Exercice 13

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q. 1

Expliquer comment construire une matrice $\mathbb{H} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, produit d'au plus $n-1$ matrices élémentaires de Householder, et, $\mathbb{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire supérieure telles $\mathbb{H}\mathbb{A} = \mathbb{R}$.

R. 1

Remarque. *Soient $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $j \in \mathcal{M}_1(n)$. On dit que la colonne j de $\mathbb{A}$ est colonne supérieure si, $\forall i \in [\![j+1, n]\!]$, $A_{i,j} = 0$, c'est à dire*

$$\mathbb{A}{:}, j = \operatorname{Vect}(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_j).$$

En notant $\mathbb{A}^{[0]} = \mathbb{A}$, l'idée générale est la suivante:
Pour j allant successivement de 1 à $n-1$, on va déterminer $\mathbb{H}^{[j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne j de $\mathbb{A}^{[j]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[j]}\mathbb{A}^{[j-1]}$ soit colonne supérieure sans modifier les colonnes 1 à j de $\mathbb{A}^{[j-1]}$.

Etape 1: il faut déterminer $\mathbb{H}^{[1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne 1 de $\mathbb{A}^{[1]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[1]}\mathbb{A}^{[0]}$ soit colonne supérieure .

- Si $\mathbb{A}^{[0]}_{:,1}$ est nulle ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$ alors on prend $\mathbb{H}^{[1]} = \mathbb{I}_n$ qui est unitaire.

- Sinon, $\mathbb{A}^{[0]}_{:,1}$ est non nulle et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$: on est sous les hypothèse du corollaire 3.1.3 de [2]/corollaire 2.16 de [1] avec $\boldsymbol{a} = \mathbb{A}^{[0]}_{:,1}$.
  On en déduit alors qu'avec le vecteur $\boldsymbol{u}_1 \in \mathbb{C}^n$ donné par

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{a} - \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)}\boldsymbol{e}_1}{\left\|\boldsymbol{a} - \|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)}\boldsymbol{e}_1\right\|_2}$$

  on a

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{a} = -\|\boldsymbol{a}\|_2 e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)}\boldsymbol{e}_1.$$

En posant $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_1)$ et $\alpha_1 = -\left\|\boldsymbol{a}\right\|_2 e^{\imath \arg(\boldsymbol{a}_1)}$, on obtient

$$\mathbb{A}^{[1]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}_1 \mathbb{A}^{[0]} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \end{pmatrix}.$$

Etape 2: il faut déterminer $\mathbb{H}^{[2]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne 2 de $\mathbb{A}^{[2]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[2]}\mathbb{A}^{[1]}$ soit colonne supérieure sans modifier la colonne 1 de $\mathbb{A}^{[1]}$. Pour celà on va utiliser le corollaire 3.1.3 de [2]/corollaire 2.16 de [1] en posant

$$\mathbb{A}^{[1]} = \begin{array}{r} \\ 1 \\ n-1 \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & n-1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array} \end{pmatrix} \end{array}, \quad \text{avec} \quad \mathbb{U} = \alpha_1, \ \mathbb{E} = \mathbb{O}_{n-1,1}, \ \mathbb{F} = \mathbb{A}^{[1]}_{1,2:n}, \ \mathbb{V} = \mathbb{A}^{[1]}_{2:n,2:n}$$

- Si $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^{n-1}$, est nulle ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^{n-1}$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^{n-1}$, alors on pose $\mathbb{H}^{[2]} = \mathbb{I}_n$ qui est unitaire.
- Sinon, $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^{n-1}$, est non nulle et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^{n-1}$, et le corollaire peut s'appliquer. On en déduit alors qu'avec le vecteur $\boldsymbol{u}_2 \in \mathbb{C}^{n-1}$ donné par

