$ , on a alors

$$\mathcal{S}_n(P \circ \varphi) = \int_{-1}^1 P \circ \varphi(t) dt.$$

On en déduit en utilisant (R<sub>2</sub>)

$$\int_a^b P(x)dx = \frac{b-a}{2} \mathcal{S}_n(P \circ \varphi)$$

puis en utilisant  $(R_3)$

$$\int_a^b P(x)dx = \mathcal{Q}_n(P, a, b).$$

La formule de quadrature élémentaire  $\mathcal{Q}_n$  est donc de degré d'exactitude  $2n + 1$ .

Par l'absurde on peut démontrer que  $\mathcal{Q}_n$  n'est pas de degré d'exactitude  $2n + 2$  car sinon  $\mathcal{S}_n$  serait aussi de degré d'exactitude  $2n + 2$ .

Par l'absurde on peut démontrer que  $\mathcal{Q}_n$  est unique car sinon  $\mathcal{S}_n$  ne serait pas unique.

---

<sup>a</sup>Rappel: Soient  $P \in \mathbb{R}_p[X]$  et  $Q \in \mathbb{R}_q[X]$ , alors  $P \circ Q \in \mathbb{R}_{pq}[X]$ .

