Exercice 2 : *Matrice de permutation*

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j$, on note $\mathbb{P}_n^{[i,j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice identitée dont on a permuté les lignes i et j.

Q. 1 *Représenter cette matrice et la définir proprement.*

R. 1

On note, dans toute la correction, $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.
On peut définir cette matrice par ligne,

$$\left\{\begin{array}{rcll} \forall r \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\},\ P_{r,s} & = & \delta_{r,s}, & \forall s \in [\![1,n]\!], \\ P_{i,s} & = & \delta_{j,s}, & \forall s \in [\![1,n]\!], \\ P_{j,s} & = & \delta_{i,s}, & \forall s \in [\![1,n]\!]. \end{array}\right.$$

ou par colonne

$$\left\{\begin{array}{rcll} \forall s \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\},\ P_{r,s} & = & \delta_{r,s}, & \forall r \in [\![1,n]\!], \\ P_{r,i} & = & \delta_{r,j}, & \forall r \in [\![1,n]\!], \\ P_{r,j} & = & \delta_{r,i}, & \forall r \in [\![1,n]\!]. \end{array}\right.$$

⚠ Ne pas utiliser les indices i et j qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

On peut noter que la matrice $\mathbb{P}$ est symétrique. Pour la représentation, on suppose $i < j$. On effectue une représentation bloc 5×5 avec des blocs diagonaux carrés sachant que tous les blocs non décrits sont nuls:

$$\mathbb{P} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \overset{i-1}{\longleftrightarrow} & i & \overset{j-i-1}{\longleftrightarrow} & j & \overset{n-j}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c:c:c:c:c} \mathbb{I} & & & & \\ \hdashline & 0 & & 1 & \\ \hdashline & & \mathbb{I} & & \\ \hdashline & 1 & & 0 & \\ \hdashline & & & & \mathbb{I} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow\, i-1 \\ i \\ \updownarrow\, j-i-1 \\ j \\ \updownarrow\, n-j \end{array} \end{array}$$

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.On note $\boldsymbol{A}_{r,:}$ le r-ème vecteur ligne de $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{A}_{:,s}$ le s-ème vecteur colonne de $\mathbb{A}$.

Q. 2

a. Déterminer les lignes de la matrice $\mathbb{D} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}\mathbb{A}$ *en fonction des vecteurs lignes de* $\mathbb{A}$.

b. Déterminer les colonnes de la matrice $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}_n^{[i,j]}$ *en fonction des vecteurs colonnes de* $\mathbb{A}$.

R. 2

a. On note $\mathbb{D} = \mathbb{P}\mathbb{A}$. Par définition du produit matriciel on a

$$D_{r,s} = \sum_{k=1}^{n} P_{r,k}A_{k,s}.$$

On obtient, $\forall s \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{cases} D_{r,s} &= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{r,k} A_{k,s} = A_{r,s}, \quad \forall r \in [\![1,n]\!] \backslash \{i,j\}, \\ D_{i,s} &= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{j,k} A_{k,s} = A_{j,s}, \\ D_{j,s} &= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k} A_{k,s} = A_{i,s}. \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \boldsymbol{D}_{r,:} &= \boldsymbol{A}_{r,:}, \quad \forall r \in [\![1,n]\!] \backslash \{i,j\}, \\ \boldsymbol{D}_{i,:} &= \boldsymbol{A}_{j,:}, \\ \boldsymbol{D}_{j,:} &= \boldsymbol{A}_{i,:}. \end{cases}$$

Note: La notation $\boldsymbol{D}_{i,:}$ correspond au vecteur ligne $(D_{i,1}, \ldots, D_{i,n})$ et $\boldsymbol{D}_{:,j}$ correspond au vecteur colonne $\begin{pmatrix} D_{1,j} \\ \vdots \\ D_{n,j} \end{pmatrix}$

b. On note $\mathbb{E} = \mathbb{A}\mathbb{P}$. Par définition du produit matriciel et par symétrie de $\mathbb{P}$ on a

$$E_{r,s} = \sum_{k=1}^{n} A_{r,k} P_{k,s} = \sum_{k=1}^{n} A_{r,k} P_{s,k}.$$

⚠ Ne pas utiliser les indices i et j qui sont déjà fixés dans la définition de la matrice $\mathbb{P} = \mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

On obtient en raisonnant par colonne, $\forall r \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{cases} E_{r,s} &= \sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{s,k} = A_{r,s}, \quad \forall s \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\}, \\ E_{r,i} &= \sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{j,k} = A_{r,j}, \\ E_{r,j} &= \sum_{k=1}^{n} A_{r,k}\delta_{i,k} = A_{r,i}. \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_{:,s} &= \boldsymbol{A}_{:,s}, \quad \forall s \in [\![1,n]\!]\backslash\{i,j\}, \\ \boldsymbol{E}_{:,i} &= \boldsymbol{A}_{:,j}, \\ \boldsymbol{E}_{:,j} &= \boldsymbol{A}_{:,i}. \end{cases}$$

Q. 3

a. Calculer le déterminant de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

b. Déterminer l'inverse de $\mathbb{P}_n^{[i,j]}$.

R. 3

a. $\det(\mathbb{P}) = -1$, si $i \neq j$ et $\det(\mathbb{P}) = 1$ sinon.

b. Immédiat par calcul direct on a $\mathbb{P}\mathbb{P} = \mathbb{I}$ et donc la matrice $\mathbb{P}$ est inversible et $\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}$.

References

[1] F. Cuvelier. Analyse numérique I, résolution de systèmes linéaires, méthodes directes, résumé. fichier pdf, `https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/25-26/resume_RSLdirecte.pdf`.

[2] F. Cuvelier. *Analyse numérique élémentaire (version du 29 sep. 2025)*. Polycopié (téléchargement), 2025.