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\mathbb{V}_{1,:} - \alpha_2 \boldsymbol{e}_1^{n-1}}{\left\|\mathbb{V}_{1,:} - \alpha_2 \boldsymbol{e}_1^{n-1}\right\|} \text{ avec } \alpha_2 = -\left\|\mathbb{V}_{1,:}\right\|_2 e^{\imath \arg(\mathbb{V}_{1,1})}$$

on a $\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{V}_{1,:} = \alpha_2 \boldsymbol{e}_1^{n-1}$ et donc

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|ccc} \alpha_2 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} \end{pmatrix}.$$

De plus, en posant

$$\boldsymbol{w}_2 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline \\ \boldsymbol{u}_2 \end{array}\right) \in \mathbb{C}^n \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^{[2]} = \mathbb{H}(\boldsymbol{w}_2) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2) \\ 0 & \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

on a

$$\mathbb{A}^{[2]} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathbb{H}^{[2]}\mathbb{A}^{[1]} \; = \; \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{E} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{V} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathbb{F} \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_2)\mathbb{V} \\ 0 & \end{array}\right)$$

En récrivant la matrice $\mathbb{A}^{[2]}$ sous forme de 2×2 blocs de dimensions 2 et $n-2$, on obtient

$$\mathbb{A}^{[2]} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{\quad 2 \quad} & \overleftrightarrow{\quad n-2 \quad} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc} \alpha_1 & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \alpha_2 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ 2 \\ \\ n-2 \\ \\ \end{array}.$$

$\dots$

Etape j: il faut déterminer $\mathbb{H}^{[j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire, pour que la colonne j de $\mathbb{A}^{[j]} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathbb{H}^{[j]}\mathbb{A}^{[j-1]}$ soit colonne supérieure tout en ayant les $(j-1)$ premières colonnes identiques à celles $\mathbb{A}^{[j-1]}$.

Pour celà on utilise le corollaire 3.1.3 de [2]/corollaire 2.16 de [1] en posant, $p = j-1$, $q = n-p$ et

$$\mathbb{A}^{[j-1]} = \begin{array}{c} \\ p \\ q \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & q \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \end{array}, \quad \text{avec} \quad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \bullet \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{j-1} \end{pmatrix}, \; \mathbb{E} = \mathbb{O}_{q,p}, \; \mathbb{F} = \mathbb{A}^{[j-1]}_{1:p,j:n}, \; \mathbb{V} = \mathbb{A}^{[j-1]}_{j:n,j:n}$$

- Si $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^q$, est nulle ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^q$, premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^q$, alors on prend $\mathbb{H}^{[j]} = \mathbb{I}_n$ qui est unitaire.
- Sinon, $\mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^q$, est non nulle et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^q$, et le Lemme peut s'appliquer. On en déduit alors qu'avec le vecteur $\boldsymbol{u}_j \in \mathbb{C}^q$ donné par

$$\boldsymbol{u}_j = \frac{\mathbb{V}_{1,:} - \alpha_j \boldsymbol{e}_1^q}{\left\| \mathbb{V}_{1,:} - \alpha_j \boldsymbol{e}_1^q \right\|} \text{ avec } \alpha_j = - \left\| \mathbb{V}_{1,:} \right\|_2 e^{\imath \arg(\mathbb{V}_{1,1})}$$

on a $\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{V}_{1,:} = \alpha_j \boldsymbol{e}_1^q$ et donc

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{V} = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_j & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right).$$

De plus, en posant

$$\boldsymbol{w}_j = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{0}_p \\ \hline \boldsymbol{u}_j \end{array}\right) \in \mathbb{C}^n \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^{[j]} = \mathbb{H}(\boldsymbol{w}_j) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_{p,q} \\ \hline \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j) \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

on a alors

$$\mathbb{A}^{[j]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{H}^{[j]}\mathbb{A}^{[j-1]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{E} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{V} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}_j)\mathbb{V} \end{array}\right).$$

En récrivant la matrice $\mathbb{A}^{[j]}$ sous forme de 2×2 blocs de dimensions j et $n-j$, on obtient

$$\mathbb{A}^{[j]} = \begin{array}{cc}
\begin{array}{cc} \qquad\qquad j \qquad\qquad & \qquad\qquad n-j \qquad\qquad \end{array} & \\
\left(\begin{array}{cccc|ccc}
\alpha_1 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \bullet & & & \\
0 & \cdots & 0 & \alpha_j & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline
0 & \cdots & \cdots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet
\end{array}\right) & \begin{array}{c} j \\ \\ \\ n-j \end{array}
\end{array}$$

Etape $n-1$: faire l'Etape j avec $j = n-1$.

