

EXERCICE 11

L'objectif de cet exercice est de calculer les points et les poids de la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n + 1)$ points. La formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n + 1)$ points sur $[-1, 1]$ est donnée par

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx 2 \sum_{i=0}^n w_i g(t_i)$$

où les $(t_i)_{i=0}^n$ sont les $(n + 1)$ racines du polynôme de Legendre $P_{n+1}(t)$. Cette formule a pour degré d'exactitude $2n + 1$.

Soient $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et $\|P\| = \langle P, P \rangle^{1/2}$ la norme associée.

Soit M_n le polynôme de Legendre normalisé de degré $(n + 1)$, $M_n = \frac{P_n}{\|P_n\|}$. On utilisera les résultats sur les polynômes de Legendre rappelés en cours.

Q. 1

Montrer que

$$c_{n+1}M_{n+1}(t) = tM_n(t) - c_nM_{n-1}(t), \quad n > 1 \quad (\text{P-1})$$

avec

$$M_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad M_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t \quad \text{et} \quad c_n = \sqrt{\frac{n^2}{4n^2 - 1}}$$

R. 1

Par définition, on a $M_n = \frac{P_n}{\|P_n\|}$ et

$$\|P_n\|^2 = \langle P_n, P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_n(t)P_n(t)dx = \frac{2}{2n + 1}.$$

On en déduit que

$$M_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n.$$

De plus, par la formule de récurrence de Bonnet, on obtient

$$M_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ et } M_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} t$$

ainsi que, $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned} (n+1) \sqrt{\frac{2}{2n+3}} M_{n+1}(t) &= (2n+1) \sqrt{\frac{2}{2n+1}} t M_n(t) - n \sqrt{\frac{2}{2n-1}} M_{n-1} \\ &= \sqrt{2(2n+1)} t M_n(t) - n \sqrt{\frac{2}{2n-1}} M_{n-1} \end{aligned}$$

En multipliant cette équation par $\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}}$, on a

$$(n+1) \sqrt{\frac{2}{2n+3}} \sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}} M_{n+1}(t) = t M_n(t) - n \sqrt{\frac{2}{2n-1}} \sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}} M_{n-1}$$

Or on a

$$n \sqrt{\frac{2}{2n-1}} \sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}} = \sqrt{\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}} = c_n$$

et

$$(n+1)\sqrt{\frac{2}{2n+3}}\sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}} = \sqrt{\frac{(n+1)^2}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}} = c_{n+1}$$

ce qui démontre le résultat voulu.

On définit le vecteur $\mathbf{M}(t)$ de \mathbb{R}^{n+1} par

$$\mathbf{M}(t) = (M_0(t), \dots, M_n(t))^t.$$

Q. 2

Montrer que l'on a

$$t\mathbf{M}(t) = \mathbb{A}\mathbf{M}(t) + c_{n+1}M_{n+1}(t)\mathbf{e}_{n+1} \quad (\text{P-2})$$

où l'on explicitera la matrice tridiagonale $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ en fonction des coefficients c_1, \dots, c_n . Le vecteur \mathbf{e}_{n+1} étant le $(n+1)$ -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} .

R. 2

On déduit de la question précédente que

$$tM_0(t) = \sqrt{\frac{1}{3}}t = c_1M_1(t)$$

et

$$tM_i(t) = c_iM_{i-1}(t) + c_{i+1}M_{i+1}(t), \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Ces $(n + 1)$ équations peuvent s'écrire matriciellement sous la forme

$$t \begin{pmatrix} M_0(t) \\ M_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1}(t) \\ M_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & 0 & c_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0(t) \\ M_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1}(t) \\ M_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ c_{n+1}M_{n+1}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{A}\mathbf{M}(t) + c_{n+1}M_{n+1}(t)\mathbf{e}_{n+1}.$$

Q. 3

En déduire que les $(n + 1)$ racines distinctes de $M_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ sont les $(n + 1)$ valeurs propres de \mathbb{A} .

R. 3

Le polynôme de Legendre $P_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ admet $(n + 1)$ racines simples distinctes dans $] - 1, 1[$ notées $(t_i)_{i=0}^n$. (voir rappels) Donc le polynôme de Legendre normalisé $M_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ a les mêmes racines et on déduit de la question précédente que

$$\mathbb{A}\mathbf{M}(t_i) = t_i\mathbf{M}(t_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Comme les $(n + 1)$ racines de P_{n+1} séparent strictement les n racines de P_n (voir rappels), alors $P_n(t_i) \neq 0$ et donc $M_n(t_i) \neq 0$. On en déduit que le vecteur $\mathbf{M}(t_i)$ est non nul et,

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, (t_i, \mathbf{M}(t_i)) \text{ est un mode propre de } \mathbb{A}.$$

On peut noter que \mathbb{A} est symétrique et donc ses valeurs propres sont réelles.

