

# Analyse Numérique I\*

Sup'Galilée, Ingénieurs MACS, 1ère année / L3 MIM

François Cuvelier

Laboratoire d'Analyse Géométrie et Applications  
Institut Galilée  
Université Paris XIII.

2025/11/29

# Chapitre V

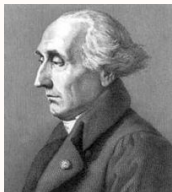
## Interpolation

## 1 Interpolation de Lagrange

- Exercices
- Résultats
- Stabilité

## 2 Interpolation de Lagrange-Hermite

# Historique



(a) *Joseph-Louis Lagrange* 1736-1813, mathématicien italien puis français



(b) *Pafnouti Lvovitch Tchebychev* 1821-1894, mathématicien russe



(c) *Charles Hermite* 1822-1901, mathématicien français



(d) *Henri-Léon Lebesgue* 1875-1941, mathématicien français

- 1 Interpolation de Lagrange
  - Exercices
  - Résultats
  - Stabilité
- 2 Interpolation de Lagrange-Hermite

## Exercice 1



Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(n + 1)$  couples de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , tels que les  $x_i$  sont distincts deux à deux. On note

Q. 1

① Soit  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Montrer qu'il existe un unique polynôme  $L_i$  de degré  $n$  vérifiant

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (1)$$

② Montrer que les  $(L_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  forment une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ ).

On définit le polynôme  $P_n$  par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x). \quad (2)$$

Q. 2

Montrer que polynôme  $P_n$  est l'unique polynôme de degré au plus  $n$  vérifiant  $P_n(x_i) = y_i$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

## ♥ Definition 1.1

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(n + 1)$  couples de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , tels que les  $x_i$  sont distincts deux à deux. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** de  $\mathbb{R}_n[X]$ , noté  $P_n$ , et vérifiant

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P_n(x_i) = y_i \quad (1)$$

est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x), \quad (2)$$

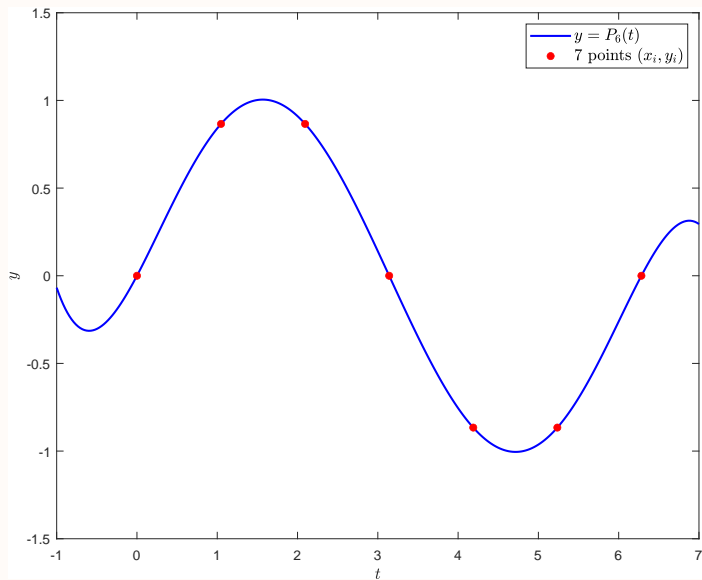
où les  $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$  sont les **polynômes de base de Lagrange** donnés par

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (3)$$

## Théorème 1.1

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange**,  $\mathcal{P}_n$ , associé aux  $(n + 1)$  couples  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , est l'unique polynôme de degré au plus  $n$ , vérifiant

$$\mathcal{P}_n(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (4)$$



Polynôme d'interpolation de Lagrange avec 7 points donnés



## Exercice 2



Ecrire la fonction **Lagrange** permettant de calculer  $\mathcal{P}_n$  (polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux  $(n + 1)$  couples  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ ) en  $t \in \mathbb{R}$ .

