

EXERCICE 10

Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$ non nul et non colinéaire à \mathbf{e}_1 , premier vecteur de la base canonique de \mathbb{C}^n .

Montrer qu'il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$

$$\mathbb{H}(\mathbf{u})\mathbf{a} = -\|\mathbf{a}\|_2 e^{i \arg(a_1)} \mathbf{e}_1. \quad (\text{P-1})$$

Correction Avec $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1$, on est sous les conditions du théorème 3.1.8 de [2]/théorème 2.15 de [1]. On défini alors $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$|\alpha| = \|\mathbf{a}\|_2 \quad \text{et} \quad \arg \alpha = -\arg \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle + \delta\pi, \quad \text{avec } \delta \in \llbracket 0, 1 \rrbracket.$$

On a donc

$$\arg \alpha = -\arg(\overline{a_1}) + \delta\pi = \arg(a_1) + \delta\pi.$$

le choix $\delta = 1$ étant numériquement préférable (voir Exercice ...) Le théorème permet alors d'affirmer que

$$\mathbb{H}\left(\frac{\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}}{\|\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}\|_2}\right)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}.$$

Or , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{a} - \alpha\mathbf{b} &= \mathbf{a} - |\alpha| e^{i \arg(\alpha)} \mathbf{e}_1 \\ &= \mathbf{a} - \|\mathbf{a}\|_2 e^{i(\arg(a_1) + \delta\pi)} \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

Avec le choix $\delta = 1$, on obtient

$$\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b} = \mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|_2 e^{i \arg(a_1)} \mathbf{e}_1.$$

On obtient alors

$$\mathbb{H}\left(\frac{\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|_2 e^{i \arg(a_1)} \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{a} + \|\mathbf{a}\|_2 e^{i \arg(a_1)} \mathbf{e}_1\|_2}\right)\mathbf{a} = -\|\mathbf{a}\|_2 e^{i \arg(a_1)} \mathbf{e}_1$$

◇



References

- [1] F. Cuvelier. Analyse numérique I, résolution de systèmes linéaires, méthodes directes, résumé. fichier pdf, https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/25-26/resume_RSLdirecte.pdf.
- [2] F. Cuvelier. *Analyse numérique élémentaire (version du 29 sep. 2025)*. Polycopié (téléchargement), 2025.