Les $(n + 1)$ valeurs propres de la matrice \mathbb{A} sont les $(n + 1)$ racines de P_{n+1} , et donc les $(n + 1)$ points de la formule de quadrature de Gauss-Legendre.

Q. 4

Montrer que

$$2 \sum_{k=0}^n w_k M_i(t_k) M_j(t_k) = \delta_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2 \quad (\text{P-3})$$

où $\delta_{i,j} = 0$, si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$.

R. 4

Par construction, on a

$$\int_{-1}^1 M_i(t) M_j(t) dx = \delta_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

On a $M_i \in \mathbb{R}_i[X]$ et $M_j \in \mathbb{R}_j[X]$, ce qui donne $M_i M_j \in \mathbb{R}_{i+j}[X]$ avec $i + j \leq 2n$. Or la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n + 1)$ points a pour degré d'exactitude $2n + 1$, elle est donc exacte pour le polynôme $M_i M_j$. On en déduit alors

$$\delta_{i,j} = \int_{-1}^1 M_i(t) M_j(t) dt = 2 \sum_{k=0}^n w_k M_i(t_k) M_j(t_k), \quad \forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

On note $W \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice diagonale, de diagonale (w_0, \dots, w_n) et $P \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice définie par $P_{i+1,j+1} = M_j(t_i)$, $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$.

Q. 5

- a. Montrer que $2\mathbb{P}^t\mathbb{W}\mathbb{P} = \mathbb{I}$.
- b. En déduire que $\mathbb{W}^{-1} = 2\mathbb{P}\mathbb{P}^t$.
- c. En déduire que $\frac{1}{w_i} = 2 \sum_{k=0}^n (\mathbb{M}_k(t_i))^2, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

R. 5

- a. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$, on a

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}^t\mathbb{W}\mathbb{P})_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n+1} (\mathbb{P}^t)_{i,k} (\mathbb{W}\mathbb{P})_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_{k,i} (\mathbb{W}\mathbb{P})_{k,j} \end{aligned}$$

et, comme \mathbb{W} est diagonale,

$$(\mathbb{W}\mathbb{P})_{k,j} = \sum_{l=1}^{n+1} \mathbb{W}_{k,l} \mathbb{P}_{l,j} = \mathbb{W}_{k,k} \mathbb{P}_{k,j}.$$

On obtient donc

$$(\mathbb{P}^t\mathbb{W}\mathbb{P})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_{k,i} \mathbb{W}_{k,k} \mathbb{P}_{k,j} = \sum_{k=1}^{n+1} w_{k-1} \mathbb{M}_{i-1}(t_{k-1}) \mathbb{M}_{j-1}(t_{k-1}).$$

En utilisant la relation démontré dans la question précédente, on a

$$(\mathbb{P}^t \mathbb{W} \mathbb{P})_{i,j} = \frac{1}{2} \delta_{i-1,j-1} = \frac{1}{2} \delta_{i,j}$$

c'est à dire

$$\mathbb{P}^t \mathbb{W} \mathbb{P} = \frac{1}{2} \mathbb{I}$$

et on en déduit que \mathbb{P} et \mathbb{W} sont inversibles .

b. A partir de $\mathbb{P}^t \mathbb{W} \mathbb{P} = \frac{1}{2} \mathbb{I}$, on déduit

$$2\mathbb{I} = (\mathbb{P}^t \mathbb{W} \mathbb{P})^{-1} = 2\mathbb{I} = \mathbb{P}^{-1} \mathbb{W}^{-1} (\mathbb{P}^t)^{-1}$$

En multipliant par \mathbb{P} à gauche et par \mathbb{P}^t à droite, on obtient

$$\mathbb{W}^{-1} = 2\mathbb{P} \mathbb{P}^t.$$

c. Comme la matrice \mathbb{W} est diagonale inversible, son inverse est diagonale et on a

$$(\mathbb{W}^{-1})_{i,i} = \frac{1}{\mathbb{W}_{i,i}} = \frac{1}{w_{i-1}}, \quad \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{w_{i-1}} &= 2(\mathbb{P}\mathbb{P}^\mathbf{t})_{i,i} \\ &= 2 \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}_{i,j}(\mathbb{P}^\mathbf{t})_{j,i} \\ &= 2 \sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}_{i,j}^2 \\ &= 2 \sum_{k=0}^n (\mathbb{M}_k(t_{i-1}))^2, \quad \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket.\end{aligned}$$

On suppose que l'on dispose de la fonction **algorithmique** `eig`(\mathbb{A}) retournant l'ensemble des valeurs propres d'une matrice symétrique $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dans l'ordre croissant sous la forme d'un vecteur de \mathbb{R}^{n+1} .