On a

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(t).$$

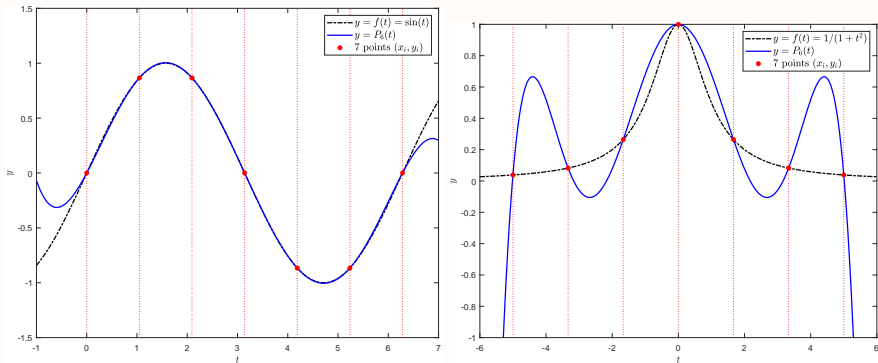
avec

$$L_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - x_j}{x_i - x_j}$$

Soit une fonction  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que les  $y_i$  sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (5)$$

On cherche à évaluer l'erreur  $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .

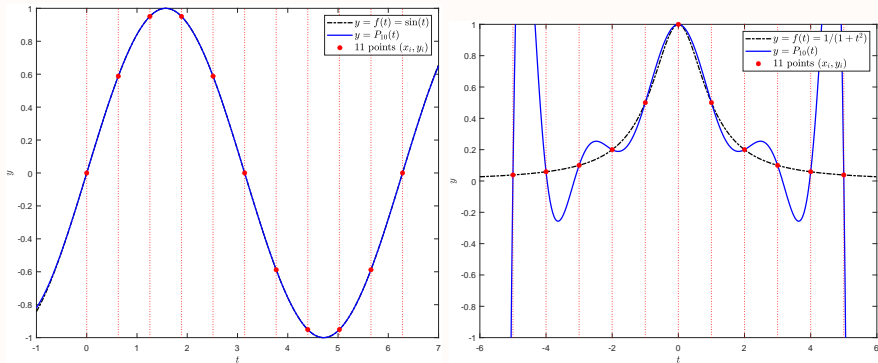


Polynômes d'interpolation de lagrange avec  $n = 6$  (7 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction  $f : t \longrightarrow \sin(t)$  avec  $x_0 = 0$ ,  $x_6 = 2\pi$  et à droite pour la fonction  $f : t \longrightarrow 1/(1+t^2)$  avec  $x_0 = -5$ ,  $x_6 = 5$ .

Soit une fonction  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que les  $y_i$  sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (5)$$

On cherche à évaluer l'erreur  $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .

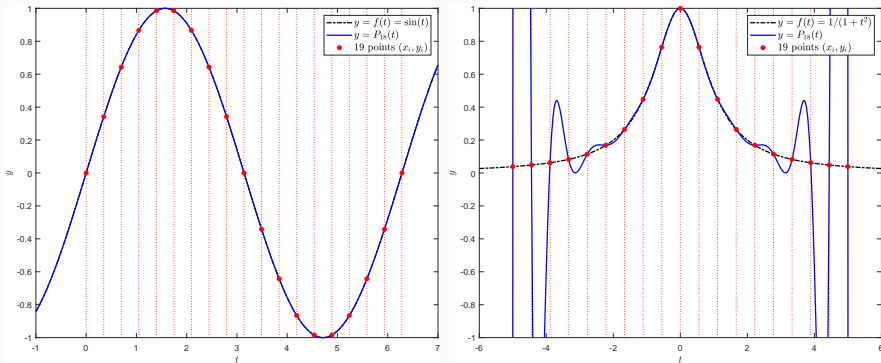


Polynômes d'interpolation de lagrange avec  $n = 10$  (11 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction  $f : t \longrightarrow \sin(t)$  avec  $x_0 = 0$ ,  $x_{10} = 2\pi$  et à droite pour la fonction  $f : t \longrightarrow 1/(1+t^2)$  avec  $x_0 = -5$ ,  $x_{10} = 5$ .

