

## EXERCICE 7

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $a < b$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$ . et  $(x_i)_{i=0}^n$ ,  $(n+1)$  points distincts de  $[a, b]$ . On note

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad y_i = f(x_i) \quad \text{et} \quad z_i = f'(x_i).$$

On définit, par  $\mathcal{H}_n$ , le polynôme d'interpolation de Lagrange-Hermite associé aux triplets  $(x_i, f(x_i), f'(x_i))_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  et par  $\pi_n$  le polynôme défini par

$$\pi_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=0}^n (t - x_i).$$

Q. 1

Soit  $x \in [a, b]$  tel que, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x \neq x_i$ . On note

$$x_{\min} = \min(x, x_0, \dots, x_n), \quad x_{\max} = \max(x, x_0, \dots, x_n),$$

et

$$F(t) = f(t) - \mathcal{H}_n(t) - \frac{f(x) - \mathcal{H}_n(x)}{\kappa_n(x)} \kappa_n(t)$$

avec  $\kappa_n \stackrel{\text{def}}{=} \pi_n^2$ .

a. Démontrer que  $F$  est définie sur  $[a, b]$  et que  $F \in \mathcal{C}^{2n+2}([a, b]; \mathbb{R})$ .

b. Montrer que  $F'$  admet  $2(n+1)$  zéros distincts.

c. Montrer qu'il existe  $\xi_x \in ]x_{\min}; x_{\max}[$  tel que  $F^{(2n+2)}(\xi_x) = 0$ .

d. En déduire que

$$f(x) - \mathcal{H}_n(x) = \frac{\kappa_n(x)}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi_x). \quad (\text{P-1})$$

- a. Comme pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x \neq x_i$ , on a  $\kappa_n(x) \neq 0$ . De plus les fonctions  $f$ ,  $\mathcal{H}_n$  et  $\kappa_n$  étant définies sur  $[a; b]$ , on en déduit que  $F$  est définie sur  $[a; b]$ .

Les fonctions  $\mathcal{H}_n$  et  $\kappa_n$  sont polynomiales: elles sont donc dans  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ . Comme  $f \in \mathcal{C}^{2n+2}([a; b]; \mathbb{R})$ , on en déduit  $F \in \mathcal{C}^{2n+2}([a; b]; \mathbb{R})$ .

- b. On peut noter que

$$F'(t) = f'(t) - \mathcal{H}'_n(t) - \frac{f(x) - \mathcal{H}_n(x)}{\kappa_n(x)} \kappa'_n(t)$$

avec  $\kappa'_n(t) = 2\pi'_n(t)\pi_n(t)$ . Comme pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $f'(x_i) - \mathcal{H}'_n(x_i) = 0$  et  $\pi_n(x_i) = 0$ , on en déduit que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad F'(x_i).$$

De plus, on a

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad F(x_i) \quad \text{et} \quad F(x) = 0.$$

On note  $(s_j)_{j=0}^{n+1}$  les éléments de  $\{x, x_0, \dots, x_n\}$  ordonnés dans l'ordre croissant. On a donc

$$s_0 < s_1 < \dots < s_{n+1} \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket, \quad F(s_j) = 0.$$

Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Sur l'intervalle  $[s_k, s_{k+1}]$ ,  $s_k < s_{k+1}$ , on a  $F(s_k) = F(s_{k+1}) (= 0)$  et le théorème de Rolle s'applique:

$$\exists \xi_k \in ]s_k, s_{k+1}[ , \quad F^{(1)}(\xi_k) = 0.$$

La fonction  $F^{(1)}$  admet au moins  $(n+1)$  zéros distincts, les  $(\xi_k)_{k=1}^{n+1}$ , avec

$$s_0 = x_{\min} < \xi_0 < s_1 < \xi_1 < \dots < s_n < \xi_n < s_{n+1} = x_{\max}.$$

On a donc démontré que  $F^{(1)}$  admet pour zéros les  $(\xi_k)_{k=0}^n$ , et les  $(x_i)_{i=0}^n$ . Or, par construction, l'ensemble de ces points sont distincts 2 à 2, c'est à dire que  $F^{(1)}$  admet au moins  $(2n+2)$  zéros distincts.

- c. On peut alors appliquer le Lemme ?? de [?] à  $F^{(1)}$  car  $F^{(1)} \in \mathcal{C}^{2n+1}([a; b]; \mathbb{R})$  et à  $(2n+2)$  zéros distincts et donc

$$\exists \xi_x \in ]x_{\min}, x_{\max}[ , \quad \text{tel que} \quad F^{(2n+2)}(\xi_x) = 0.$$

d. On a

$$0 = F^{(2n+1)}(\xi_x) = f^{(2n+1)}(\xi_x) - \mathcal{H}_n^{(2n+2)}(\xi_x) - \frac{f(x) - \mathcal{H}_n(x)}{\kappa_n(x)} \kappa_n^{(2n+2)}(\xi_x).$$

Comme  $\mathcal{H}_n \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ , on a  $\mathcal{H}_n^{(2n+2)} = 0$ . De plus  $\kappa_n \in \mathbb{R}_{2n+2}[X]$ , et comme  $\kappa_n(x) = x^{2n+2} + Q(x)$  avec  $Q \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$  (i.e. son monôme de puissance  $2n+2$  à pour coefficient 1) on obtient  $\kappa_n^{(2n+2)}(t) = (2n+2)!$  On en déduit

$$f^{(2n+1)}(\xi_x) = \frac{f(x) - \mathcal{H}_n(x)}{\kappa_n(x)} (2n+2)!$$

ce qui donne (P-1).

Q. 2

Montrer que,  $\forall x \in [a; b]$ , il existe  $\xi_x$  appartenant au plus petit intervalle ouvert contenant  $x, x_0, \dots, x_n$  vérifiant (P-1).

R. 2

- Si,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x \neq x_i$  alors (P-1) a été démontré dans la question précédente.
- Si,  $\exists i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $x = x_i$ , alors l'équation (P-1) est immédiate (avec  $\xi_x$  quelconque) car

$$f(x_i) - \mathcal{H}_n(x_i) = 0 \quad \text{et} \quad \kappa_n(x_i) = 0.$$

