

## EXERCICE 4

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$  et  $(n + 1)$  couples de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , tels que les  $x_i \in [a; b]$  sont distincts deux à deux et  $y_i = f(x_i)$ .

On note par  $P_n$  le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points  $(x_i, y_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  et  $\pi_n$  le polynôme de degré  $(n + 1)$  défini par

$$\pi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Q. 1

Soit  $x \in [a; b]$  tel que, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x \neq x_i$ . On note

$$x_{\min} = \min(x, x_0, \dots, x_n), \quad x_{\max} = \max(x, x_0, \dots, x_n),$$

et

$$F(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n(t).$$

- a. Démontrer que  $F$  est définie sur  $[a; b]$  et admet  $(n + 2)$  racines distinctes.
- b. Montrer qu'il existe  $\xi_x \in ]x_{\min}; x_{\max}[$  tel que  $F^{(n+1)}(\xi_x) = 0$ .
- c. En déduire que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\pi_n(x)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi_x). \quad (\text{P-1})$$

R. 1

- a. Comme pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x \neq x_i$ , on a  $\pi_n(x) \neq 0$ . De plus les fonctions  $f$ ,  $P_n$  et  $\pi_n$  étant définies sur  $[a; b]$ , on en déduit que  $F$  est définie sur  $[a; b]$ .  
Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a  $\pi_n(x_i) = 0$  et  $f(x_i) - P_n(x_i) = 0$ , ce qui donne  $F(x_i) = 0$ . Comme  $F(x) = 0$ , on en déduit que  $F$  admet  $(n + 2)$  racines distinctes:  $\{x, x_0, \dots, x_n\}$ .

b. Les fonctions  $P_n$  et  $\pi_n$  sont polynomiales: elles sont donc dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ . Comme  $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$ , on en déduit  $F \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b]; \mathbb{R})$ . Or  $F$  admettant  $(n + 2)$  racines distinctes dans  $]x_{\min}; x_{\max}[$ , on peut alors utiliser le Lemme ?? de [?] pour obtenir

$$\exists \xi_x \in ]x_{\min}; x_{\max}[; \quad F^{(n+1)}(\xi_x) = 0.$$

c. On a

$$0 = F^{(n+1)}(\xi_x) = f^{(n+1)}(\xi_x) - P_n^{(n+1)}(\xi_x) - \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} \pi_n^{(n+1)}(\xi_x).$$

Comme  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a  $P_n^{(n+1)} = 0$ . De plus  $\pi_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ , et comme  $\pi_n(x) = x^{n+1} + Q(x)$  avec  $Q \in \mathbb{R}_n[X]$  (i.e. son monôme de puissance  $n + 1$  à pour coefficient 1) on obtient  $\pi_n^{(n+1)}(x) = (n + 1)!$  On en déduit

$$f^{(n+1)}(\xi_x) = \frac{f(x) - P_n(x)}{\pi_n(x)} (n + 1)!$$

ce qui donne (P-1).

Q. 2

Montrer que,  $\forall x \in [a; b]$ , il existe  $\xi_x$  appartenant au plus petit intervalle ouvert contenant  $x, x_0, \dots, x_n$  vérifiant (P-1).

R. 2

- Si,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x \neq x_i$  alors (P-1) a été démontré dans la question précédente.
- Si,  $\exists i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x = x_i$ , alors l'équation (P-1) est immédiate (avec  $\xi_x$  quelconque) car

$$f(x_i) - P_n(x_i) = 0 \quad \text{et} \quad \pi_n(x_i) = 0.$$