Soit une fonction  $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que les  $y_i$  sont donnés par

$$y_i = f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (5)$$

On cherche à évaluer l'erreur  $E_n(t) = f(t) - \mathcal{P}_n(t)$ ,  $\forall t \in [a, b]$ .



Polynômes d'interpolation de lagrange avec  $n = 18$  (19 points) uniformément répartis. A gauche pour la fonction  $f : t \longrightarrow \sin(t)$  avec  $x_0 = 0$ ,  $x_{18} = 2\pi$  et à droite pour la fonction  $f : t \longrightarrow 1/(1+t^2)$  avec  $x_0 = -5$ ,  $x_{18} = 5$ .

- 1 Interpolation de Lagrange
  - Exercices
  - **Résultats**
  - Stabilité
- 2 Interpolation de Lagrange-Hermite



### Lemme 1.1 : Séparation des zéros d'une fonction

Soient  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $(x_i)_{i=0}^n$  dans  $I$ , avec  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , tel que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad f(x_i) = 0.$$

- ① Si  $f \in \mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$ , avec  $f$  dérivable sur  $I$ , alors, il existe  $(\xi_i)_{i=1}^n$  dans  $I$ , avec  $x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \dots < \xi_n < x_n$ , tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f^{(1)}(\xi_i) = 0.$$

- ② Si  $f \in \mathcal{C}^{n-1}(I; \mathbb{R})$ , avec  $f^{(n-1)}$  dérivable alors il existe  $\xi \in ]x_0, x_n[$  tel que  $f^{(n)}(\xi) = 0$ .

voir Exercice 3 

#### Exercice 4

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$  et  $(n + 1)$  couples de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , tels que les  $x_i \in [a; b]$  sont distincts deux à deux et  $y_i = f(x_i)$ .

On note par  $P_n$  le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  et  $\pi_n$  le polynôme de degré  $(n + 1)$  défini par

$$\pi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Q. 1

Soit  $x \in [a; b]$  tel que, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x \neq x_i$ . On note

$$x_{\min} = \min(x, x_0, \dots, x_n), \quad x_{\max} = \max(x, x_0, \dots, x_n),$$

et

$$F(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t).$$

- ① Démontrer que  $F$  est définie sur  $[a; b]$  et admet  $(n + 2)$  racines distinctes.
- ② Montrer qu'il existe  $\xi_x \in ]x_{\min}; x_{\max}[$  tel que  $F^{(n+1)}(\xi_x) = 0$ .
- ③ En déduire que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \quad (1)$$

Q. 2

Montrer que,  $\forall x \in [a; b]$ , il existe  $\xi_x$  appartenant au plus petit intervalle ouvert contenant  $x, x_0, \dots, x_n$  vérifiant (1).

## Théorème 1.2

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_i)_{i=0}^n$ ,  $(n+1)$  points distincts de l'intervalle  $[a, b]$ . Soient  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b]; \mathbb{R})$  et  $\mathcal{P}_n$  le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré  $n$  passant par  $(x_i, f(x_i))$ ,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Alors,

$\forall x \in [a, b], \exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$ ,

$$f(x) - \mathcal{P}_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i) \quad (6)$$

Comment "minimiser"  $f(x) - \mathcal{P}_n(x)$ ?

