

EXERCICE 1

Soient $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ $n + 1$ triplets de \mathbb{R}^3 , où les x_i sont des points distincts deux à deux de l'intervalle $[a, b]$. Le polynôme d'interpolation de **Lagrange-Hermite**, noté \mathcal{H}_n , associé aux $n + 1$ triplets $(x_i, y_i, z_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, est défini par

$$\mathcal{H}_n(x_i) = y_i \text{ et } \mathcal{H}'_n(x_i) = z_i, \quad \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad (\text{P-1})$$

Q. 1

Quel est a priori le degré de \mathcal{H}_n ?

On définit le polynôme P_n par

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i A_i(x) + \sum_{i=0}^n z_i B_i(x) \quad (\text{P-2})$$

avec, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, A_i et B_i polynômes de degré au plus $2n + 1$ indépendants des valeurs y_i et z_i .

Q. 2

a. Déterminer des conditions suffisantes sur A_i et B_i pour que P_n vérifie (P-1).

b. En déduire les expressions de A_i et B_i en fonction de L_i et de $L'_i(x_i)$ où

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Q. 3

Démontrer qu'il existe un unique polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite de degré au plus $2n + 1$ défini par (P-1).