Au final, on a donc

$$\mathbb{H}^{[n-1]} \dots \mathbb{H}^{[1]} \mathbb{A} = \mathbb{R}$$

où $\mathbb{R}$ est triangulaire supérieure, et, les matrices $\mathbb{H}^{[j]}$, $j \in [\![1, n-1]\!]$ sont, soit la matrice identité, soit une matrice élémentaire de Householder: elles sont donc unitaires.
On note $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{[n-1]} \dots \mathbb{H}^{[1]}$, cette matrice est donc le produit d'au plus $(n-1)$ matrices élémentaires de Householder. Comme le produit de matrices unitaires reste une matrice unitaire, on a $\mathbb{H}$ unitaire et

$$\mathbb{A} = \mathbb{H}^* \mathbb{R}.$$

On pose $\mathbb{Q} = \mathbb{H}^*$. La matrice $\mathbb{Q}$ est alors unitaire et on a

$$\mathbb{Q} = \left(\mathbb{H}^{[1]}\right)^* \dots \left(\mathbb{H}^{[n-1]}\right)^*.$$

Les matrices élémentaires de Householer étant hermitiennes, on obtient

$$\mathbb{Q} = \mathbb{H}^{[1]} \dots \mathbb{H}^{[n-1]}$$

et donc $\mathbb{Q}$ est aussi le produit d'au plus $(n-1)$ matrices élémentaires de Householder.

Q. 2 *Ecrire une fonction* FactQR *permettant de calculer la factorisation* $\mathbb{Q}\mathbb{R}$ *d'une matrice* $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On pourra utiliser la fonction MatHouseholder *(voir Exercice 3.1.9, page 92)* .

R. 2

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_0}$

1: $\boxed{\text{Calculer } \mathbb{Q} \text{ et } \mathbb{R}}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

1: Calculer $\mathbb{H}^{[1]}$ à $\mathbb{H}^{[n-1]}$
2: $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$
3: $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$
4: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$ ou $\mathbb{H}^{[1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[n-1]}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_1}$

1: $\boxed{\text{Calculer } \mathbb{H}^{[1]} \text{ à } \mathbb{H}^{[n-1]}}$
2: $\mathbb{H} \leftarrow \mathbb{H}^{[n-1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[1]}$
3: $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{A}$
4: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{H}^*$ ou $\mathbb{H}^{[1]} \times \cdots \times \mathbb{H}^{[n-1]}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

1: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
2: $\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
3: **Pour** $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
4: Calculer $\mathbb{H}^{[j]}$ à partir de $\mathbb{A}^{[j-1]}$
5: $\mathbb{A}^{[j]} \leftarrow \mathbb{H}^{[j]} * \mathbb{A}^{[j-1]}$
6: $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}^{[j]}$
7: **Fin Pour**

8: $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$

Etape j: On suppose les $j-1$ premières colonnes de $\mathbb{A}^{[j-1]}$ sous forme triangulaire supérieure.
On pose $p = j-1$, $q = n-p$ et on décompose la matrice $\mathbb{A}^{[j-1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en 2×2 blocs:

$$\mathbb{A}^{[j-1]} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} p & q \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) & \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \end{array}$$

avec, par hypothèse, $\mathbb{U}$ triangulaire supérieure et $\mathbb{E}$ matrice nulle.