"jouer" sur le choix des points  $x_i$



Trouver  $(\bar{x}_i)_{i=0}^n$ ,  $\bar{x}_i \in [a, b]$ , distincts deux à deux, tels que  
 $\forall (x_i)_{i=0}^n$ ,  $x_i \in [a, b]$ , distincts 2 à 2

$$\max_{t \in [a, b]} \prod_{i=0}^n |t - \bar{x}_i| \leq \max_{t \in [a, b]} \prod_{i=0}^n |t - x_i|, \quad (7)$$

On a alors le résultat suivant

### **Théorème 1.3 : *admis***

Les points réalisant (7) sont les points de Tchebychev donnés par

$$\bar{x}_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (8)$$

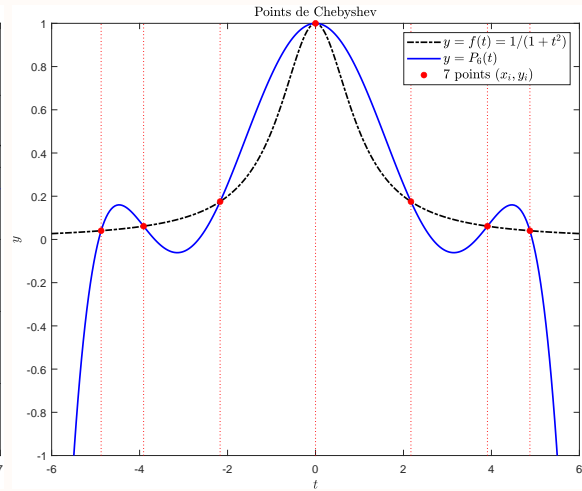
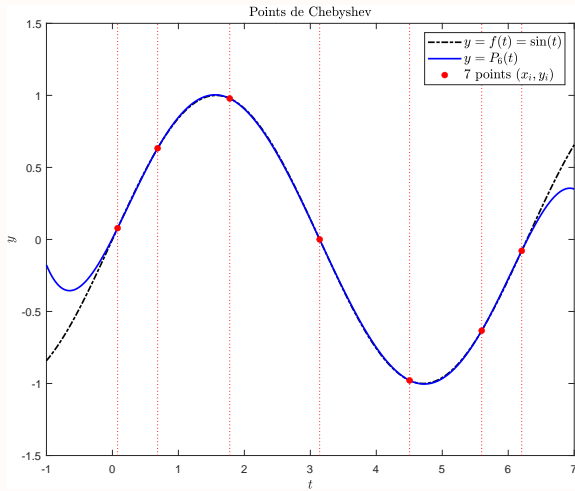


Figure: Erreurs d'interpolation avec  $n = 6$

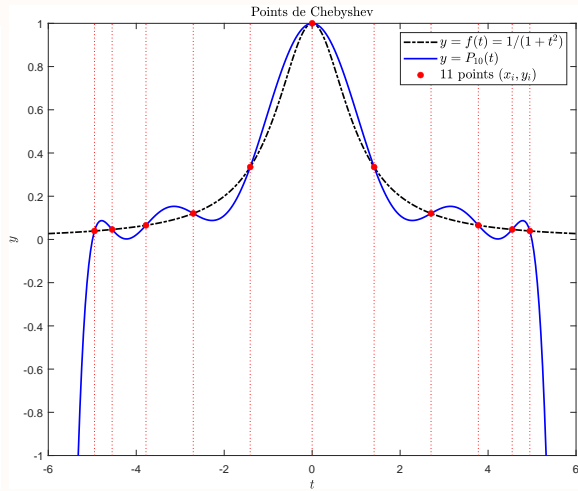
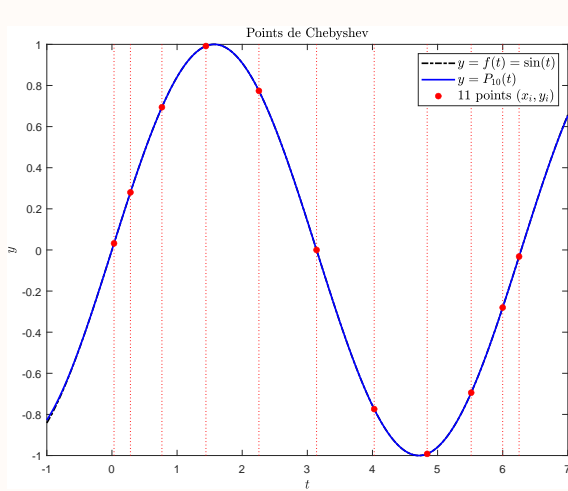