Q. 6

- Ecrire la fonction $[\mathbf{t}, \mathbf{w}] \leftarrow \text{GaussLegendre}(n)$ retournant le tableau des points \mathbf{t} et le tableau des poids \mathbf{w} en utilisant les résultats obtenus dans cet exercice.
- Ecrire la fonction $I \leftarrow \text{QuadElemGaussLegendre}(f, a, b, n)$ retournant une approximation de $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $(n+1)$ points sur l'intervalle $[a, b]$.

R. 6

- Les $(n+1)$ points $(t_i)_{i=0}^n$ de la méthode de quadrature de Gauss-Legendre sur $[-1, 1]$, sont les racines du polynôme de Legendre

P_{n+1} de degré $n + 1$. Pour les calculer, on va utiliser le fait que ce sont les valeurs propres de la matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & 0 & c_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_n & 0 \end{pmatrix}$$

avec $c_k = \sqrt{\frac{k^2}{4k^2-1}}$, $\forall k \geq 1$.

Pour calculer les poids $(w_i)_{i=0}^n$, on va utiliser la formule

$$\frac{1}{w_i} = 2 \sum_{k=0}^n (M_k(t_i))^2, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

conjointement avec la formule de récurrence

$$M_k(t) = \frac{1}{c_k} (tM_{k-1}(t) - c_{k-1}M_{k-2}(t)), \quad k \geq 2, \quad \text{avec } M_0(t) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad M_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t.$$

Algorithme 1 Fonction **GaussLegendre** retournant le tableau des points \mathbf{t} et le tableau des poids \mathbf{w}

Données : n : $n \in \mathbb{N}$

Résultat : \mathbf{t} : vecteur de \mathbb{R}^{n+1} avec $\mathbf{t}(i) = t_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$

\mathbf{w} : vecteur de \mathbb{R}^{n+1} avec $\mathbf{w}(i) = w_{i-1}, \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$

```
1: Fonction  $[\mathbf{t}, \mathbf{w}] \leftarrow \text{GaussLegendre}(n)$ 
2:    $\mathbf{c} \leftarrow \mathbf{O}_n$ 
3:    $\mathbb{A} \leftarrow \mathbb{O}_{n+1, n+1}$ 
4:   Pour  $k \leftarrow 1$  à  $n$  faire
5:      $\mathbf{c}(k) \leftarrow \text{sqrt}(k^2 / (4 * k^2 - 1))$ 
6:      $\mathbb{A}(k, k+1) \leftarrow \mathbf{c}(k)$ 
7:      $\mathbb{A}(k+1, k) \leftarrow \mathbf{c}(k)$ 
8:   Fin Pour
9:    $\mathbf{t} \leftarrow \text{eig}(\mathbb{A})$ 
10:  Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n+1$  faire
11:     $M0 \leftarrow \text{sqrt}(1/2)$ 
12:     $M1 \leftarrow \text{sqrt}(3/2) * \mathbf{t}(i)$ 
13:     $S \leftarrow M0^2 + M1^2$ 
14:    Pour  $k \leftarrow 2$  à  $n$  faire
15:       $M \leftarrow (1/\mathbf{c}(k)) * (M1 * \mathbf{t}(i) - \mathbf{c}(k-1) * M0)$ 
16:       $S \leftarrow S + M^2$ 
17:       $M0 \leftarrow M1$ 
18:       $M1 \leftarrow M$ 
19:    Fin Pour
20:     $w(i) \leftarrow 1/(2 * S)$ 
21:  Fin Pour
```

b. On va utiliser la formule

$$I = (b - a) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

avec $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i$ où les points $(t_i)_{i=0}^n$ et les poids $(w_i)_{i=0}^n$ sont ceux de la méthode de quadrature de Gauss-Legendre sur $[-1, 1]$.

Algorithme 2 Fonction **QuadElemGaussLegendre** retournant une approximation de $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant la formule de quadrature de Gauss-Legendre à $n + 1$ points sur l'intervalle $[a, b]$.

Données : f : une fonction de $[a, b]$ à valeurs réels
 a, b : deux réels avec $a < b$
 n : $n \in \mathbb{N}$

Résultat : I : un réel

```
1: Fonction  $I \leftarrow \text{QuadElemGaussLegendre}(f, a, b, n)$ 
2:    $[t, w] \leftarrow \text{GaussLegendre}(n)$ 
3:    $I \leftarrow 0$ 
4:   Pour  $i \leftarrow 1$  à  $n + 1$  faire
5:      $I \leftarrow I + w(i) * f((a + b)/2 + (b - a)/2 * t(i))$ 
6:   Fin Pour
7:    $I \leftarrow (b - a) * I$ 
8: Fin Fonction
```