Pour calculer $\mathbb{H}^{[j-1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à partir de $\mathbb{A}^{[j-1]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on défini le vecteur $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^q$ comme étant le premier vecteur colonne de $\mathbb{V}$. On note $\boldsymbol{e}_1 \in \mathbb{C}^q$, le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^q$.

- Si $\boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{e}_1 = 0$, i.e. $\boldsymbol{v}$ est nul ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$, alors $\mathbb{H}^{[j-1]} = \mathbb{I}_n$. On a alors

$$\mathbb{A}^{[j]} = \mathbb{H}^{[j]}\mathbb{A}^{[j-1]} = \mathbb{A}^{[j-1]}$$

  et les j premières colonnes de $\mathbb{A}^{[j]}$ sont alors sous forme triangulaire supérieure.

- Sinon, en utilisant le corollaire 3.1.3 de [2]/corollaire 2.16 de [1], on défini le vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^q$ par

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1\|} \text{ avec } \alpha = -\|\boldsymbol{v}\|_2 \, e^{\imath \arg(\boldsymbol{v}_1)}$$

  et, la matrice élémentaire de Householder $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$ vérifie alors

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = \alpha_j \boldsymbol{e}_1.$$

  En posant

$$\boldsymbol{w} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{0}_p \\ \hline \boldsymbol{u} \end{array}\right) \in \mathbb{C}^n \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^{[j]} = \mathbb{H}(\boldsymbol{w}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),$$

  où la matrice élémentaire de Householder $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})$ est donnée par

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{w}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I}_n - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^* = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_p & \mathbb{O}_{p,q} \\ \hline \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \end{array}\right).$$

  On a alors

$$\mathbb{A}^{[j]} = \mathbb{H}^{[j]}\mathbb{A}^{[j-1]} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{O}_{q,p} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} \end{array}\right)$$

  et les j premières colonnes de $\mathbb{A}^{[j]}$ sont alors sous forme triangulaire supérieure.

Pour déterminer la matrice $\mathbb{H}^{[j]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il suffit donc de connaitre $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^q$. On va donc utiliser une fonction réalisant cette opération dans l'algorithme de factorisation $\mathbb{Q}\mathbb{R}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_2}$

$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
$\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
    Calculer $\mathbb{H}^{[j]}$ à partir de $\mathbb{A}^{[j-1]}$
    $\mathbb{A}^{[j]} \leftarrow \mathbb{H}^{[j]} * \mathbb{A}^{[j-1]}$
    $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}^{[j]}$
Fin Pour
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_3}$

$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
$\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
    $\boldsymbol{v} \leftarrow \mathbb{A}^{[j-1]}_{j:n,j}$
    $[\mathbb{H}^{[j]}, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder4QRstep}(\boldsymbol{v}, n)$
    $\mathbb{A}^{[j]} \leftarrow \mathbb{H}^{[j]} * \mathbb{A}^{[j-1]}$
    $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}^{[j]}$
Fin Pour
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$

La fonction MatHouseholder4QRstep étant donnée par:

Algorithme 2 fonction $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder4QRstep}(\boldsymbol{v}, n)$.

A partir d'un vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^q$, $q \in [\![2, n]\!]$, retourne une matrice $\mathbb{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire et $\alpha \in \mathbb{C}$ telles que

- si $\boldsymbol{v} - \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v} \rangle \boldsymbol{e}_1 = 0$ (i.e. $\boldsymbol{v}$ nul ou colinéaire à $\boldsymbol{e}_1$) alors $\mathbb{S}$ est la matrice identitée et $\alpha = 0$,
- sinon, en définissant $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^q$ par

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1\|} \text{ avec } \alpha = -\|\boldsymbol{v}\|_2 e^{\imath \arg(\boldsymbol{v}_1)}$$

  on prend $\mathbb{S}$ comme étant la matrice élémentaire de Householder:

$$\mathbb{S} = \mathbb{H}(\boldsymbol{w}) \text{ avec } \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}_p \\ \hline \boldsymbol{u} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

Données : $\boldsymbol{v}$: vecteur de $\mathbb{C}^q$, $q \in [\![2, n]\!]$,
n : dimension de

Résultat : $\mathbb{S}$: matrice de Householder ou identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
α : nombre complexe.