Figure: Erreurs d'interpolation avec  $n = 10$

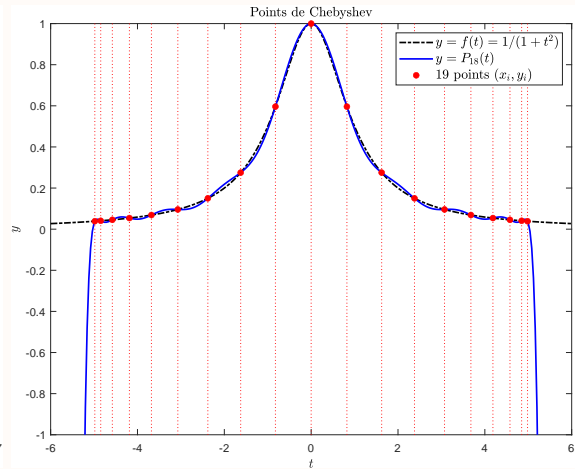
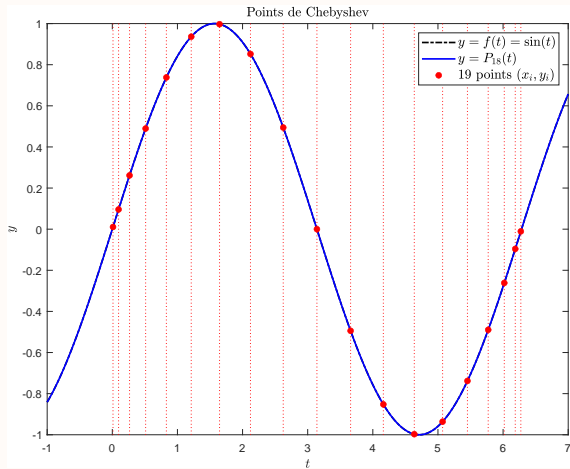


Figure: Erreurs d'interpolation avec  $n = 18$

- 1 Interpolation de Lagrange
  - Exercices
  - Résultats
  - Stabilité
- 2 Interpolation de Lagrange-Hermite

On commet des erreurs sur les données

$$f_i \approx f(x_i), \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) \quad \text{et} \quad \hat{P}_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x)$$

$$\begin{aligned} |\hat{P}_n(x) - P_n(x)| &= \left| \sum_{i=0}^n (f_i - f(x_i)) L_i(x) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^n |f_i - f(x_i)| |L_i(x)| \\ &\leq \max_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} |f_i - f(x_i)| \sum_{i=0}^n |L_i(x)|. \end{aligned}$$

Constante de Lebesgue :  $\Lambda_n = \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |L_i(x)|.$

$$\|\hat{P}_n - P_n\|_{\infty} \leq \Lambda_n \max_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} |f_i - f(x_i)|.$$

## Théorème 1.4

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_0, \dots, x_n$  des points distincts de  $[a, b]$ . L'application  $\mathcal{L}_n : \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$  qui à toute fonction  $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$  donne le polynôme d'interpolation de Lagrange  $P_n$  associés aux couples de  $(x_i, f(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est bien définie et linéaire. On munit  $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}_n[X]$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . On a alors

$$\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq \Lambda_n \|f\|_\infty, \quad (9)$$

ce qui assure la continuité de  $\mathcal{L}_n$ ,

$$\|\mathcal{L}_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{L}_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \Lambda_n, \quad (10)$$

et

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R}), \quad \|f - \mathcal{L}_n(f)\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_\infty \quad (11)$$

voir Exercice 5 

- Pour les **points équi-distants**  $x_i = a + ih$ ,  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et  $h = (b - a)/n$ ,

$$\Lambda_n \geq \frac{2^n}{4n^2} \quad (12)$$

et le comportement asymptotique ( $n \rightarrow +\infty$ )

$$\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{e \cdot n \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (13)$$

- Pour les **points de Tchebychev**,

$$\Lambda_n \leq C \ln(n), \quad \text{avec } C > 0 \quad (14)$$

et le comportement asymptotique

$$\Lambda_n \sim \frac{2}{\pi} \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (15)$$

voir **Demailly2006**, page 47-48.





