

EXERCICE 10

Q. 1

Déterminer les points t_0, t_1 de l'intervalle $[-1, 1]$ et les poids w_0, w_1 tel que la formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 g(t)dt \approx 2 \sum_{i=0}^1 w_i g(t_i)$$

soit de degré d'exactitude 3.

R. 1

D'après la Proposition 6.6, si t_0 et t_1 sont distincts et dans l'intervalle $[-1, 1]$ alors avec

$$w_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{t - t_1}{t_0 - t_1} dt \text{ et } w_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} dt$$

la formule de quadrature est de degré d'exactitude 1.

Pour déterminer les points t_0 et t_1 , on utilise la Proposition ?? avec $m = n + 1 = 2$: la formule de quadrature est de degré $2n + 1 = 3$ ssi

$$\int_{-1}^1 \pi_1(t) Q(t) dt = 0, \forall Q \in \mathbb{R}_1[X]$$

avec $\pi_1(t) = (t - t_0)(t - t_1)$. Par linéarité ceci est équivalent à

$$\int_{-1}^1 \pi_1(t) t^k dt = 0, \forall k \in \llbracket 0, 1 \rrbracket$$

c'est à dire

$$\int_{-1}^1 \pi_1(t) dt = 0 \text{ et } \int_{-1}^1 \pi_1(t)t dt = 0.$$

Or on a

$$\int_{-1}^1 \pi_1(t) dt = \int_{-1}^1 t^2 - (t_0 + t_1)t + t_0 t_1 dt = \frac{2}{3} + 2t_0 t_1$$

et

$$\int_{-1}^1 \pi_1(t)t dt = \int_{-1}^1 t^3 - (t_0 + t_1)t^2 + t_0 t_1 t dt = -\frac{2}{3}(t_0 + t_1).$$

On est amené à résoudre le système non linéaire

$$t_0 t_1 = -\frac{1}{3} \text{ et } -\frac{2}{3}(t_0 + t_1) = 0$$

ce qui donne $t_0 = -\sqrt{3}/3$ et $t_1 = \sqrt{3}/3$.

Il reste à calculer w_0 et w_1 . On a

$$w_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{t - \sqrt{3}/3}{-2\sqrt{3}/3} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{-\sqrt{3}/3}{-2\sqrt{3}/3} dt = 1/2$$

et

$$w_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{t + \sqrt{3}/3}{2\sqrt{3}/3} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}/3}{2\sqrt{3}/3} dt = 1/2.$$

La formule de quadrature

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx g\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

est donc d'ordre 3.

Q. 2

En déduire une formule de quadrature pour le calcul de $\int_a^b f(x)dx$ qui soit de degré d'exactitude 3.

R. 2

On effectue le changement de variable $x = \varphi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$, en appliquant la Proposition 6.2 (changement de variable affine), pour obtenir que

$$(b-a) \left(\frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1) \right)$$

est une formule de quadrature approchant $\int_a^b f(x)dx$ avec un degré d'exactitude de 3 où $x_0 = \varphi(t_0)$ et $x_1 = \varphi(t_1)$.