Fonction $[\mathbb{S}, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder4QRstep}(\ \boldsymbol{v}, n\ )$
  $\boldsymbol{e} \leftarrow \boldsymbol{0}_q,\ \boldsymbol{e}(1) \leftarrow 1$
  $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}, 1)$
  $\mathbb{S} \leftarrow \text{eye}(n)$
  Si $\alpha \neq 0$ **alors**
    $p \leftarrow n - q$
    $I \leftarrow p + 1 : n$
    $\mathbb{S}(I, I) \leftarrow \mathbb{H}$
  Fin Si
Fin Fonction

Bien évidemment, on peut simplifier/améliorer l'écriture de l'Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_3}$ en ne stockant pas les suites de matrices:

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_3}$

$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
$\mathbb{A}^{[0]} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
  $\boldsymbol{v} \leftarrow \mathbb{A}^{[j-1]}_{j:n,j}$
  $[\mathbb{H}^{[j]}, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder4QRstep}(\boldsymbol{v}, n)$
  $\mathbb{A}^{[j]} \leftarrow \mathbb{H}^{[j]} * \mathbb{A}^{[j-1]}$
  $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}^{[j]}$
Fin Pour
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}^{[n-1]}$

Algorithme 1 $\boxed{\mathcal{R}_4}$

$\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
$\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}$
Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
  $\boldsymbol{v} \leftarrow \mathbb{R}_{j:n,j}$
  $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow \text{MatHouseholder4QRstep}(\boldsymbol{v}, n)$
  Si $\alpha \neq 0$ **alors** ⊳ Sinon $\mathbb{H} = \mathbb{I}$!
    $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{R}$
    $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}$
  Fin Si
Fin Pour

Voici (enfin) l'agorithme final:

Algorithme 1 Fonction FactQR

Données : $\mathbb{A}$: matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Résultat : $\mathbb{Q}$: matrice unitaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
$\mathbb{R}$: matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Fonction $[\mathbb{Q}, \mathbb{R}] \leftarrow$ FactQR($\mathbb{A}$)
  $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{I}$
  $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{A}$
  Pour $j \leftarrow 1$ **à** $n-1$ **faire**
    $\boldsymbol{v} \leftarrow \mathbb{R}(j:n, j)$
    $[\mathbb{H}, \alpha] \leftarrow$ MatHouseholder4QRstep$(\boldsymbol{v}, n)$
    Si $\alpha \neq 0$ **alors** ▷ Sinon $\mathbb{H} = \mathbb{I}$!
      $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{H} * \mathbb{R}$
      $\mathbb{Q} \leftarrow \mathbb{Q} * \mathbb{H}$
    Fin Si
  Fin Pour
Fin Fonction

Q. 3 *Ecrire un programme permettant de tester cette fonction. On dispose des fonctions:*

- MatRand(m, n) *retournant une matrice aléatoire de* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ *chacune des parties imaginaires et réelles de ses éléments étant une variable aléatoire suivant la loi uniforme* $[0, 1]$.
- NormInf$(\mathbb{A})$ *retournant la norme infinie d'une matrice carrée* $\mathbb{A}$.

R. 3

$\mathbb{A} \leftarrow$ MatRand$(50, 50)$
$[\mathbb{Q}, \mathbb{R}] \leftarrow$ FactQR$(\mathbb{A})$
err $\leftarrow$ NormInf$(\mathbb{A} - \mathbb{Q} * \mathbb{R})$ ▷ doit être très petit!

References

[1] F. Cuvelier. Analyse numérique I, résolution de systèmes linéaires, méthodes directes, résumé. fichier pdf, `https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/25-26/resume_RSLdirecte.pdf`.

[2] F. Cuvelier. *Analyse numérique élémentaire (version du 29 sep. 2025)*. Polycopié (téléchargement), 2025.