### Proposition : *admis*

Pour toute famille de points d'interpolation, il existe une fonction  $f \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{R})$  telle que la suite des polynômes d'interpolation de Lagrange associés ne converge pas uniformément.



### Proposition : *admis*

Soit  $f$  une fonction lipschitzienne sur  $[a, b]$  à valeurs réelles, i.e. il existe une constante  $K \geq 0$  telle que  $\forall (x, y) \in [a, b]^2$ , on ait  $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ . Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_0, \dots, x_n$  les points de Tchebychev  $[a, b]$ . On note  $\mathcal{L}_n(f)$  le polynôme d'interpolation de Lagrange associés aux couples de  $(x_i, f(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ .

Alors la suite  $(\mathcal{L}_n(f))_{n \geq 1}$  des polynômes d'interpolation converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ .

voir **Demailly2006-im**, page 50.

L'interpolation de Lagrange en des points équidistants n'est à utiliser qu'avec un nombre de points assez faible : des phénomènes d'instabilités pouvant apparaître.

## Exercice 6 Interpolation de Lagrange-Hermite

Soient  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$   $n + 1$  triplets de  $\mathbb{R}^3$ , où les  $x_i$  sont des points distincts deux à deux de l'intervalle  $[a, b]$ . Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté  $H_n$ , associé aux  $n + 1$  triplets  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , est défini par

$$H_n(x_i) = y_i \text{ et } H'_n(x_i) = z_i, \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (1)$$

Q. 1

*Quel est a priori le degré de  $H_n$ ?*

On définit le polynôme  $P_n$  par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (2)$$

avec, pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $A_i$  et  $B_i$  polynômes de degré au plus  $2n + 1$  indépendants des valeurs  $y_i$  et  $z_i$ .

Q. 2

- ① Déterminer des conditions suffisantes sur  $A_i$  et  $B_i$  pour que  $P_n$  vérifie (1).
- ② En déduire les expressions de  $A_i$  et  $B_i$  en fonction de  $L_i$  et de  $L'_i(x_i)$  où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Q. 3

*Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus  $2n + 1$  défini par (1).*

## ♥ Definition 2.1

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$   $(n+1)$  triplets de  $\mathbb{R}^3$ , où les  $x_i$  sont des points distincts deux à deux de  $\mathbb{R}$ . Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, noté  $H_n$ , associé aux  $(n+1)$  triplets  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , est défini par

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (16)$$

avec

$$A_i(x) = (1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i))L_i^2(x) \quad \text{et} \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \quad (17)$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

## Théorème 2.1

Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**,  $H_n$ , associé aux  $n + 1$  triplets  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , est l'unique polynôme de degré au plus  $2n + 1$ , vérifiant

$$H_n(x_i) = y_i \text{ et } H'_n(x_i) = z_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (18)$$

## Exercice 7 Interpolation de Lagrange-Hermite

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$ . et  $(x_i)_{i=0}^n$ ,  $(n+1)$  points distincts de  $[a, b]$ . On note

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad y_i = f(x_i) \quad \text{et} \quad z_i = f'(x_i).$$

On définit, par  $H_n$ , le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux triplets  $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  et par  $\pi_n$  le polynôme défini par

$$\pi_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^n (t - x_i).$$

Q. 1

Soit  $x \in [a, b]$  tel que, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x \neq x_i$ . On note

$$x_{\min} = \min(x, x_0, \dots, x_n), \quad x_{\max} = \max(x, x_0, \dots, x_n),$$

et

$$F(t) = f(t) - H_n(t) - \frac{f(x) - H_n(x)}{\kappa_n(x)} \kappa_n(t)$$

avec  $\kappa_n \stackrel{\text{def}}{=} \pi_n^2$ .

