EXERCICE 12

Soit $\mathbb{A} \in \mathcal{M}_{m+n}(\mathbb{C})$ la matrice bloc

$$\mathbb{A} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} m & n \end{array} \\ \begin{array}{c} m \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \end{array}.$$

On note $\boldsymbol{v} = \mathbb{V}_{:,1} \in \mathbb{C}^n$ le premier vecteur colonne de $\mathbb{V}$ et on suppose que $\boldsymbol{v}$ est non nul et non colinéaire à $\boldsymbol{e}_1^n$ (premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$).

Q. 1

Expliciter, en fonction de $\boldsymbol{v}$, le vecteur $\boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^n$, $\|\boldsymbol{u}\|_2 = 1$, tel que

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{e}_1^n, \quad \textit{avec } \mathbb{H}(\boldsymbol{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I} - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^*.$$

R. 1

On a

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1^n}{\|\boldsymbol{v} - \alpha \boldsymbol{e}_1^n\|} \text{ avec } \alpha = \|\boldsymbol{v}\|_2 \, e^{\imath(\delta\pi - \arg\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1^n\rangle)}, \;\; \delta \in \{0, 1\}.$$

Comme $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1^n \rangle = \overline{v_1}$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$, on obtient

$$\alpha = \|\boldsymbol{v}\|_2 \, e^{\imath(\arg(v_1) + \delta\pi)}$$

ce qui donne avec le choix $\delta = 1$

$$\alpha = -\|\boldsymbol{v}\|_2 \, e^{\imath \arg(v_1)}.$$

Q. 2

Soient $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$ et $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$. On pose $\boldsymbol{w} = \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{x} \\ \hline \boldsymbol{y} \end{array}\right) \in \mathbb{C}^{m+n}$. Déterminer $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})$ en fonction de $\mathbb{H}(\boldsymbol{x})$ et de $\mathbb{H}(\boldsymbol{y})$.

R. 2

On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(\boldsymbol{w}) &= \mathbb{I}_{m+n} - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^* \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) - 2\left(\begin{array}{c} \boldsymbol{x} \\ \hline \boldsymbol{y} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{x}^* & \boldsymbol{y}^* \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_m & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{I}_n \end{array}\right) - 2\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^* & \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^* \\ \hline \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^* & \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^* \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{H}(\boldsymbol{x}) & -2\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^* \\ \hline -2\boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^* & \mathbb{H}(\boldsymbol{y}) \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Q. 3

On pose $\boldsymbol{w} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{0}_m \\ \hline \boldsymbol{u} \end{array}\right) \in \mathbb{C}^{m+n}$.

a. Déterminer $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$ *en fonction de* $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})$.

b. Que peut-on dire de particulier sur le bloc $(2,2)$ *de* $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$?

R. 3

a. De la question précédente, on déduit

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{w}) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{m,m} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}). \end{array}\right)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A} &= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_{m,m} & \mathbb{O}_{m,n} \\ \hline \mathbb{O}_{n,m} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u}). \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{E} & \mathbb{V} \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{U} & \mathbb{F} \\ \hline \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{E} & \mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} \end{array}\right).
\end{aligned}$$

b. le bloc $(2,2)$ de $\mathbb{H}(\boldsymbol{w})\mathbb{A}$ correspond à la matrice $\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont la première colonne vaut $\alpha\boldsymbol{e}_1^n$. On a alors

$$\mathbb{H}(\boldsymbol{u})\mathbb{V} = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha & \bullet & \cdots & \bullet \\ \hline 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}\right).$$

References

[1] F. Cuvelier. Analyse numérique I, résolution de systèmes linéaires, méthodes directes, résumé. fichier pdf, `https://www.math.univ-paris13.fr/~cuvelier/docs/Enseignements/MACS1/AnaNumI/25-26/resume_RSLdirecte.pdf`.

[2] F. Cuvelier. *Analyse numérique élémentaire (version du 29 sep. 2025)*. Polycopié (téléchargement), 2025.