- ① Démontrer que  $F$  est définie sur  $[a, b]$  et que  $F \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$ .
- ② Montrer que  $F'$  admet  $2(n+1)$  zéros distincts.
- ③ Montrer qu'il existe  $\xi_x \in ]x_{\min}; x_{\max}[$  tel que  $F^{(2n+2)}(\xi_x) = 0$ .
- ④ En déduire que

$$f(x) - H_n(x) = \frac{\kappa_n(x)}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi_x). \quad (1)$$

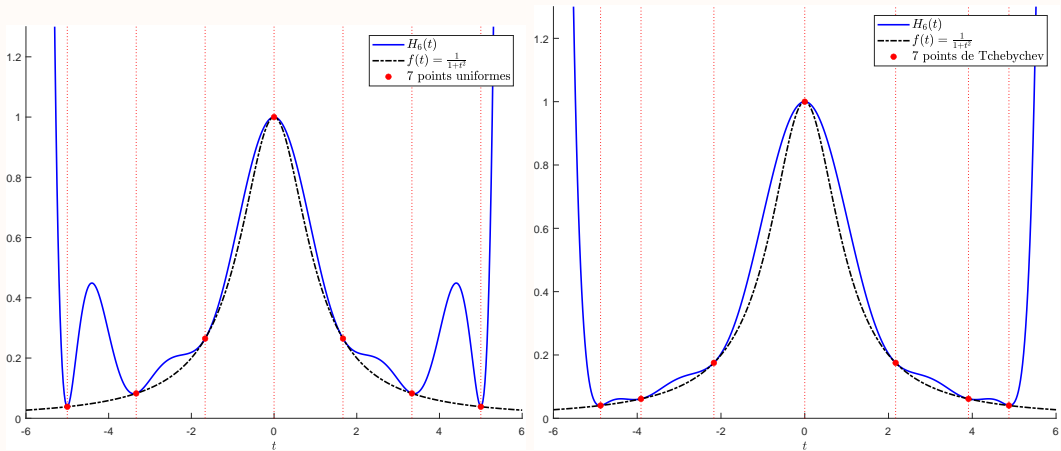
Q. 2

Montrer que,  $\forall x \in [a, b]$ , il existe  $\xi_x$  appartenant au plus petit intervalle ouvert contenant  $x, x_0, \dots, x_n$  vérifiant (1).

## Théorème 2.2

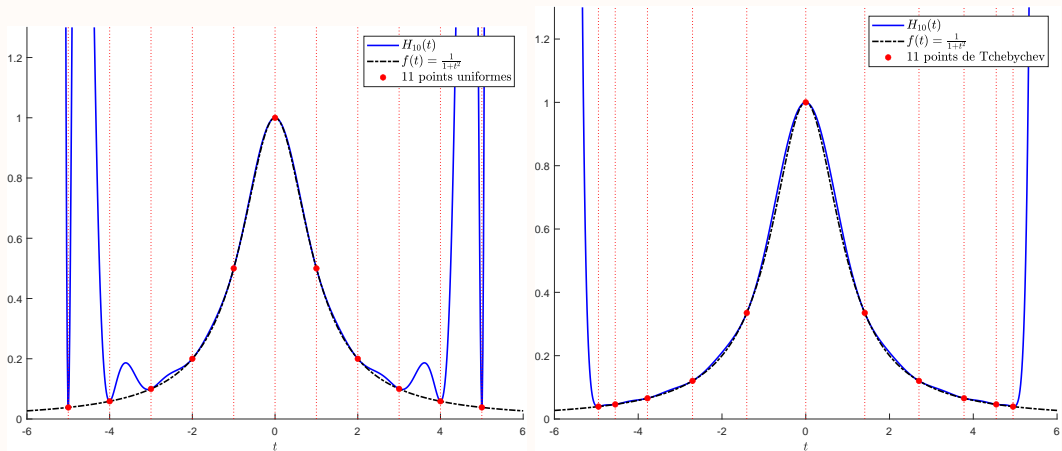
Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_0, \dots, x_n$ ,  $n + 1$  points distincts de l'intervalle  $[a, b]$ . Soient  $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$  et  $H_n$  le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux  $n + 1$  triplets  $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ . On a alors  $\forall x \in [a, b]$ ,  $\exists \xi_x \in (\min(x_i, x), \max(x_i, x))$ , tels que

$$f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi_x)}{(2n+2)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \quad (19)$$

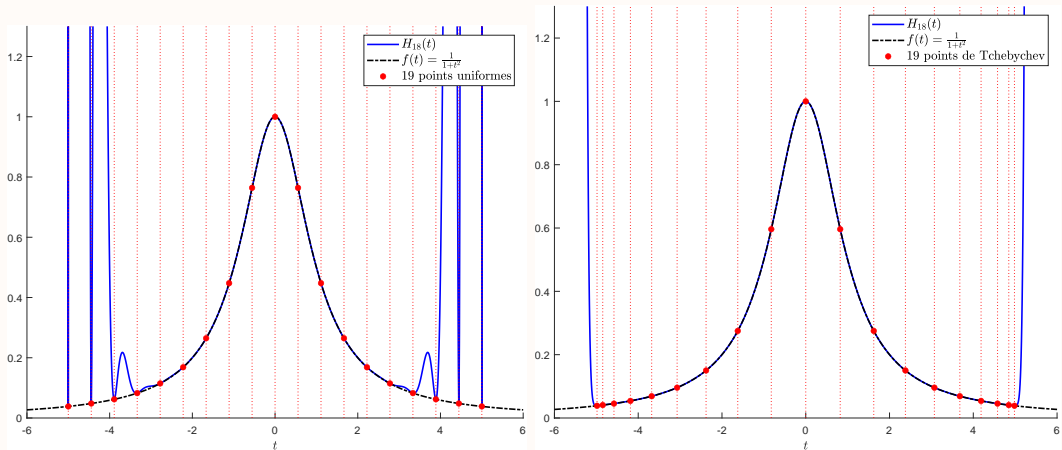


**Figure:** Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec  $n = 6$  (7 points) pour la fonction  $f : x \longrightarrow 1/(1 + 25x^2)$ . A gauche avec des points uniformément répartis et à droite avec des points de Tchebychev





**Figure:** Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec  $n = 10$  (11 points) pour la fonction  $f : x \longrightarrow 1/(1 + x^2)$ . A gauche avec des points uniformément répartis et à droite avec des points de Tchebychev



**Figure:** Polynôme d'interpolation de lagrange-Hermite avec  $n = 18$  (19 points) pour la fonction  $f : x \longrightarrow 1/(1 + x^2)$ . A gauche avec des points uniformément répartis et à droite avec des points de Tchebychev

### ♥ Definition : (rappel)

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$   $(n + 1)$  triplets de  $\mathbb{R}^3$ , où les  $x_i$  sont des points distincts deux à deux de  $\mathbb{R}$ . Le **polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite**, noté  $H_n$ , associé aux  $(n + 1)$  triplets  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , est défini par

$$H_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (20)$$

avec

$$A_i(x) = (1 - 2(x - x_i)L'_i(x_i))L_i^2(x) \quad \text{et} \quad B_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \quad (21)$$

où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

### Exercice 8 Interpolation de Lagrange-Hermite

Ecrire une fonction algorithmique **Hermite** permettant de calculer  $H_n$  (polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux  $n + 1$  triplets  $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ ) en  $t \in \mathbb{R}$ .

Il existe de nombreuses autres façons d'approcher une fonction:

- interpolation affine par morceau,
- interpolation par fonctions splines,
- méthodes des moindres carrés,
- interpolation trigonométrique et FFT,
- ...